Прикладная математика и механика. Том XXV, 1961
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА

Н. Н. Кочина

(Москва)

Исследование периодических решений уравнений движения вязкой жидкости представляет большой интерес. Подобные решения в приближении Озеена изучались в работе Лина [6].

Дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} + v\frac{\partial v}{\partial x} = \mu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \tag{0.1}$$

было впервые введено Бюргерсом в качестве простейшей модели для уравнений движения вязкой жидкости. В статье [1] найдены некоторые частные решения этого уравнения. В работах [2-3] исследованы общие свойства уравнения (0.1), показано, что его можно при помощи некоторой подстановки свести к уравнению теплопроводности и дано доказательство существования и единственности решения задачи с начальными данными для этого уравнения.

Ниже рассматриваются периодические по времени решения нелинейного дифференциального уравнения в частных производных (0.1) (с периодом T).

1. Уравнение (0.1) можно привести к виду

$$\frac{\partial w}{\partial t} + w\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \qquad \left(\tau = \frac{T}{2\pi}t,\ v = \sqrt{\frac{2\pi\mu}{T}}w,\ x = \sqrt{\frac{\mu T}{2\pi}}y\right) \tag{1.1}$$

Задача ставится следующим образом: найти периодическое решение уравнения (1.1) в верхней полуплоскости $y > 0$, если заданы значение функции w на оси $y = 0$ как периодическая функция времени и значение w на бесконечности, равное некоторой неположительной константе

$$w(0,\ t) = \psi(t), \qquad \lim_{y\to\infty} w(y,\ t) = w_\infty \leqslant 0 \tag{1.2}$$

Функцию $\psi(t)$ будем предполагать непрерывной, разложимой в ряд Фурье с коэффициентами порядка $1/k^r$ $(r \geqslant 2)$

$$\psi(t) = \frac{U_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(U_k \cos kt + V_k \sin kt) \tag{1.3}$$

При помощи подстановки

$$w = -\frac{2}{u}\frac{\partial u}{\partial y} \tag{1.4}$$

уравнение (1.1) сводится к уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{1.5}$$

Таким образом, нужно отыскать такое решение уравнения теплопроводности (1.5), удовлетворяющее условию

$$-2\frac{\partial u}{\partial y}(0,\ t) = u(0,\ t)\,\psi(t) \tag{1.6}$$

чтобы функция $w(y,\ t)$, определенная формулой (1.4), была периодической с периодом 2π. Потребуем для определенности, чтобы функция $u(y,\ t)$ для всех $y \geqslant 0$ была существенно положительна.

Из условия периодичности функции $w(y, t)$, пользуясь соотношениями (1.4) и (1.5), для функции $u(y, t)$ получим функциональное уравнение (ζ — вещественная постоянная)

$$u(y, t+2\pi) = \exp(-2\pi\zeta)\, u(y, t) \tag{1.7}$$

Решение функционального уравнения (1.7) имеет вид [4]

$$u(y, t) = \exp(-\zeta t)\, \omega(y, t) \tag{1.8}$$

Здесь $\omega(y, t)$ — периодическая функция времени с периодом 2π.

2. Выпишем решение уравнения теплопроводности (1.5) вида (1.8)

$$u(y, t) = \exp(-\zeta t)\, \{f(y, \zeta) + \sum_{k=1}^{\infty} \exp \rho_k(\zeta)\, y\, [A_k \cos(kt - \omega_k(\zeta)\, y) + B_k \sin(kt - \omega_k(\zeta)\, y)] \tag{2.1}$$

$$\rho_k(\zeta) = -\frac{k}{\sqrt{2(\sqrt{k^2+\zeta^2}+\zeta)}}, \qquad \omega_k(\zeta) = \sqrt{\frac{\sqrt{k^2+\zeta^2}+\zeta}{2}}$$

$$f(y, \zeta) = \begin{cases} \frac{1}{2} A_0 \cos \sqrt{\zeta}\, y + \frac{1}{2} B_0 \sin \sqrt{\zeta}\, y / \sqrt{\zeta} & \text{при } \zeta > 0 \\ \frac{1}{2} A_0 + \frac{1}{2} B_0 y & \text{при } \zeta = 0 \\ \frac{1}{2} A_0 \operatorname{ch} \sqrt{-\zeta}\, y + \frac{1}{2} B_0 \operatorname{sh} \sqrt{-\zeta}\, y / \sqrt{-\zeta} & \text{при } \zeta < 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

Из формул (2.1) и (2.2) ясно, что величины A_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ и B_k $(k = 1, 2, \ldots)$ — коэффициенты разложения Фурье функции $\omega(0, t) = u(0, t) \exp(\zeta t)$. Введем теперь величины a_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ и b_k $(k = 1, 2, \ldots)$, удовлетворяющие равенствам

$$a_0 = B_0, \qquad A_k = -\sigma_k a_k + \tau_k b_k, \qquad B_k = -\tau_k a_k - \sigma_k b_k \qquad (k=1, 2, \ldots) \tag{2.3}$$

$$\sigma_k = \left(\frac{k^2}{2(k^2+\zeta^2)\,[\sqrt{k^2+\zeta^2}+\zeta]}\right)^{1/2}, \qquad \tau_k = \left(\frac{\sqrt{k^2+\zeta^2}+\zeta}{2(k^2+\zeta^2)}\right)^{1/2} \tag{2.4}$$

