

РАВНОВЕСИЕ БЕЗМОМЕНТНОЙ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ ПРИ БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

А. С. Григорьев

(Москва)

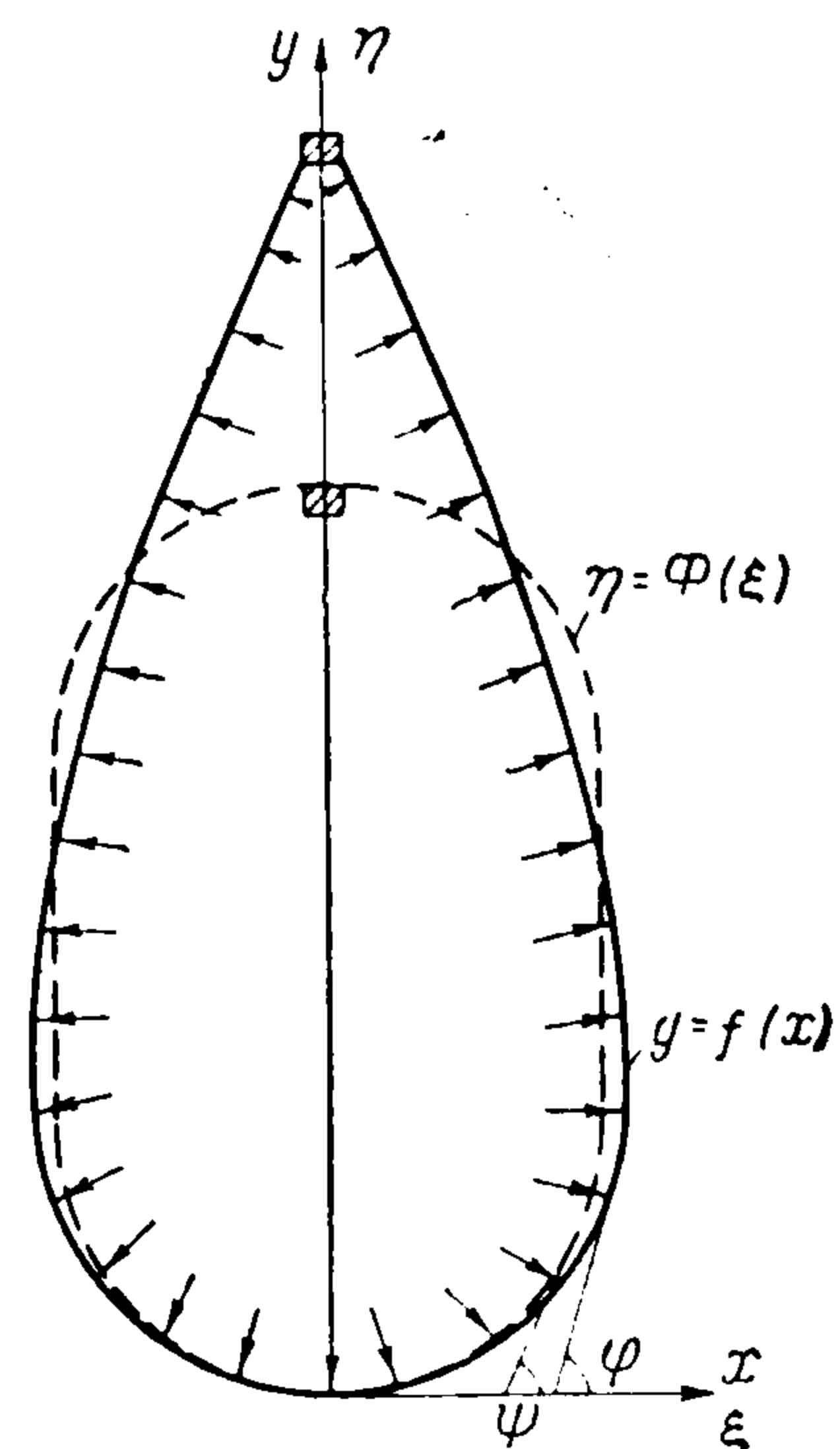
Рассматривается равновесие при больших смещениях и больших деформациях безмоментной оболочки с одним или двумя плоскими жесткими днищами, имеющей в ненагруженном состоянии форму тела, образованного вращением произвольного гладкого контура. Оболочка нагружена внутренним давлением, изменяющимся по ее высоте, а также силами, приложенными к днищам. Материал считается несжимаемым, а в основу его механической характеристики кладется зависимость между напряжениями и истинными (логарифмическими) деформациями. Помимо гипотез, на которых основаны соотношения между этими величинами (см. [1], [2]), используются обычные допущения, принятые в теории тонких безмоментных оболочек. В специфических, упрощенных постановках — в случае нерастяжимости материала, «равнопрочности» и т. д. — подобные задачи рассматривались и ранее (см. библиографию в работах [3, 4]). Ниже выводятся основные системы уравнений, к решению которых сводится задача и детально рассматривается случай оболочки начальной цилиндрической формы. Для случая равномерного давления последняя задача рассматривалась ранее [4]. В работах [5-7] при тех же основных предпосылках была рассмотрена задача о деформациях мембраны, нагруженной равномерным давлением.

