

## ОБ ОТРАЖЕНИИ ЗВУКОВЫХ ВОЛН ОТ СЛОИСТЫХ ДВУХКОМПОНЕНТНЫХ СРЕД

Л. Я. Косачевский

(Донецк)

Динамика многокомпонентных сред имеет важные практические приложения при расчете грунтовых оснований под сооружениями, в сейсмологии, в вопросах звукоизоляции, при исследованиях движения пульпы, газированной нефти и т. д.

Эта теория разрабатывалась Я. И. Френкелем [1], Л. С. Лейбензоном [2], М. А. Био [3,4], Х. А. Рахматулиным [5], К. Цвиккером и К. Костеном [6] и др.

В работе [7] рассматривалось распространение упругих волн в изотропной двухкомпонентной среде, одна из компонент которой идеально упругая, другая — вязкая сжимаемая жидкость. Было показано, что в этом случае наиболее общими уравнениями движения можно считать уравнения Био.

Ниже на основе уравнений Био решается задача о распространении плоских звуковых волн в указанной двухкомпонентной среде слоистой структуры. Получены общие выражения коэффициентов отражения и прозрачности для произвольного числа слоев. Более детально рассмотрен частный случай одного слоя.

Двухкомпонентная среда далее трактуется как пористая с упругим скелетом и порами, заполненными вязкой сжимаемой жидкостью.

**§ 1. Основные уравнения.** Установленные в работе [3] соотношения между тензорами напряжений и деформаций для изотропных пористых сред могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} P_{ik} &= \lambda \theta \delta_{ik} + 2\mu u_{ik} + Q \varepsilon \delta_{ik}, & S &= Q \theta + R \varepsilon \\ u_{ik} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right), & \theta &= \operatorname{div} \mathbf{u}, & \varepsilon &= \operatorname{div} \mathbf{v} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $P_{ik}$  — тензор напряжений в упругом скелете;  $S$  — сила, действующая на жидкость, отнесенная к единице поперечного сечения пористой среды;  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $Q$  и  $R$  — модули, характеризующие упругость пористой среды;  $u_{ik}$  — тензор деформаций скелета;  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  — векторы средних смещений скелета и жидкости в данной точке среды;  $\delta_{ik}$  — символ Кронеккера, равный единице при  $i = k$  и равный нулю при  $i \neq k$ .

Уравнения движения Био имеют вид

$$\begin{aligned} \rho_{11} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \rho_{12} \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} + b \frac{\partial}{\partial t} (u_i - v_i) &= \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k}, & \rho_{11} &= (1 - m) \rho_s - \rho_{12} \\ \rho_{12} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \rho_{22} \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} + b \frac{\partial}{\partial t} (v_i - u_i) &= \frac{\partial S}{\partial x_i}, & \rho_{22} &= m \rho_f - \rho_{12} \left( b = \frac{\mu m^2}{k} \right) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь  $\rho_{12} < 0$  — коэффициент динамической связи скелета и жидкости,  $\rho_s$  — плотность скелета,  $\rho_f$  — плотность жидкости,  $m$  — пористость,  $\mu$  — коэффициент вязкости жидкости,  $k$  — коэффициент проницаемости, пропорциональный пористости и квадрату диаметра пор. Разложим

векторы смещения на безвихревые и соленоидальные составляющие

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_l + \mathbf{u}_t, & \operatorname{rot} \mathbf{u}_l &= 0, & \operatorname{div} \mathbf{u}_t &= 0 \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}_l + \mathbf{v}_t, & \operatorname{rot} \mathbf{v}_l &= 0, & \operatorname{div} \mathbf{v}_t &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Уравнения (1.2) с учетом (1.1) и (1.3) приводятся к следующей системе:

$$\begin{aligned} \rho_{11} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_l}{\partial t^2} + \rho_{12} \frac{\partial^2 \mathbf{v}_l}{\partial t^2} + b \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u}_l - \mathbf{v}_l) &= (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \mathbf{u}_l + Q \nabla^2 \mathbf{v}_l \\ \rho_{12} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_l}{\partial t^2} + \rho_{22} \frac{\partial^2 \mathbf{v}_l}{\partial t^2} + b \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{v}_l - \mathbf{u}_l) &= Q \nabla^2 \mathbf{u}_l + R \nabla^2 \mathbf{v}_l \\ \rho_{11} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_t}{\partial t^2} + \rho_{12} \frac{\partial^2 \mathbf{v}_t}{\partial t^2} + b \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u}_t - \mathbf{v}_t) &= \mu \nabla^2 \mathbf{u}_t \\ \rho_{12} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_t}{\partial t^2} + \rho_{22} \frac{\partial^2 \mathbf{v}_t}{\partial t^2} + b \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{v}_t - \mathbf{u}_t) &= 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