Дифференцируя (2.1) по y в обозначениях (2.2) и (2.4), получим

$$\frac{\partial u(y, t)}{\partial y} = \exp(-\zeta t) \left\{\frac{\partial f(y, \zeta)}{\partial y} + \sum_{k=1}^{\infty} \exp \rho_k(\zeta)\, y\, [a_k \cos(kt - \omega_k(\zeta)\, y) + b_k \sin(kt - \omega_k(\zeta)\, y)]\right\} \tag{2.5}$$

Формулы (2.5) и (2.2) показывают, что a_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ и b_k $(k = 1, 2, \ldots)$ — коэффициенты Фурье функции $\partial\omega(0, t) / \partial y$.

Теперь можно выписать в явном виде выражение для функции $w(y, t)$, пользуясь формулами (1.4), (2.1) и (2.5)

$$w(y, t) = -2\, \frac{\dfrac{\partial f}{\partial y} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \exp \rho_k(\zeta)\, y\, [a_k \cos(kt - \omega_k(\zeta)\, y) + b_k \sin(kt - \omega_k(\zeta)\, y)]}{f + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \exp \rho_k(\zeta)\, y\, [A_k \cos(kt - \omega_k(\zeta)\, y) + B_k \sin(kt - \omega_k(\zeta)\, y)]} \tag{2.6}$$

Покажем теперь, исходя из формулы (2.6), что можно удовлетворить условию на бесконечности (1.2). Устремляя y к бесконечности, имеем

$$\lim_{y\to\infty} w(y, t) = -2 \lim_{y\to\infty} \frac{\partial \ln f(y, \zeta)}{\partial y} \tag{2.7}$$

где

$$
-\frac{2\partial \ln f(y,\zeta)}{\partial y} = \begin{cases} 2\sqrt{\zeta}\,\mathrm{tg}\,\{\sqrt{\zeta}\,y - \mathrm{arcctg}\,\sqrt{\zeta}\,(A_0/B_0)\} & \text{при } \zeta > 0 \\ -2B_0/(A_0 + B_0 y) & \text{при } \zeta = 0 \\ -2\sqrt{-\zeta}\,\dfrac{A_0\sqrt{-\zeta} + B_0 \,\mathrm{cth}\,\sqrt{-\zeta}\,y}{B_0 + A_0\sqrt{-\zeta}\,\mathrm{cth}\,\sqrt{-\zeta}\,y} & \text{при } \zeta < 0 \end{cases} \qquad (2.8)
$$

Ясно, что выражение (2.8) дает стационарное решение уравнения (1.1), или, что то же самое, решение w уравнения

$$
w\frac{dw}{dy} = \frac{d^2w}{dy^2} \qquad (2.9)
$$

Устремляя в формулах (2.8) y к бесконечности, видим, что при $\zeta > 0$ предела $w(y, t)$ не существует, а при $\zeta \leqslant 0$ этот предел равен

$$
w_\infty = -2\sqrt{-\zeta} \qquad (2.10)
$$

Таким образом, для каждого заданного $w_\infty \leqslant 0$ величина ζ, входящая в решение (2.6), определяется следующей формулой:

$$
\zeta = -\tfrac{1}{4}w_\infty{}^2 \qquad (2.11)
$$

Остается определить константы a_k и b_k. Приравнивая коэффициенты Фурье левой и правой частей выражения (1.6) (используя при этом формулы (2.1) и (2.5) при $y = 0$), получим в предположении, что величина A_0 произвольна, для a_k ($k = 0, 1, 2, \ldots$) и b_k ($k = 1, 2, \ldots$) бесконечную систему линейных уравнений (из вида (2.6) функции $w(y, t)$ ясно, что все эти константы определяются с точностью до множителя $1/A_0$)

$$
a_k = \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n^{(k)}a_n + \beta_n^{(k)}b_n) - \tfrac{1}{4}A_0U_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (2.12)
$$

$$
b_k = \sum_{n=1}^{\infty}(\gamma_n^{(k)}a_n + \delta_n^{(k)}b_n) - \tfrac{1}{4}A_0V_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (2.13)
$$