1. Исходные зависимости и соотношения. В наиболее общем случае, при равновесном состоянии оболочки, образуются две зоны: «растянутая» и «складчатая» [3]. В первой главные кривизны и главные напряжения положительны, во второй кольцевое напряжение следует считать равным нулю, поверхность оболочки становится складчатой — образуется как бы система нитей, нагруженных поперечными силами и внешним натяжением.

Рассмотрим оболочку (фиг. 1), отнесенную к цилиндрической системе безразмерных координат $x \theta z$, неизменно связанной с одной из вершин. Пусть ξ и η — значения x и y для недеформированной оболочки. Зависимости между этими координатами и соответствующими размерными X, Y, r, ζ установим с помощью соотношений

$$\begin{aligned} x &= \frac{X}{R_1} A, & y &= \frac{Y}{R_1} A & (1.1) \\ \xi &= \frac{r}{R_1} A, & \eta &= \frac{\zeta}{R_1} A \end{aligned}$$

где R_1 — какой-либо характерный начальный размер оболочки, а A — безразмерный произвольный параметр.



Фиг. 1

Уравнение контура начальной формы зададим в виде

$$\eta = \Phi(\xi) \quad (1.2)$$

Главные «истинные» удлинения и сдвиги определяются по формулам

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \ln(1 + e_1), & \varepsilon_2 &= \ln(1 + e_2), & \varepsilon_3 &= \ln(1 + e_3) \\ \gamma_{12} &= \ln \frac{1 + e_1}{1 + e_2}, & \gamma_{23} &= \ln \frac{1 + e_2}{1 + e_3}, & \gamma_{31} &= \ln \frac{1 + e_3}{1 + e_1} \end{aligned} \quad (1.3)$$

где e_1, e_2, e_3 — обычные удлинения. Главные касательные напряжения

$$\tau_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \quad \tau_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_{31} = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \quad (1.4)$$

где σ_1 — меридианальное, а σ_2 — кольцевое напряжение.

Диаграмму «истинного» сдвига будем аппроксимировать кривой

$$\gamma = \text{sign } \tau \left| \frac{\tau}{K} \right|^{1/\mu} \quad (1.5)$$

где K и μ — постоянные, получаемые из условий наилучшей аппроксимации. Заменяя γ наибольшим по модулю из главных сдвигов, а τ — соответствующим главным касательным напряжением, полагая $\sigma_3 = 0$, получим

$$\begin{aligned} p_1 &= (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^\mu & \text{при } |p_1| \geq |p_2| \\ p_2 &= (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^\mu & \text{при } |p_2| \geq |p_1| \end{aligned} \quad \left(p_1 = \frac{\sigma_1}{2K}, \quad p_2 = \frac{\sigma_2}{2K} \right) \quad (1.6)$$

Заметим, что если положить $\mu = 1$, речь будет идти об упругой оболочке из несжимаемого материала, разница между обоими случаями отпадает, p_1 и p_2 прямо определяется по (1.6), а K будет модулем сдвига.