В случае монохроматических волн частоты  $\omega$  первые два уравнения (1.4) при помощи линейного преобразования

$$\mathbf{u}_l = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \quad \mathbf{v}_l = M_1 \mathbf{u}_1 + M_2 \mathbf{u}_2 \quad (1.5)$$

и после введения обозначений

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= \frac{\rho_{11}}{\rho}, & \gamma_{12} &= \frac{\rho_{12}}{\rho}, & \gamma_{22} &= \frac{\rho_{22}}{\rho}, & \rho &= \rho_{11} + \rho_{22} + 2\rho_{12} \\ \sigma_{11} &= \frac{\lambda + 2\mu}{H}, & \sigma_{12} &= \frac{Q}{H}, & \sigma_{22} &= \frac{R}{H}, & H &= \lambda + 2\mu + R + 2Q, & c^2 &= \frac{H}{\rho} \end{aligned} \quad (1.6)$$

приводятся к виду

$$\nabla^2 \mathbf{u}_1 + k_1^2 \mathbf{u}_1 = 0, \quad \nabla^2 \mathbf{u}_2 + k_2^2 \mathbf{u}_2 = 0 \quad \left( k_1^2 = \zeta_1 \left( \frac{\omega}{c} \right)^2, \quad k_2^2 = \zeta_2 \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \right)$$

Здесь  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$  — корни квадратного уравнения

$$\begin{aligned} (\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2) \zeta^2 - (\sigma_{11}\gamma_{22} + \sigma_{22}\gamma_{11} - 2\sigma_{12}\gamma_{12}) \zeta + \gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2 + \\ + \frac{i\beta}{\rho\omega} (\zeta - 1) = 0 \end{aligned}$$

Коэффициенты преобразования (1.5) определяются формулами

$$M_1 = \frac{-\gamma_{12} + \zeta_1 \sigma_{12} + i\gamma}{\gamma_{22} - \zeta_1 \sigma_{22} + i\gamma}, \quad M_2 = \frac{-\gamma_{12} + \zeta_2 \sigma_{12} + i\gamma}{\gamma_{22} - \zeta_2 \sigma_{22} + i\gamma}, \quad \gamma = \frac{b}{\rho\omega}$$

Уравнения (1.6) описывают распространение продольных волн первого и второго типов.

Вторые два уравнения (1.4), описывающие распространение поперечной волны, приводятся к виду