где введены следующие обозначения: (2.14)

$$
\alpha_n^{(k)} = \begin{cases} {}^1/_4\sigma_n(U_{n+k} + U_{k-n}) + {}^1/_4\tau_n(V_{n+k} - V_{k-n}) & (n < k) \\ {}^1/_4\sigma_n(U_{n+k} + U_{n-k}) + {}^1/_4\tau_n(V_{n+k} + V_{n-k}) & (n \geqslant k) \end{cases}
$$

$$
\beta_n^{(k)} = \begin{cases} -{}^1/_4\tau_n(U_{n+k} + U_{k-n}) + {}^1/_4\sigma_n(V_{n+k} - V_{k-n}) & (n < k) \\ -{}^1/_4\tau_n(U_{n+k} + U_{n-k}) + {}^1/_4\sigma_n(V_{n+k} + V_{n-k}) & (n \geqslant k) \end{cases}
$$

$$
\gamma_n^{(k)} = \begin{cases} {}^1/_4\sigma_n(V_{n+k} + V_{k-n}) - {}^1/_4\tau_n(U_{n+k} - U_{k-n}) & (n < k) \\ {}^1/_4\sigma_n(V_{n+k} - V_{n-k}) - {}^1/_4\tau_n(U_{n+k} - U_{n-k}) & (n \geqslant k) \end{cases}
$$

$$
\delta_n^{(k)} = \begin{cases} -{}^1/_4\tau_n(V_{n+k} + V_{k-n}) - {}^1/_4\sigma_n(U_{n+k} - U_{k-n}) & (n < k) \\ -{}^1/_4\tau_n(V_{n+k} - V_{n-k}) - {}^1/_4\sigma_n(U_{n+k} - U_{n-k}) & (n \geqslant k) \end{cases}
$$

После того, как постоянные a_k, b_k ($k = 1, 2, \ldots$) будут найдены, константа a_0 определится по формуле

$$
a_0 = -\frac{A_0U_0}{4} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\{a_k[-\sigma_kU_k - \tau_kV_k] + b_k[\tau_kU_k - \sigma_kV_k]\} \qquad (2.15)
$$

Бесконечная система линейных уравнений (2.12) — (2.13) будет вполне регулярной [5], если для всех $k = 1, 2, \ldots$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{|\alpha_n^{(k)}| + |\beta_n^{(k)}|\} \leqslant 1 - \theta, \sum_{n=1}^{\infty} \{|\gamma_n^{(k)}| + |\delta_n^{(k)}|\} \leqslant 1 - \theta \qquad (0 < \theta < 1) \tag{2.16}$$

Из формул (2.4) легко видеть, что для всех k имеет место неравенство

$$|\tau_k| + |\sigma_k| = \tau_k + \sigma_k \leqslant \sqrt{2/k} \tag{2.17}$$

В силу (2.14) и (2.17) условия (2.16) удовлетворены, если ряды

$$\frac{|U_0|}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} |U_k| = U, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |V_k| = V \tag{2.18}$$

сходятся, причем выполнено неравенство

$$U + V \leqslant \sqrt{2}\,(1 - \theta) \tag{2.19}$$

Будем предполагать, что для системы уравнений (2.12) — (2.13) условие (2.19) удовлетворяется. Тогда система (2.12) — (2.13) будет вполне регулярной, и для того, чтобы она имела единственное ограниченное решение [5] (главное решение, т. е. решение, найденное методом последовательных приближений при нулевых или любых, ограниченных в совокупности, начальных условиях), достаточно ограниченности величин $-A_0U_k / 4$, $-A_0V_k / 4$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. Но в силу формулы (1.3) эти величины будут коэффициентами Фурье функции $-A_0\psi(t) / 4$ откуда и следует их ограниченность.

Следовательно, при выполнении условия (2.19) из системы (2.12) — (2.13) можно найти единственным образом систему величин a_k, b_k, ограниченных некоторой константой K. Остается показать, что эти величины могут быть коэффициентами Фурье некоторой функции и выяснить, при каких условиях функция $u(y, t)$ для всех значений $y \geqslant 0$ и $t \geqslant 0$ остается положительной.

3. Будем решать систему уравнений (2.12) — (2.13) методом последовательных приближений. Считаем, что m-ое приближение $a_k^{(m)}$, $b_k^{(m)}$ получается подстановкой в правые части уравнений (2.12) — (2.13) $m-1$-го приближения

$$a_k^{(m)} = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n^{(k)} a_n^{(m-1)} + \beta_n^{(k)} b_n^{(m-1)}) - \frac{1}{4} A_0 U_k \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{3.1}$$

$$b_k^{(m)} = \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n^{(k)} a_n^{(m-1)} + \delta_n^{(k)} b_n^{(m-1)}) - \frac{1}{4} A_0 V_k \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{3.2}$$

За нулевое приближение принимаем

$$a_k^{(0)} = b_k^{(0)} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{3.3}$$

В качестве первого приближения из формул (3.1), (3.2) и (3.3) находим

$$a_k^{(1)} = -\frac{1}{4} A_0 U_k, \qquad b_k^{(1)} = -\frac{1}{4} A_0 V_k \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{3.4}$$

Будем считать, что коэффициенты Фурье функции $\psi(t)$ удовлетворяют соотношениям (e и f — постоянные)

$$|U_n| \leqslant e / n^r, \qquad |V_n| \leqslant f / n^r \qquad (r \geqslant 2) \tag{3.5}$$

Пользуясь формулами (2.4), (2.14), (3.1) — (3.5), можно показать, что, если выполнено условие

$$(1 + 2^r)(E + F) + (2 + 2^r)(U + V) < 2 \left(E = e \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}, \ F = f \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r} \right) \quad (3.6)$$

коэффициенты a_n и b_n удовлетворяют неравенствам

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{4} A_0 |U_n| + \Sigma, \qquad |b_n| \leqslant \frac{1}{4} A_0 |V_n| + \Sigma$$

$$\Sigma = \frac{A_0}{8} \frac{[(1+2^r)(E+F) + (2+2^r)(U+V)]\,[e+f]}{\{2-(1+2^r)(E+F)-(2+2^r)(U+V)\}\, n^r} \quad (3.7)$$

и в силу этого могут быть коэффициентами Фурье некоторой функции.