Полагая главные касательные напряжения пропорциональными главным истинным сдвигам, найдем, что

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 - \varepsilon_3} \quad (1.7)$$

Условие несжимаемости материала дает

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0 \quad (1.8)$$

Можно вместо (1.5) использовать аналогичным образом аппроксимированную зависимость между σ_i — интенсивностью напряжений и ε_i — интенсивностью «истинных» деформаций

$$\varepsilon_i = \left(\frac{\sigma_i}{K_i} \right)^{1/\mu} \quad (1.9)$$

где K_i и μ — постоянные. Тогда, подразумевая под p_1 и p_2 , σ_1 и σ_2 , отнесенные к K_i и используя (1.7), вместо (1.6) получим

$$p_1 = \frac{2}{3} \varepsilon_1^{\mu-1} (\varepsilon_1 - \varepsilon_3), \quad p_2 = \frac{2}{3} \varepsilon_2^{\mu-1} (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) \quad (1.10)$$

Заметим, что поскольку $\sigma_3 = 0$ и материал несжимаем

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \frac{V\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} \\ \varepsilon_i &= \frac{V\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2} = \frac{2}{V\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \varepsilon_2\varepsilon_3} \end{aligned} \quad (1.11)$$

В этом случае к соотношениям для упругой оболочки придем, полагая K_i равным модулю упругости и $\mu = 1$.

Пусть S_1 — криволинейная координата по дуге меридиана после деформации, а S_{10} — до деформации, H — толщина оболочки, H_1 — ее значение в начальном состоянии, тогда в растянутой зоне

$$e_1 = \frac{dS_1 - dS_{10}}{dS_{10}} = \frac{dX \cos \psi}{dr \cos \varphi} - 1 = \frac{dx \cos \psi}{d\xi \cos \varphi} - 1$$

$$e_2 = \frac{X - r}{r} = \frac{x}{\xi} - 1, \quad e_3 = \frac{H - H_1}{H_1} = h - 1$$

где φ — угол, образованный касательной к меридиану с плоскостью нормальной оси оболочки, ψ — его значение для начальной формы, а h — безразмерная толщина оболочки. Выражения e_1 и e_3 могут быть использованы и при установлении выражений деформаций в складчатой зоне. Окончательно в растянутой зоне

$$\varepsilon_1 = \ln \left(\frac{dx \cos \psi}{d\xi \cos \varphi} \right), \quad \varepsilon_2 = \ln \frac{x}{\xi}, \quad \varepsilon_3 = \ln h \quad (1.12)$$

причем в силу (1.2) $\cos \psi$ является заданной функцией ξ .

2. Основные системы уравнений. Уравнения равновесия элемента оболочки в растянутой зоне для случая переменной толщины и давления можно, используя безразмерные координаты и величины, записать так:

$$\frac{d}{dx} (xhp_1) = p_2h, \quad \frac{d}{dx} (xhp_1 \sin \varphi) = \frac{Q(y)}{A} x \quad \left(Q(y) = \frac{R_1}{2KH_1} q(y) \right) \quad (2.1)$$

Здесь $q(y)$ — интенсивность давления. Учитывая, что

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi \quad (2.2)$$

можно из уравнений (1.7), (1.8), (1.12), (2.1) и одного из соотношений (1.6) получить систему четырех дифференциальных уравнений первого порядка относительно x , y , φ и h , рассматриваемых как функции ξ при заданном $Q(y)$. Для случая $p_1 \geq p_2$ эта система будет иметь вид