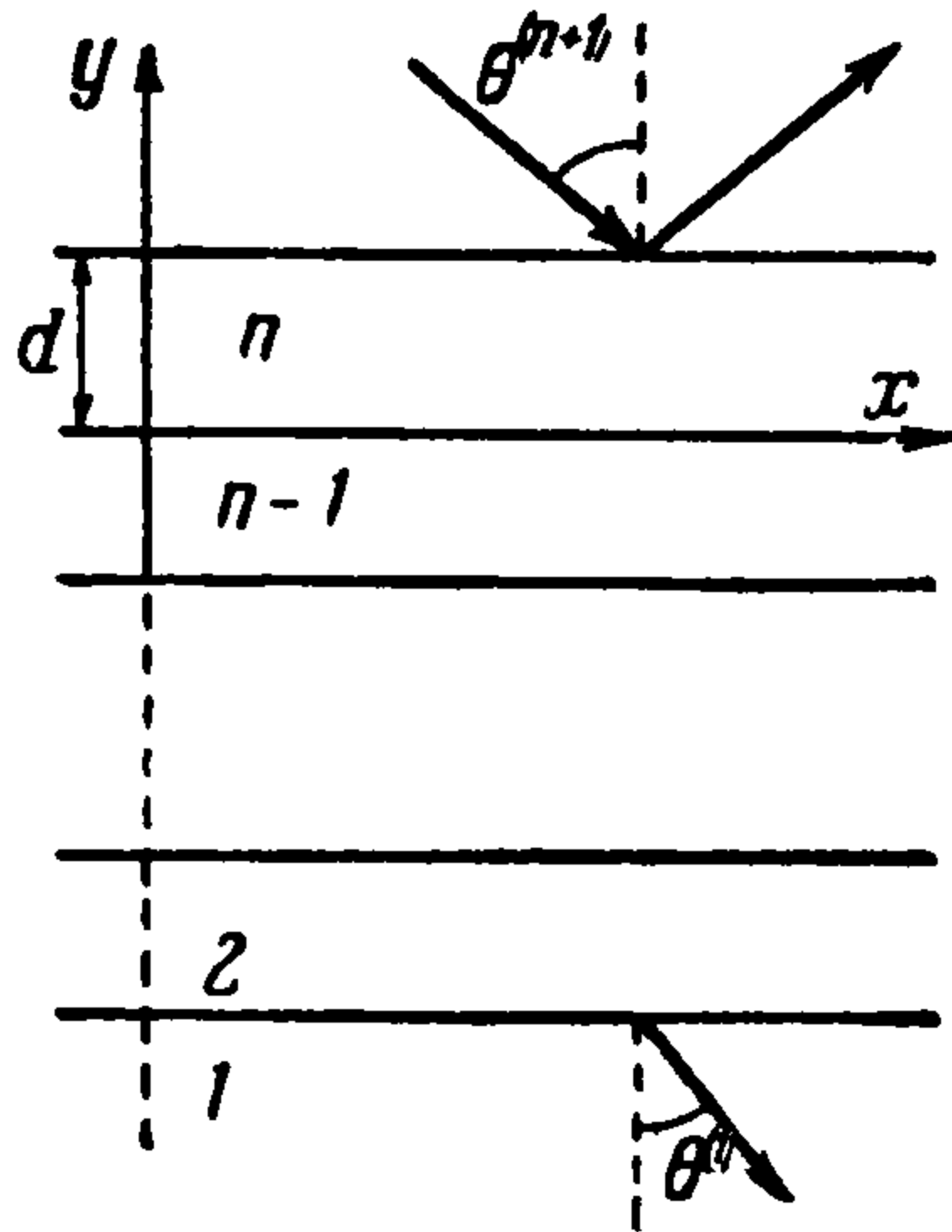
$$\begin{aligned} v_t &= M_t \mathbf{u}_t, & \nabla^2 \mathbf{u}_t^a + k_t^2 \mathbf{u}_t &= 0 \\ M_t &= \frac{-\gamma_{12} + i\gamma}{\gamma_{22} + i\gamma}, & k_t^2 &= \frac{\rho_1 + M_t \rho_2}{\mu} \omega^2, & \rho_1 &= \rho_{11} + \rho_{12} & \rho_2 &= \rho_{22} + \rho_{12} \end{aligned} \quad (1.7)$$

При условии  $\gamma \gg 1$ , соответствующем случаю малой частоты, нетрудно показать [7], что коэффициенты затухания первого типа продольной и поперечной волн пропорциональны квадрату частоты, а продольной волны второго типа — квадратному корню из частоты, т. е. при этом продольная волна второго типа практически исчезает.

Если  $\gamma \ll 1$ , эффектом вязкости можно пренебречь. Однако при этом следует иметь в виду, что  $\omega$  должна оставаться меньше частоты, при которой длина волны сравнима с размерами пор.

§ 2. Коэффициенты отражения и прозрачности для произвольного числа слоев. Метод определения коэффициентов отражения и прозрачности будет основываться на использовании рекуррентных формул, связывающих амплитуды волн в соседних слоях [8,9].

Рассмотрим произвольный слой номера  $n$ . Обозначим его толщину через  $d$  и выберем систему координат, как показано на фиг. 1.



Фиг. 1

Вследствие отражений от границ в рассматриваемом слое будет существовать система поперечных и обоих типов продольных волн, распространяющихся в сторону положительных и отрицательных  $y$ . Выражения для потенциалов продольных и поперечных волн в слое при этом можно записать в виде

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= (\varphi_1' e^{i\alpha y} + \varphi_1'' e^{-i\alpha y}) e^{i(\sigma x - \omega t)} & \alpha &= \sqrt{k_1^2 - \sigma^2} \\ \varphi_2 &= (\varphi_2' e^{i\beta y} + \varphi_2'' e^{-i\beta y}) e^{i(\sigma x - \omega t)}, & \beta &= \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} \\ \psi &= (\psi' e^{i\delta y} + \psi'' e^{-i\delta y}) e^{i(\sigma x - \omega t)}, & \delta &= \sqrt{k_t^2 - \sigma^2} \end{aligned}$$

Здесь  $\sigma$  — компонент волнового вектора по оси  $x$ , одинаковый для всех типов волн и для всех слоев.