4. Выясним теперь, при каких условиях функция $u(y, t)$ будет положительной для всех неотрицательных значений y и t. Из формул (2.1) и (2.2) видно, что $u(y, t) > 0$, если при всех $y \geqslant 0$

$$f(y, \zeta) > \sum_{k=1}^{\infty} [|A_k| + |B_k|] \quad (4.1)$$

Пользуясь (2.2), можно убедиться, что при $\zeta > 0$ неравенство (4.1) не может выполняться, при $\zeta = 0$ оно имеет место, если $A_0 > 0$, $B_0 \geqslant 0$

$$\frac{A_0}{2} > \sum_{k=1}^{\infty} [|A_k| + |B_k|] \quad (4.2)$$

а при $\zeta < 0$, если $A_0 > 0$, причем либо $B_0 \geqslant 0$ и выполнено (4.2), либо имеют место неравенства

$$B_0 < 0, \qquad \frac{A_0}{2}\left[1 + \frac{1}{\zeta}\left(\frac{B_0}{A_0}\right)^2\right] > \sum_{k=1}^{\infty} [|A_k| + |B_k|] \quad (4.3)$$

Ясно, что, если $B_0 \geqslant 0$, то, так как $u(0, t) > 0$, на заданную функцию $\psi(t)$ должно быть наложено условие

$$\int_0^{2\pi} \psi(t)\, u(0, t)\, dt \leqslant 0 \quad (4.4)$$

Таким образом, в этом случае периодическая функция $\psi(t)$ должна быть либо отрицательной, либо менять знак на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ хотя бы один раз, притом так, чтобы выполнялось неравенство (4.4).

Легко видеть, что, если к левой части уравнения (1.1) добавлен член $c\, \partial w / \partial y$ (c—произвольная константа), то решение $w + c$ этого уравнения с условиями (1.2), причем $w_\infty \leqslant -c$, имеет вид (2.6), где $\zeta = -(c + w_\infty)^2/4$, а в (2.12) — (2.15) нужно заменить U_0 на $U_0 + 2c$.

5. Рассмотрим теперь обратную задачу: найти решение $w(y, t)$ уравнения (1.1), если при $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ задана функция

$$\varphi(t) = \exp(\zeta t) \frac{\partial u(0, t)}{\partial y} \quad (5.1)$$

где $u(y, t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности (1.5) и, кроме того, задано значение функции $w(y, t)$ на бесконечности (1.2). Соотношения (5.1) и (1.8) показывают, что $\varphi(t) = \partial \omega(0, t) / \partial y$, константу ζ определяем по формуле (2.11).

Из формул (1.7) и (5.1) ясно, что функция $\varphi(t)$ — периодическая с периодом 2π. Разложим ее в ряд Фурье

$$\varphi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \tag{5.2}$$

Пользуясь формулами (2.3) — (2.5), (2.1) и (1.4), находим $w(y, t)$ — решение уравнения (1.1). При этом $u(y, t)$ сохраняет знак, если $\zeta \leqslant 0$. Для всех $y \geqslant 0$ и $t \geqslant 0$ $u(y, t) > 0$, если произвольная константа $A_0 > 0$, и либо $a_0 = B_0 \geqslant 0$, причем имеет место неравенство (4.2), либо при $\zeta < 0$ выполняется условие (4.3). Для всех $y \geqslant 0$ и $t \geqslant 0$ $u(y, t) < 0$, если $A_0 < 0$, и либо $a_0 = B_0 \leqslant 0$, причем

$$\frac{A_0}{2} < -\sum_{k=1}^{\infty} [|A_k| + |B_k|] \tag{5.3}$$

либо $a_0 > 0$ и

$$\frac{A_0}{2}\left[1 - \frac{1}{\zeta}\left(\frac{a_0}{A_0}\right)^2\right] < -\sum_{k=1}^{\infty} [|A_k| + |B_k|] \tag{5.4}$$

Значение $\psi(t)$ функции $w(y, t)$ на оси $y = 0$ дается формулой (1.2). Коэффициенты разложения функции $\psi(t)$ в ряд Фурье (1.3) можно найти, приравнивая коэффициенты Фурье левой и правой частей формулы (1.6). При этом, как указывалось выше, считаем константу A_0 произвольной. Для нахождения величин U_k, V_k ($k = 0, 1, 2, \ldots$) получаем бесконечную систему линейных уравнений

$$U_k = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_n^{(k)} U_n + \mu_n^{(k)} V_n) - \frac{4}{A_0} a_k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{5.5}$$

$$V_k = \sum_{n=0}^{\infty} (\xi_n^{(k)} U_n + \eta_n^{(k)} V_n) - \frac{4}{A_0} b_k \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{5.6}$$