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{\xi \cos \varphi}{xh \cos \psi}, \quad \frac{dy}{d\xi} = \frac{\xi \sin \varphi}{xh \cos \psi}$$

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{\xi}{xh \cos \psi} \left(\ln \frac{\xi}{xh^2} \right)^{-1} \left[\frac{Q(y)}{Ah} \left(\ln \frac{\xi}{xh^2} \right)^{1-\mu} - \frac{\sin \varphi}{x} \ln \frac{x}{\xi h} \right]$$

$$\frac{dh}{d\xi} = \frac{\mu x^2 h \cos \psi - \xi^2 [\mu + \ln(x^2 h / \xi^2)] \cos \varphi}{x^2 \xi [2\mu + \ln(xh^2 / \xi)] \cos \psi} \quad (2.3)$$

Безразмерные напряжения определяются по формулам

$$p_1 = \left(\ln \frac{\xi}{xh^2} \right)^\mu, \quad p_2 = \left(\ln \frac{\xi}{xh^2} \right)^{\mu-1} \ln \frac{x}{\xi h} \quad (2.4)$$

При $p_2 \geq p_1$ последние два уравнения аменяются следующими

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{\xi}{xh \cos \psi} \left(\ln \frac{\xi}{xh^2} \right)^{-1} \left[\frac{Q(y)}{Ah} \left(\ln \frac{x}{\xi h} \right)^{1-\mu} - \frac{\sin \varphi}{x} \ln \frac{x}{\xi h} \right]$$

$$\frac{dh}{d\xi} = \frac{x^2 h \left(\mu \ln \frac{xh^2}{\xi} - 3 \ln h \right) \cos \psi - \xi^2 \left(\mu \ln \frac{xh^2}{\xi} - 3 \ln h - \ln \frac{x^2 h}{\xi} \ln \frac{x}{\xi h} \right) \cos \varphi}{x^2 \xi \left[3 \ln \frac{x}{\xi} + \left(\mu - \ln \frac{x}{\xi h} \right) \ln \frac{xh^2}{\xi} \right] \cos \psi} \quad (2.5)$$

При этом

$$p_1 = \left(\ln \frac{x}{\xi h} \right)^{\mu-1} \ln \frac{\xi}{x h^2}, \quad p_2 = \left(\ln \frac{x}{\xi h} \right)^{\mu} \quad (2.6)$$

Рассматривая складчатую зону, введем понятие некоторой «определяющей» поверхности — той, которая была бы образована системой нитей, испытывающих давление, действующее в складчатой зоне на реальную оболочку. На одном конце эта система нитей воспринимает натяжения, отвечающие меридианальным напряжениям в растянутой зоне при $p_2 = 0$, на другом конце нити прикреплены к жесткому днищу заданного радиуса.

Будем в дальнейшем, в пределах складчатой зоны, под x и y подразумевать координаты определяющей поверхности, а под φ — угол между касательной к ее меридиану и плоскостью, нормальной к оси оболочки. Пренебрегая разницей в кривизнах различных меридианов действительной срединной поверхности при одном и том же y , считая углы наклона их касательных равными φ и предполагая, что безразмерная толщина оболочки и величина меридианального напряжения не изменяются с изменением θ , можно получить основную систему уравнений для определения x , y , φ и h в функции ξ , используя те же исходные уравнения и соотношения, что и в растянутой зоне. Для этого надо положить

$$p_2 = 0, \quad \varepsilon_2 - \varepsilon_3 = 0 \quad (2.7)$$

Последнее соотношение послужит для определения ε_2 , поскольку в пределах складчатой зоны уже непригодна вторая из формул (1.12).