Компоненты скорости частиц скелета  $\partial u_x / \partial t$ ,  $\partial u_y / \partial t$  и жидкости  $\partial v_x / \partial t$ ,  $\partial v_y / \partial t$  в любой точке слоя найдутся по формулам

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial u_y}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial t} = M_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + M_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + M_t \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

которые вытекают из (1.3), (1.5) и (1.7).

Компоненты тензоров напряжений в скелете  $P_{yy}$ ,  $P_{xy}$  и в жидкости  $S$  определяются из соотношений (1.1), в которых нужно положить

$$u_x = \frac{i}{\omega} \frac{\partial u_x}{\partial t}, \quad u_y = \frac{i}{\omega} \frac{\partial u_y}{\partial t}, \quad v_x = \frac{i}{\omega} \frac{\partial v_x}{\partial t}, \quad v_y = \frac{i}{\omega} \frac{\partial v_y}{\partial t}$$

Обозначим через  $G(n)$  матрицу-столбец, элементами которой сверху вниз будут значения величин

$$\frac{\partial u_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial u_y}{\partial t}, \quad P_{yy}, \quad \frac{1}{2\mu} P_{xy}, \quad \frac{1}{Q + RM_2} S, \quad j = (1 - m) \frac{\partial u_y}{\partial t} + m \frac{\partial v_y}{\partial t} \quad (2.1)$$

на верхней границе слоя  $n$  (при  $y = d$ ). Результат вычисления этих величин может быть записан в виде матричного равенства

$$G(n) = A\Phi \quad (2.2)$$

Здесь  $\Phi$  — матрица-столбец с элементами (сверху вниз);

$$\varphi_1' + \varphi_1'', \quad \varphi_1' - \varphi_1'', \quad \varphi_2' + \varphi_2'', \quad \varphi_2' - \varphi_2'', \quad \psi' - \psi'', \quad \psi' + \psi''$$

Элементы  $A$  — квадратной матрицы шестого порядка при необходимости легко могут быть выписаны.

Заменяя  $d$  в равенстве (2.2) нулем, получим значения величин (2.1) на нижней границе слоя  $n$ . Так как все эти величины при переходе через

границу остаются неизменными, то это будут одновременно их значения на верхней границе слоя  $n - 1$ . Таким образом, имеем

$$G(n-1) = A_0 \Phi, \quad \text{или} \quad \Phi = A_0^{-1} G(n-1) \quad (2.3)$$

Подставляя (2.3) в (2.2), получаем рекуррентное соотношение, связывающее значения величин (2.1) в соседних слоях:

$$G(n) = CG(n-1) \quad (2.4)$$

Здесь  $C$  будет произведением матрицы  $A$  на матрицу  $A_0^{-1}$ . Если заданы величины (2.1) на границе раздела первой и второй сред, путем последовательного применения формулы (2.4) можно найти их на границе  $n$ -го слоя с  $n + 1$ -м:

$$G(n) = \Pi G(1) \quad (2.5)$$

Здесь  $\Pi$  — произведение матриц  $C$  для всех слоев.

Пусть среды первая и  $n + 1$  жидкие.

Граничные условия на границе раздела  $n$  и  $n + 1$  сред имеют вид

$$\begin{aligned} P_{yy}^{(n)} &= -(1 - m^{(n)}) P^{(n+1)}, & S^{(n)} &= -m^{(n)} P^{(n+1)}, \\ P_{xy}^{(n)} &= 0, & j^{(n)} &= \frac{\partial v_y^{(n+1)}}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.6)$$

(верхний индекс указывает номер слоя, к которому относится данная величина). Первые два условия состоят в том, что скелет и жидкость в порах  $n$ -го слоя находятся под одинаковым внешним давлением  $P^{(n+1)}$ . Третье условие выражает отсутствие касательных напряжений, а четвертое — непрерывность потока жидкости через границу.