Здесь

$$\lambda_n^{(k)} = \begin{cases} A_0^{-1} [\sigma_{k+n} a_{k+n} - \tau_{k+n} b_{k+n} + \sigma_{k-n} a_{k-n} - \tau_{k-n} b_{k-n}] & (n < k) \\ A_0^{-1} [\sigma_{k+n} a_{k+n} - \tau_{k+n} b_{k+n} + \sigma_{n-k} a_{n-k} - \tau_{n-k} b_{n-k}] & (n \geqslant k) \end{cases} \tag{5,7}$$

$$\mu_n^{(k)} = \begin{cases} A_0^{-1} [\tau_{k+n} a_{k+n} + \sigma_{k+n} b_{k+n} - \tau_{k-n} a_{k-n} - \sigma_{k-n} b_{k-n}] & (n < k) \\ A_0^{-1} [\tau_{k+n} a_{k+n} + \sigma_{k+n} b_{k+n} + \tau_{n-k} a_{n-k} + \sigma_{n-k} b_{n-k}] & (n \geqslant k) \end{cases}$$

$$\xi_n^{(k)} = \begin{cases} A_0^{-1} [\tau_{n+k} a_{n+k} + \sigma_{n+k} b_{n+k} + \tau_{k-n} a_{k-n} + \sigma_{k-n} b_{k-n}] & (n < k) \\ A_0^{-1} [\tau_{n+k} a_{n+k} + \sigma_{n+k} b_{n+k} - \tau_{n-k} a_{n-k} - \sigma_{n-k} b_{n-k}] & (n \geqslant k) \end{cases}$$

$$\eta_n^{(k)} = \begin{cases} A_0^{-1} [-\sigma_{n+k} a_{n+k} + \tau_{n+k} b_{n+k} + \sigma_{k-n} a_{k-n} - \tau_{k-n} b_{k-n}] & (n < k) \\ A_0^{-1} [-\sigma_{n+k} a_{n+k} + \tau_{n+k} b_{n+k} + \sigma_{n-k} a_{n-k} - \tau_{n-k} b_{n-k}] & (n \geqslant k) \end{cases}$$

Аналогично тому, как это было сделано в п. 2, можно показать, что система (5.5) — (5.6) будет вполне регулярной, если ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k|}{\sqrt{k}} = C, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|b_k|}{\sqrt{k}} = D \tag{5.8}$$

сходятся, причем выполнено неравенство

$$C + D \leqslant \frac{|A_0|}{2\sqrt{2}} (1 - \theta) \qquad (0 < \theta < 1) \tag{5.9}$$

Величины $-4a_kA_0^{-1}$ и $-4b_kA_0^{-1}$ как коэффициенты Фурье некоторой функции, ограничены. Следовательно, система (5.5) — (5.6) определяет единственное ограниченное решение (главное решение). Аналогично тому, как это было сделано в п. 3, решая систему уравнений (5.5) — (5.6) методом последовательных приближений, можно показать, что величины U_n, V_n могут быть коэффициентами Фурье некоторой функции. При этом предполагаем, что

$$|a_n| \leqslant \frac{h}{n^r}, \qquad |b_n| \leqslant \frac{g}{n^r} \qquad (r \geqslant 2,\ n = 1, 2, \ldots) \tag{5.10}$$