В результате преобразований получим систему

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\xi} &= \frac{\cos \varphi}{h^2 \cos \psi}, & \frac{dy}{d\xi} &= \frac{\sin \varphi}{h^2 \cos \psi} \\ \frac{d\varphi}{d\xi} &= \frac{Q(y)}{A_* h^3 (-3 \ln h)^\mu \cos \psi}, & h^2 (-3 \ln h)^\mu \xi &= c \end{aligned} \quad (2.8)$$

Здесь c — постоянное, определяемое из условий непрерывности h на границе растянутой и складчатой зоны.

Заметим, что эта же система может быть получена и непосредственно из уравнений равновесия элемента складчатой зоны, условия (1.8), первого и последнего из соотношений (1.12), первой из формул (2.4) и равенств (2.7), если учесть допущения и упрощения, указанные выше.

В каждой конкретной задаче, т. е. при определенном законе изменения давления, материале и заданной начальной форме и соответственных краевых условиях, очевидно, можно получить решение при помощи численного интегрирования упомянутых основных систем и, следовательно, найти форму и толщину оболочки, а также главные напряжения.

Граница между областями в растянутой зоне определяется как параллель, вдоль которой $p_2 = p_1$, граница между зонами — по условию $p_2 = 0$, примененному к уравнениям (2.3). Условиями сопряжения на границах служат условия непрерывности x , y , φ и h .

Если имеется лишь одно днище, то, приняв вершину купола оболочки за начало координат (см. фиг. 1), будем иметь в этой вершине

$$x = y = \varphi = \xi = 0, \quad h = h_0$$

Раскрывая неопределенности, получим

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{dx}{d\xi} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{x}{\xi} = h_0^{-1/2}$$

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{Q(0)}{2A} h_0^{-3/2} \left(-\frac{3}{2} \ln h_0 \right)^{-\mu}, \quad \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{dh}{d\xi} = 0$$

Здесь на h_0 следует смотреть как на параметр.

Укажем, что если оболочка нагружена только равномерным давлением, то $Q = qR_1 / 2KH_1 = \text{const}$, складчатой зоны не будет, а система (2.3), или аналогичная ей для случая $p_2 \geq p_1$, существенно упрощается — сводится к трем уравнениям относительно x, y и h , поскольку второе из уравнений (2.1) интегрируется в квадратурах. На его основании получим

$$\sin \varphi = \frac{Qx}{2Ap_1h} \quad (2.9)$$

где p_1 выражается по (2.4) или, если $p_2 \geq p_1$, по (2.6).

Необходимо отметить, что даже если считать основные соотношения между напряжениями и деформациями пригодными для сколь угодно больших деформаций, всегда будет существовать какое-то значение $Q = Q_{\max}$ характерного параметра нагрузки, при превышении которого предложенное нами решение будет непригодным, так как невозможно осуществить равновесие оболочки, оставаясь в рамках исходных предположений. Естественно предположить, что при $Q = Q_{\max}$ будет иметь место локализация деформации, образование «пузырей» и т. п., — потеря устойчивости деформации при растяжении, аналогичная образованию шейки в растягиваемом образце. Некоторые простейшие примеры определения Q_{\max} рассматривались в работах [8, 9], где, однако, не учитывалось изменение формы оболочки предшествующее локализации деформации.

Мы проиллюстрируем сказанное на примере сферической оболочки, нагруженной равномерным внутренним давлением.¹

Пусть ρ — отношение R (радиуса деформированной оболочки) к ее первоначальному радиусу R_1 . В силу симметрии

$$p_2 = p_1, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_1 = \ln \rho$$

Используя эти соотношения, на основании (1.6), (1.8), последней из формул (1.12) и уравнения (2.9), где положено $A = 1$, получим

$$h = \frac{1}{\rho^2}, \quad p_1 = (3 \ln \rho)^\mu, \quad Q = \frac{2(3 \ln \rho)^\mu}{\rho^3}$$

Пользуясь этими формулами, можно найти радиус оболочки, ее толщину и главные напряжения для любой заданной нагрузки.