Выписывая согласно (2.5) уравнения для  $P_{yy}^{(n)}$ ,  $P_{xy}^{(n)}$ ,  $S^{(n)}$ ,  $j^{(n)}$ , а затем исключая из них производные  $\partial u_x^{(1)}/\partial t$ ,  $\partial u_y^{(1)}/\partial t$  и учитывая, что  $P_{xy}^{(n)} = P_{xy}^{(1)} = 0$ ,  $j^{(1)} = \partial v_y^{(1)}/\partial t$ , получим

$$\begin{aligned} P_{yy}^{(n)} &= A_1 S^{(n)} + A_2 P_{yy}^{(1)} + A_3 S^{(1)} + A_4 \frac{\partial v_y^{(1)}}{\partial t} \\ j^{(n)} &= B_1 S^{(n)} + B_2 P_{yy}^{(1)} + B_3 S^{(1)} + B_4 \frac{\partial v_y^{(1)}}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Найдем теперь коэффициенты отражения и прозрачности для всей системы слоев. Обозначим суммарную толщину всех слоев через  $H$ . Начало координат поместим на нижней границе первого слоя. Предположим, что звуковая волна падает из жидкой среды с номером  $n + 1$  под углом  $\theta^{(n+1)}$ . Выражение для суммарного звукового потенциала падающей и отраженной волн в этой среде имеет вид

$$\varphi^{(n+1)} = [\varphi' e^{i\nu(y-H)} + \varphi'' e^{-i\nu(y-H)}] e^{i(\sigma x - \omega t)}, \quad \nu = \sqrt{(k^{(n+1)})^2 - \sigma^2}$$

В жидкости по другую сторону системы слоев будет только прошедшая звуковая волна

$$\varphi^{(1)} = \varphi''' e^{i\chi y} e^{i(\sigma x - \omega t)}, \quad \chi = \sqrt{(k^{(1)})^2 - \sigma^2}$$

Пользуясь формулами

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad P = i\rho\omega\varphi$$

имеющими место для жидкой среды, и учитывая (2.6), получаем

$$\begin{aligned} P_{yy}^{(n)} &= -i(1 - m^{(n)})\rho^{(n+1)}\omega(\varphi' + \varphi''), & P_{yy}^{(1)} &= -i(1 - m^{(2)})\rho^{(1)}\omega\varphi''' \\ S^{(n)} &= -im^{(n)}\rho^{(n+1)}\omega(\varphi' + \varphi''), & S^{(1)} &= -im^{(2)}\rho^{(1)}\omega\varphi''' \\ j^{(n)} &= iv(\varphi' - \varphi''), & \partial v_y^{(1)} / \partial t &= i\chi\varphi''' \end{aligned} \quad (2.8)$$

(общий множитель  $e^{i(\alpha x - \omega t)}$  для краткости опущен).

Подставляя (2.8) в (2.7), получаем два уравнения для определения коэффициентов отражения и прозрачности. Из них находим