Если выполнено условие

$$(1 + 2^r)(H + G) + (2 + 2^r)(A + B) < |A_0| / 2 \tag{5.11}$$

где

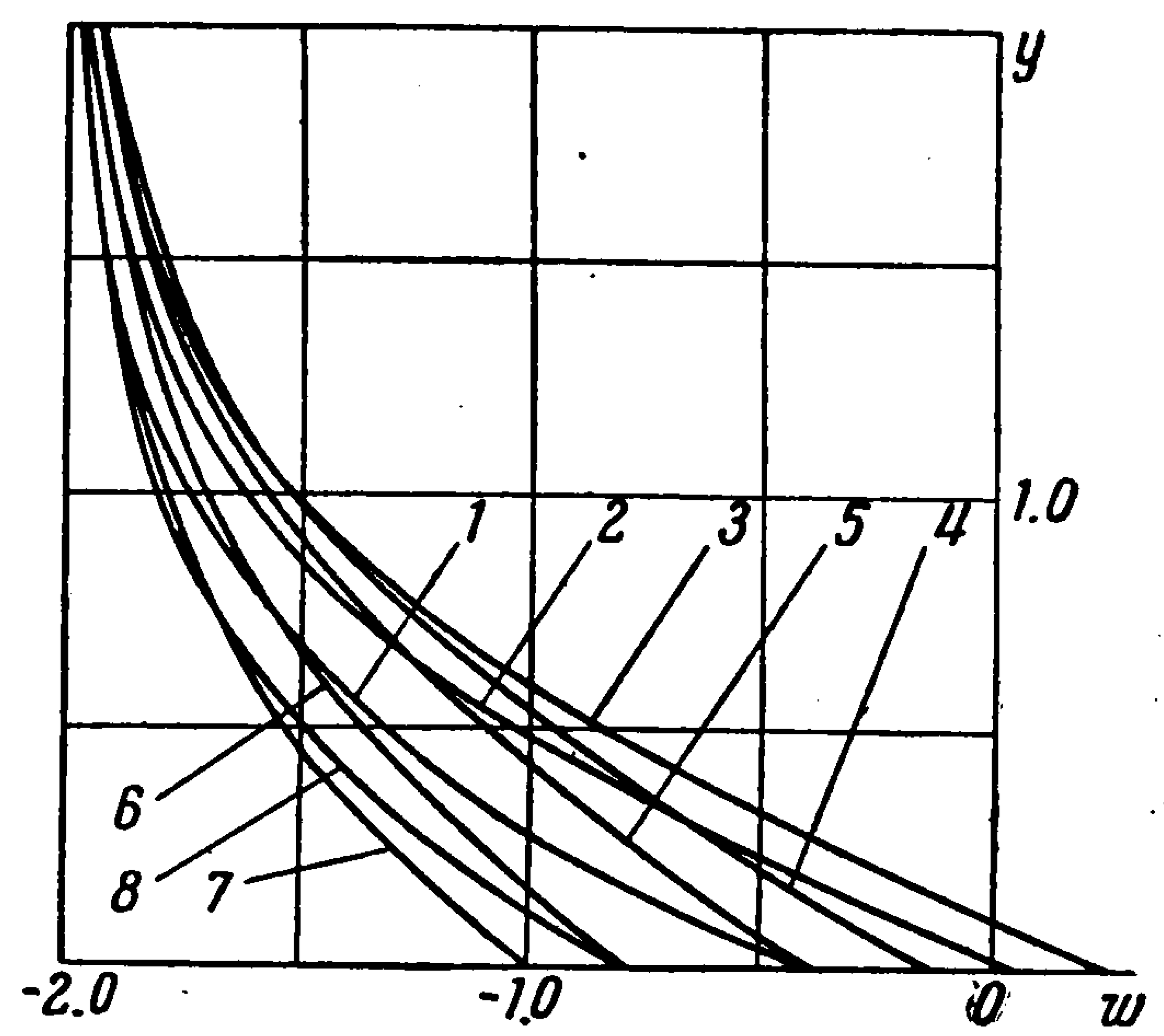
$$A = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|, \qquad B = \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|, \qquad H = h \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}, \qquad G = g \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$$

то получим оценки для коэффициентов разложения (1.3) функции $\psi(t)$

$$|U_n| \leqslant \frac{4}{|A_0|}|a_n| + \Delta; \qquad |V_n| \leqslant \frac{4}{|A_0|}|b_n| + \Delta$$

$$\Delta = \frac{1}{|A_0|}\left\{\frac{[4 + (1 + 2^r)|U_0|]\,[(1 + 2^r)(H + G) + (2 + 2^r)(A + B)]}{|A_0| - 2\,[(1 + 2^r)(H + G) + (2 + 2^r)(A + B)]} + \right. \tag{5.12}$$
$$\left. + \frac{(1 + 2^r)|U_0|}{2}\right\}\frac{[h + g]}{n^r}$$

6. Из формул (3.7) и (5.12) ясно, что при выполнении соответственно условий (3.6) и (5.11) можно найти решение бесконечных систем уравнений a_k, b_k и U_k, V_k. Однако рассмотренное нами мажорирование, вообще говоря, грубое. Для некоторых конкретных задач можно найти более тонкие оценки. Отсюда ясно, что вообще можно найти соответствующие решения, и не удовлетворяющие условиям (3.6) и (5.11).



Фиг. 1

Из формул (1.1), (1.4) и (1.5) легко видеть, что условие (3.5), которое здесь предполагается выполненным для коэффициентов Фурье функции $\psi(t)$, означает непрерывность всех производных функции $w(y, t)$, входящих в уравнение (1.1) и, следовательно, непрерывность функции $u(y, t)$ и ее производных по y до третьей включительно.