Отсюда же легко находится упоминавшаяся максимальная возможная нагрузка Q_{\max} , а также соответствующие $\rho = \rho_*$ и $h = h_*$. Получим

$$Q_{\max} = 2 \left(\frac{\mu}{e} \right)^\mu, \quad \rho_* = e^{\mu/3}, \quad h_* = e^{-2\mu/3}$$

¹ Аналогичная задача, но в случае линейной зависимости между напряжениями и деформациями, рассмотрена в книге [10].

3. **Оболочки начальной цилиндрической формы.** При этом задача существенно упрощается. Ограничимся случаем, когда складчатая зона отсутствует. Очевидно, следует положить $\psi = \pi / 2$ и $\xi = A$. Удобно считать $A = 1$, тогда под R_1 будет подразумеваться радиус начального цилиндра. Деформации определяются по формулам

$$\varepsilon_1 = \ln \left(\frac{dx}{d\eta} \frac{1}{\cos \varphi} \right), \quad \varepsilon_2 = \ln x, \quad \varepsilon_3 = \ln h \quad (3.1)$$

Уравнения равновесия примут вид

$$\frac{d}{dx} (xhp_1) = p_2h, \quad \frac{d}{dx} (xhp_1 \sin \varphi) = Q(y) x \quad (3.2)$$

где $Q(y)$ выражается также, как в (2.1). Уравнение (2.2), разумеется, останется в силе. На основании (1.8) и (3.1) получаем

$$\frac{dx}{d\eta} = \frac{\cos \varphi}{xh} \quad (3.3)$$

Переходя к аргументу $\ln x$ в уравнениях для растянутой зоны, разрешенных относительно производной $dh / d\xi$, полагая для краткости записи $\ln x = \alpha$, $\ln h = \beta$, получим следующее уравнение.

При $p_1 \geq p_2$

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = - \frac{\mu + 2\alpha + \beta}{2\mu + \alpha + 2\beta} \quad (3.4)$$

При этом

$$p_1 = (-\alpha - 2\beta)^\mu, \quad p_2 = (-\alpha - 2\beta)^{\mu-1} (\alpha - \beta) \quad (3.5)$$

Замечая, что при $x = 1$, в месте прикрепления оболочки к днищу, $\varepsilon_2 = 0$ и, следовательно, $p_1 = 2p_2$, запишем решение уравнения (3.4) в виде:

$$\alpha^2 + (\beta + \mu) \alpha + (\beta + \mu)^2 = (\beta_0 + \mu)^2 \quad (3.6)$$

где $\beta_0 = \ln h_0$ — значение $\ln h$ при $x = 1$.

При $p_2 \geq p_1$

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{\mu(\alpha + 2\beta) - 3\beta + (\alpha - \beta)(2\alpha + \beta)}{\mu(\alpha + 2\beta) - 3\alpha - (\alpha - \beta)(\alpha + 2\beta)} \quad (3.7)$$

При этом

$$p_1 = -(\alpha + 2\beta)(\alpha - \beta)^{\mu-1}, \quad p_2 = (\alpha - \beta)^\mu \quad (3.8)$$

Уравнение (3.7) может быть проинтегрировано численно.

Как видно, независимо от закона изменения давления по высоте, основная система распадается, безразмерная толщина оболочки и безразмерные главные напряжения, выраженные в функции радиальной координаты, зависят только от параметра μ , характеризующего материал, и параметра h_0 , учитывающего влияние всех прочих факторов (соотношение размеров, абсолютные величины их, характеристика давления и т. д.).

Уравнения (3.4) и (3.7) совпадают с полученными в работе [4] и, следовательно, приведенные там интегральные кривые $h(x)$, построенные при $\mu = 1/3$, могут быть в этом случае непосредственно использованы, даже если $Q \neq \text{const}$.