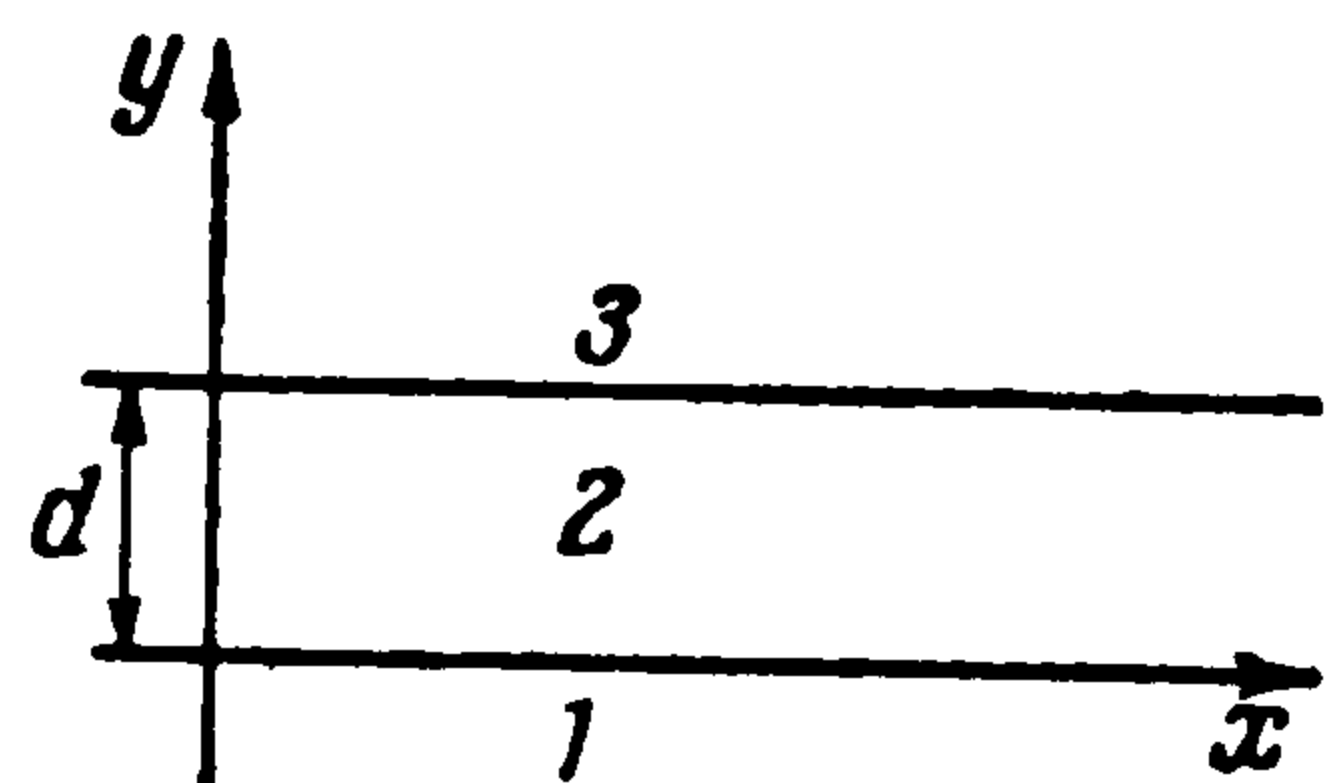
$$\begin{aligned} W &= \frac{\varphi''}{\varphi'} = \frac{Z - Z^{(n+1)}}{Z + Z^{(n+1)}} \\ D &= \frac{\rho^{(1)}\varphi'''}{\rho^{(n+1)}\varphi'} = \frac{2(1 - m^{(n)} - m^{(n)}A_1)}{[(1 - m^{(2)})A_2 + m^{(2)}A_3]Z^{(1)} - A_4} \frac{ZZ^{(1)}}{Z + Z^{(n+1)}} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z} &= -(1 - m^{(n)} - m^{(n)}A_1) \frac{[(1 - m^{(2)})B_2 + m^{(2)}B_3]Z^{(1)} - B_4}{[(1 - m^{(2)})A_2 + m^{(2)}A_3]Z^{(1)} - A_4} - m^{(n)}B_1 \\ &\left( Z^{(1)} = \frac{\rho^{(1)}\omega}{\chi}, \quad Z^{(n+1)} = \frac{\rho^{(n+1)}\omega}{\nu} \right) \end{aligned}$$

Величину  $Z$  можно трактовать как входной импеданс системы слоев,  $Z^{(1)}$  и  $Z^{(n+1)}$  — импедансы жидкости первой и  $n + 1$  сред соответственно.

### § 3. Отражение от пористого слоя. Рассмотрим теперь отражение звуковой волны (фиг. 2)



Фиг. 2

от одного пористого слоя 2, разделяющего две жидкие среды 1 и 3. Как и выше, предполагаем, что волна падает на слой со стороны верхней среды. Коэффициенты отражения и прозрачности могут быть найдены из общих формул (2.9), в которых следует положить  $n = 2$ .

Матрица  $\Pi$  при этом совпадает с матрицей  $C$ . Ограничиваясь случаем нормального падения волны, находим коэффициенты  $A_1, \dots, A_4, B_1, \dots, B_4$

$$A_1 = \frac{1}{N(Q + RM_2)} (K_1\Gamma_2 r \sin P_1 - K_2\Gamma_1 \sin P_2)$$

$$A_2 = \frac{1}{N} (L_{12}\Gamma_2 r \sin P_1 \cos P_2 - \Gamma_1 \sin P_2 \cos P_1)$$

$$A_3 = -\frac{1}{N(Q + RM_2)} (K_1\Gamma_2 r \sin P_1 \cos P_1 - K_2\Gamma_1 \sin P_2 \cos P_1)$$

$$A_4 = \frac{i}{Nc_1} K_{12} \sin P_1 \sin P_2, \quad B_1 = \frac{ic_2\Gamma_1\Gamma_2}{N(Q + RM_2)} (\cos P_1 - \cos P_2)$$

$$B_2 = \frac{ic_1}{NK_{12}} [(\Gamma_1^2 + L_{12}^2\Gamma_2^2 r^2) \sin P_1 \sin P_2 - 2rL_{12}\Gamma_1\Gamma_2 (1 - \cos P_1 \cos P_2)]$$