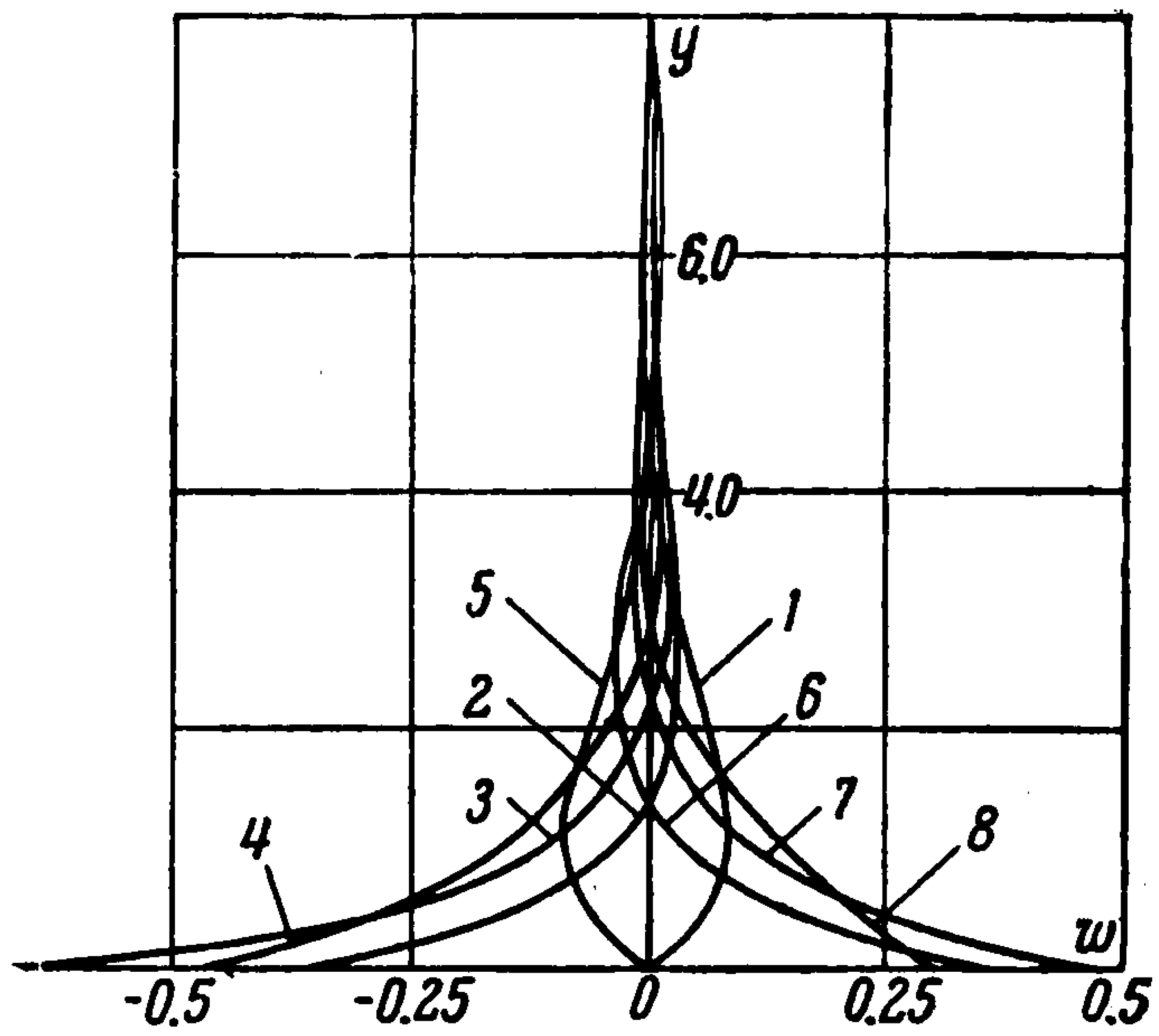
В качестве иллюстрации приводим результаты вычислений. На фиг. 1 приведены кривые зависимости $w = w(y)$ в случае, когда

$$\psi(t) = -0.6 + 0.4 \sin t \tag{6.1}$$

На фиг. 1 кривые 1—8 соответствуют значениям $t = 0,\ \pi/4,\ \pi/2,\ 7\pi/8,\ \pi,\ 5\pi/4,\ 3\pi/2,\ 7\pi/4$. Константа, определяющая значение w на бесконечности, равна $w_\infty = -2$, так что $\zeta = -1$ согласно (2.11). Отметим, что в этом примере $\partial w / \partial y < 0$ для всех значений t при $y \geqslant 0$; производная $\partial^2 w / \partial y^2$ при $y = 0$ меняет знак в соответствии с формулами (1.1), (2.6) и (6.1), что мало заметно. На фиг. 2 даны кривые зависимости $w = w(y)$, когда

$$\varphi(t) = \begin{cases} t & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}\pi \\ \pi - t & \frac{1}{2}\pi \leqslant t \leqslant \frac{3}{2}\pi \\ t - 2\pi & \frac{1}{2}3\pi \leqslant t \leqslant 2\pi \end{cases} \tag{6.2}$$

На фиг. 2 начерчено два решения (2.6) $w(y, t)$ с константой A_0, равной соответственно 17.3307 и — 17.3307. Кривые отвечают парам значений t, а именно: 1 $(0,\pi)$, 2 $(\pi / 3, 4\pi / 3)$, 3 $(\pi / 2, 3\pi / 2)$, 4 $(2\pi / 3, 5\pi / 3)$, 5 $(\pi, 0)$, 6 $(4\pi/3, \pi/3)$, 7 $(3\pi/2, \pi / 2)$, 8 $(5\pi / 3, 2\pi/3)$ соответственно для первого и второго значений A_0.