Заметим, что если воспользоваться зависимостью (1.9), то основная система для оболочек начальной цилиндрической формы также распадается. На основании (1.10), (1.8), (1.11), (3.1) и первого из уравнений (3.2), вместо (3.4) и (3.7) получим одно уравнение, так как соотношение между p_1 и p_2 не будет играть роли

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = - \frac{\mu (\alpha + 2\beta) (2\alpha + \beta) - 3\alpha\beta + 2 (2\alpha + \beta) (\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta)}{\mu (\alpha + 2\beta)^2 + 3\alpha^2 + 2 (\alpha + 2\beta) (\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta)}$$

Это уравнение также можно проинтегрировать численно, полагая $\beta = \beta_0 = \ln h_0$ при $\alpha = 0$.

Имея кривые $h(x)$, можно получить полное решение большинства конкретных задач путем простых операций.

На основании второго из уравнений (3.2) получим

$$\sin \varphi = \frac{1}{xh p_1} \int_1^x Q(y) x dx \quad (3.9)$$

Это уравнение надлежит решать совместно с уравнением (2.2), используя формулы (3.5) или (3.8) для p_1 . Одновременно вычисляется η с помощью квадратуры

$$\eta = \int_1^x \frac{xh}{\cos \varphi} dx \quad (3.10)$$

вытекающей из (3.3).

В случае постоянного давления система (3.9) — (2.2) также распадается и y находится квадратурой. Рассмотрим случай давления, линейно зависящего от Y . Пусть

$$q(Y) = k(B - Y)$$

где k и B — заданные постоянные. Положим

$$\frac{B}{R_1} = b, \quad \frac{kR_1 B}{2KH_1} = Q_0$$

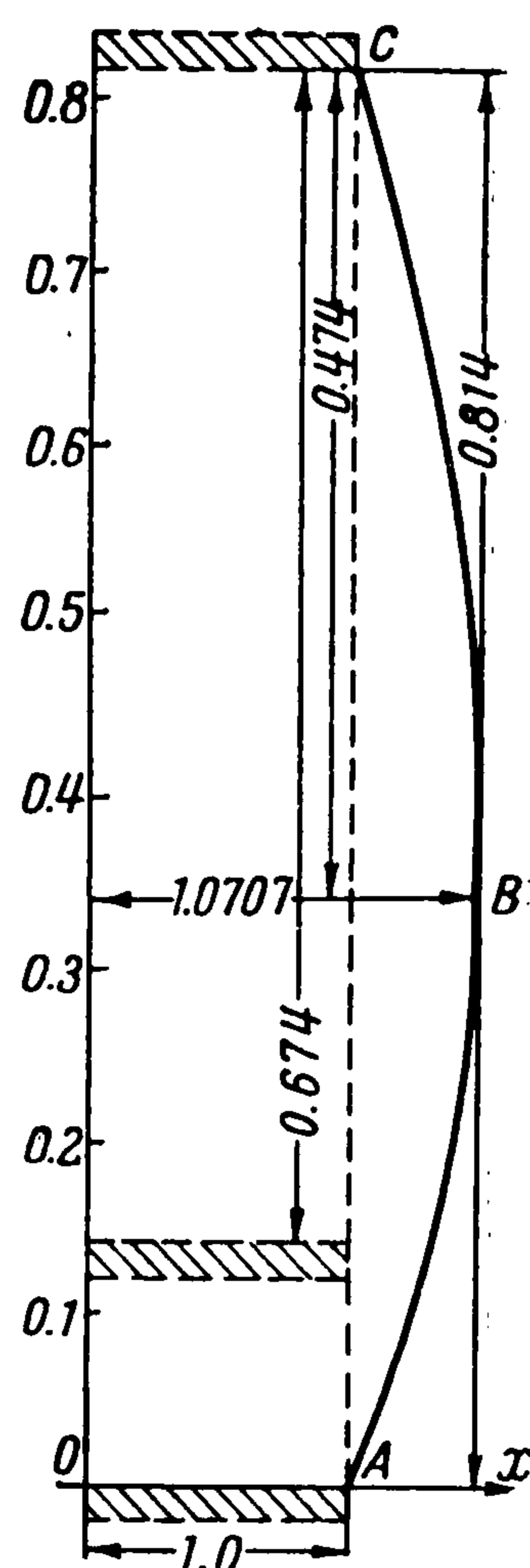
Тогда
$$Q(y) = \frac{Q_0}{b} (b - y)$$

и на основании (3.9), (2.2) и (3.10), перейдя к аргументу y , что удобнее для счета, получим