$$\begin{aligned} B_3 &= -\frac{ic_1}{N(Q + RM_2)K_{12}} [(K_2\Gamma_1^2 + K_1\Gamma_2^2 L_{12}^2 r^2) \sin P_1 \sin P_2 - \\ &\quad - r\Gamma_1\Gamma_2 (K_1 + L_{12}K_2) (1 - \cos P_1 \cos P_2)] \end{aligned}$$

$$B_4 = A_2, \quad N = L_{12}\Gamma_2 r \sin P_1 - \Gamma_1 \sin P_2 \quad r = \frac{c_2}{c_1}$$

$$K_1 = \lambda + 2\mu + QM_1, \quad K_2 = \lambda + 2\mu + QM_2, \quad K_{12} = K_1 - L_{12}K_2$$

$$\Gamma_1 = 1 - m + mM_1, \quad \Gamma_2 = 1 - m + mM_2, \quad P_1 = k_1 d, \quad P_2 = k_2 d$$

Здесь  $c_1$  и  $c_2$  — скорости продольных волн первого и второго типов.

Входной импеданс слоя и коэффициент прозрачности принимают вид

$$Z = \frac{\vartheta}{\theta}, \quad D = \frac{1}{\vartheta} \left[ \frac{1}{Z_1} \sin P_2 + \frac{1}{Z_2} \sin P_2 \right] \frac{2Z}{Z + Z^{(3)}}$$

$$\vartheta = \frac{1}{Z_1} \sin P_2 \cos P_1 + \frac{1}{Z_2} \sin P_1 \cos P_2 + \frac{i}{Z^{(1)}} \sin P_1 \sin P_2$$

$$\theta = i \left( \frac{1}{Z_1^2} + \frac{1}{Z_2^2} \right) \sin P_1 \sin P_2 + \frac{2i}{Z_1 Z_2} (1 - \cos P_1 \cos P_2) +$$

$$+ \frac{1}{Z^{(1)}} \left( \frac{1}{Z_1} \sin P_2 \cos P_1 + \frac{1}{Z_2} \sin P_1 \cos P_2 \right) \quad (3.1)$$

где

$$\frac{1}{Z_1} = \frac{\Gamma_1 c_1}{K_{12}} \left( 1 - m - \frac{m K_2}{Q + R M_2} \right), \quad \frac{1}{Z_2} = \frac{\Gamma_2 c_2}{K_{12}} \left[ - (1 - m) L_{12} + \frac{m K_1}{Q + R M_2} \right]$$

Величины  $Z_1$  и  $Z_2$  можно рассматривать как «эффективные» импедансы скелета и жидкости в порах. Если пренебречь вязкостью жидкости ( $\gamma = 0$ ) и коэффициентами связи ( $\gamma_{12} = 0, \sigma_{12} = 0$ ), получим

$$Z_1 = \frac{\rho_s c_{10}}{1 - m}, \quad Z_2 = \frac{\rho_f c_{20}}{m}$$

( $c_{10}$  и  $c_{20}$  — скорости звука в скелете и жидкости), т. е.  $Z_1$  и  $Z_2$  переходят соответственно в волновые импедансы упругой и жидкой компонент при несвязанных колебаниях. Выражение для импеданса границы раздела жидкости и полупространства, заполненного пористой средой, можно получить из (3.1) при помощи предельного перехода, соответствующего неограниченному увеличению толщины слоя в отрицательном направлении оси  $y$  ( $d \rightarrow -\infty$ ). Так как

$$\begin{aligned} \sin k_1 d &= \sin(a_1 d) \operatorname{ch}(b_1 d) + i \cos(a_1 d) \operatorname{sh}(b_1 d), \\ \cos k_1 d &= \cos(a_1 d) \operatorname{ch}(b_1 d) - i \sin(a_1 d) \operatorname{sh}(b_1 d), \end{aligned} \quad k_1 = a_1 + i b_1$$

то  $\sin P_1$  и  $\cos P_1$  при  $d \rightarrow -\infty$  неограниченно возрастают, причем выполняется равенство  $\cos P_1 = i \sin P_1$ , и аналогично  $\cos P_2 = i \sin P_2$ . Формула (3.1) при этом дает

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \quad (3.2)$$

т. е. импеданс границы полупространства, заполненного пористой средой, будет результатом «параллельного» соединения «эффективных» импедансов упругой и жидкой компонент среды.