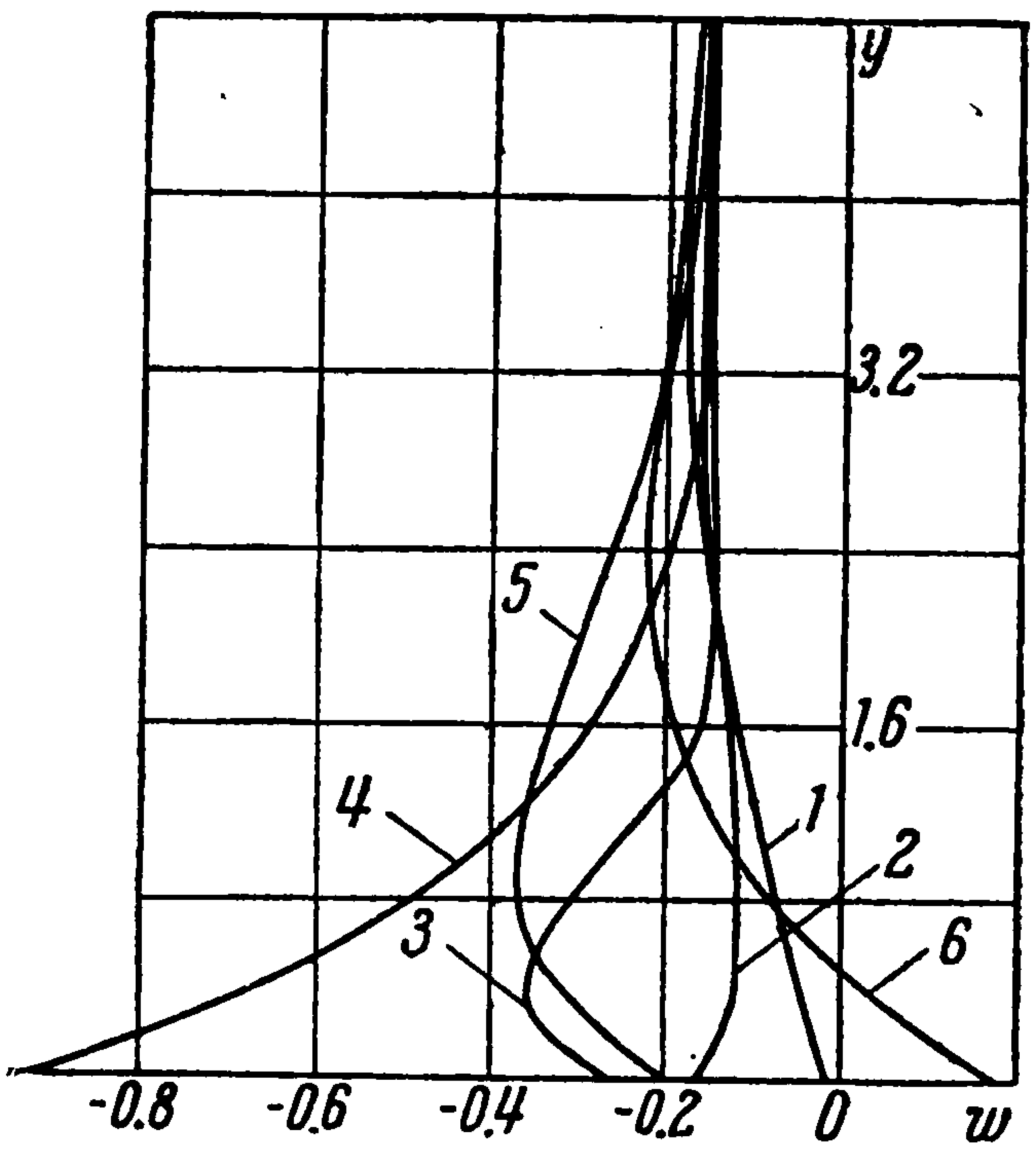
Фиг. 2

На фиг. 3 дана зависимость $w = w(y)$, когда

$$\varphi(t) = \begin{cases} t & (0 \leqslant t \leqslant \pi) \\ -2t + 3\pi & \left(\pi \leqslant t \leqslant \frac{5}{3}\pi\right) \\ t - 2\pi & \left(\frac{5}{3}\pi \leqslant t \leqslant 2\pi\right) \end{cases} \tag{6.3}$$

При этом $A_0 = 17.3307$; кривые соответствуют значениям $t = 0$, $\pi / 3$, $2\pi / 3$, π, $4\pi / 3$, $5\pi / 3$.

Отметим, что в двух последних случаях $w_\infty = 0$, так что $\zeta = 0$ согласно (2.11) и функция $u(y, t)$, в (1.4), будет периодическим решением уравнения (1.5).



Фиг. 3

Поступила 6 V 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. B u r g e r s J. M. A Mathematical Model Illustrating the Theory of Turbulence. Advances in Applied Mechanics, 1948, Vol. I.
2. H o p f E. The Partial Differential Equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$. Comm. on Pure and Appl. Math. 1950, Vol. III, № 3.
3. C o l e J. D. On a Quasi-Linear Parabolic Equation Occuring in Aerodynamics. Quart. of Appl. Math, 1951, Vol. IX, 3.
4. P i c a r d. Leçons sur quelques équations fonctionnelles, Paris, 1928.
5. К а н т о р о в и ч Л. В., К р ы л о в В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.— Л. ГИТТЛ, 1949.
6. L i n C. C. On Periodically Oscillating Wakes in the Oseen Approximation. Studies in Mathematics and Mechanics Presented to Richard von Mises. N. Y., 1954.