$$\sin \varphi = \frac{Q_0}{2b p_1 h} \left[x(b - y) + \frac{1}{x} \int_0^y x^2 dy \right], \quad \frac{dx}{dy} = \operatorname{ctg} \varphi, \quad \eta = \int_0^y \frac{xh}{\sin \varphi} dy \quad (3.11)$$

Система (3.11) весьма просто решается численно. Следует указать, однако, что, как и в задаче при $q = \text{const}$, параметры h_0 , b и Q_0 нельзя задавать произвольно. Для каждого типа задач должны быть предварительно найдены границы возможных значений этих параметров. В статье [4] подробно излагается метод определения таких границ.

Ниже приводятся результаты решения задачи о равновесии оболочки, закрепленной по контуру одного из днищ, нагруженной давлением, линейно меняющимся по высоте.



Фиг. 2

При выбранных $Q_0 = 1.12$ и $h_0 = 0.8$, при $\mu = 1/3$ были просчитаны случаи $b = 2$ и $b = 3$.

На фиг. 2 показана форма, которую принимает оболочка в первом случае, а также характерные размеры (отнесенные к R_1): начальная длина l_1 , окончательная длина l , радиус наибольшей параллели x_B и расстояние ее $l - y_B$ от верхнего закрепленного днища.

Для случая $b = 3$ вычислены данные:

$$l_1 = 0.561, \quad l = 0.675, \quad x_B = 1.069, \quad l - y_B = 0.375.$$

Значения безразмерных главных напряжений и толщины в точках A , B и C (фиг. 2) приведены в таблице:

Точки	$b = 2$			$b = 3$		
	p_1	p_2	h	p_1	p_2	h
A и C	0.764	0.382	0.8	0.764	0.382	0.8
B	0.784	0.559	0.760	0.783	0.554	0.761

Институт механики
АН СССР

Поступила 18 V 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Davis E. Jelding and Fracture of Medium Carbon Steel under Combined Stress, Journal of Applied Mech., 1945, № 1.
2. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел, т. 1, ИИЛ, М., 1954.
3. Алексеев С. А. Кольцеобразная упругая мембрана под действием поперечной силы, приложенной к жесткому центрально расположенному диску, Инженерный сборник АН СССР, 1951, т. X.
4. Григорьев А. С. Напряженное состояние безмоментных цилиндрических оболочек при больших деформациях, ПММ, 1957, т. XXI, вып. 6.
5. Weill N. A. and Newmark N. M. Large plastic deformations of circular membranes, Journal of Applied Mech. 1955, № 4.
6. Кеппен И. В. Большие прогибы круглой пластинки под действием равномерного распределенного давления, Научные труды МПИ, 1957, № 7—8.
7. Кеппен И. В. Конечные деформации безмоментной оболочки вращения под действием гидростатического давления, Сб. «Расчеты на прочность», Машгиз, М., 1960, вып. 6.
8. Lankford W. T. Saibeil E. Some Problems in Unstable Plastic Flow Under Biaxial Tensions. Metals Technol. August 1947.
9. Marciniak Z. Analiza Stateszności cienkościennej powłoki walcowej poddanej rozciąganiu w stanie plastycznym, Rozprawy inżynierskie CX 1959.
10. Ржаницын А. Р. Устойчивость равновесия упругих систем. ГИТТЛ. М., 1955.