Рассмотрим случай полного отражения звуковой волны от пористого слоя при нормальном падении. Этот случай имеет место при условии  $D = 0$ , которое согласно (3.1) приводит к равенству

$$Z_1 \sin P_1 + Z_2 \sin P_2 = 0 \quad (3.3)$$

Пренебрегая вязкостью жидкости в порах и решая это уравнение для значений параметров среды, приведенных в работе [4]

$$\sigma_{11} = 0.610, \quad \sigma_{22} = 0.305, \quad \sigma_{12} = 0.043, \quad \gamma_{11} = 0.500, \quad \gamma_{22} = 0.500, \quad \gamma_{12} = 0 \quad (3.4)$$

получим следующие значения толщин звуконепроницаемых слоев различной пористости:

$m = 0.5$	0.6	0.7	0.8
$d = 0.40\lambda_1$	$0.43\lambda_1$	$0.46\lambda_1$	$0.48\lambda_1$

Здесь  $\lambda_1$  — длина продольной волны первого типа.

Пусть теперь по обе стороны слоя находится одна и та же жидкость ( $Z^{(2)} = Z^{(3)}$ ). Из условия  $W = 0$  получаем уравнение для определения толщины полностью «прозрачного» слоя  $Z - Z^{(1)} = 0$ , которое с учетом (3.1) приводится к виду

$$\left[ \frac{1}{Z_1^2} + \frac{1}{Z_2^2} - \frac{1}{(Z^{(1)})^2} \right] \sin P_1 \sin P_2 + \frac{2}{Z_1 Z_2} (1 - \cos P_1 \cos P_2) = 0 \quad (3.5)$$

Если  $Z^{(1)}$  удовлетворяет равенству

$$\frac{1}{Z^{(1)}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$$

уравнение (3.5) дает  $\cos(P_2 - P_1) = 1$ , следовательно

$$d = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

где  $\lambda_2$  — длина продольной волны второго типа. Для значений параметров (3.4) будем иметь  $d = 2.3 \lambda_1 n$ . Нетрудно проверить, что коэффициенты отражения и прозрачности удовлетворяют очевидному равенству

$$|W|^2 + |D|^2 = 1$$

выражающему закон сохранения энергии. Если устремить к нулю пористость слоя и учесть, что при этом  $Z_2 \rightarrow \infty$ , получим на основании (3.1)

$$W = \frac{(Z^{(1)} - Z^{(3)}) Z_1 + i (Z_1^2 - Z^{(1)} Z^{(3)}) \operatorname{tg} P_1}{(Z^{(1)} + Z^{(3)}) Z_1 + i (Z_1^2 + Z^{(1)} Z^{(3)}) \operatorname{tg} P_1}, \quad Z = \frac{Z^{(1)} + i Z_1 \operatorname{tg} P_1}{Z_1 + i Z^{(1)} \operatorname{tg} P_1} Z_1$$

$$D = \frac{2Z^{(1)} Z_1 \sec P_1}{(Z^{(1)} + Z^{(3)}) Z_1 + i (Z_1^2 + Z^{(1)} Z^{(3)}) \operatorname{tg} P_1}$$

что совпадает с известным результатом для случая нормального падения волны на сплошной упругий слой [9].

Уравнение (3.5) в этом предельном случае принимает вид

$$\sin P_1 = 0$$

Отсюда толщина «прозрачного» однокомпонентного слоя

$$d = \frac{1}{2} \lambda_1 n$$

т. е. равна целому числу полуволн.

Автор благодарит В. Л. Германа за предложение заняться данными вопросами и внимание к работе.

Поступила 3 IV 1961

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Френкель Я. И. К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве. Изв. АН СССР, 1944, серия геогр. и геофиз. т. VIII, № 4.
2. Лейбензон Л. С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. Гостехиздат, 1947.
3. Био М. А. Теория упругости и консолидации анизотропной пористой среды. Сб. пер. и обз. иностр. период. лит. Механика, 1956, № 1.
4. Вiot М. А. Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid — Saturated Porous Solid. J. Acoust. Soc. Am., 1956, 28, № 2.
5. Рахматулин Х. А. Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред. ПММ, 1956, т. XX, вып. 2.
6. Цвиккер К. и Костен К. Звукопоглощающие материалы. ИИЛ, 1952.
7. Косачевский Л. Я. О распространении упругих волн в двухкомпонентных средах. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 6.
8. Thompson W. T. Transmission of elastic waves through a stratified solid material. J. Appl. Phys., 1950, 21, № 2.
9. Бреховский Л. М. Волны в слоистых средах. Изд-во АН СССР, 1957.