Прикладная математика и механика. Том XXV, 1961
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ВЛИЯНИЕ КАПИЛЛЯРНЫХ СИЛ НА КОЭФФИЦИЕНТ СЖАТИЯ СТРУИ

М. И. Гуревич

(Москва)

Н. Е. Жуковский [1] дал первые постановки задач о струйных течениях с учетом сил тяжести и поверхностного натяжения. Оказалось, что обе задачи, с математической точки зрения, близки между собой. Н. Е. Жуковский дал точные решения одного примера для случая тяжелой жидкости и одного примера (обтекание газового пузыря между двумя стенками) для случая, когда учитываются силы поверхностного натяжения. Точные решения задач о струйных течениях тяжелой жидкости были получены после работы Н. Е. Жуковского и другими авторами (напр. Н. Берви, Ричардсон). Что же касается струйных течений с учетом капиллярных сил, то на эту тему мне, кроме статьи Н. Е. Жуковского, известна только работа Мак-Леода [2]. Мак-Леод работы [1], по-видимому, не знал и новым методом рассмотрел частный случай задачи Н. Е. Жуковского.

Сравнительно недавно К. Воронец [3] предложил использовать для решения струйных задач тяжелой жидкости метод малого параметра. Работа К. Воронца была продолжена М. И. Гуревичем и Г. Н. Пыхтеевым [4]. В настоящей статье делается попытка применить метод малого параметра и к решению струйных задач с учетом капиллярных сил, с тем чтобы точнее выявить возможности теории струй. Кроме того, в статье обсуждается вопрос о наложении на струйные течения линеаризированных капиллярных волн. Поскольку работа носит разведывательный характер, автор ограничился рассмотрением отмеченных вопросов на примере одной простейшей задачи теории струй.

§ 1. Схема течения. Изучим плоскую задачу о симметричном истечении струи невесомой, идеальной несжимаемой жидкости из отверстия в стенке. При выводе граничных условий будем учитывать силы поверхностного натяжения.

Рассмотрим половину области течения струи, заменяя совпадающую с осью x ось симметрии твердой стенкой CA (фиг. 1). Полная ширина отверстия равна $2l$. Толщину всей струи обозначим через 2δ. Важнейшей характеристикой течения является коэффициент сжатия струи $k = \delta/l$.

§ 2. Граничные условия на свободной поверхности. Обозначим через p_1 и p давления в атмосфере и в жидкости соответственно. Пусть R — радиус кривизны свободной поверхности, α — коэффициент поверхностного натяжения. Тогда, как известно,

$$p_1 = p + \frac{\alpha}{R} \tag{2.1}$$

Если θ — угол скорости с осью x, $w = \varphi + i\psi$ — комплексный потенциал течения, ds — дифференциал дуги, v — модуль скорости и v_0 — модуль скорости в бесконечности в точке A, то:

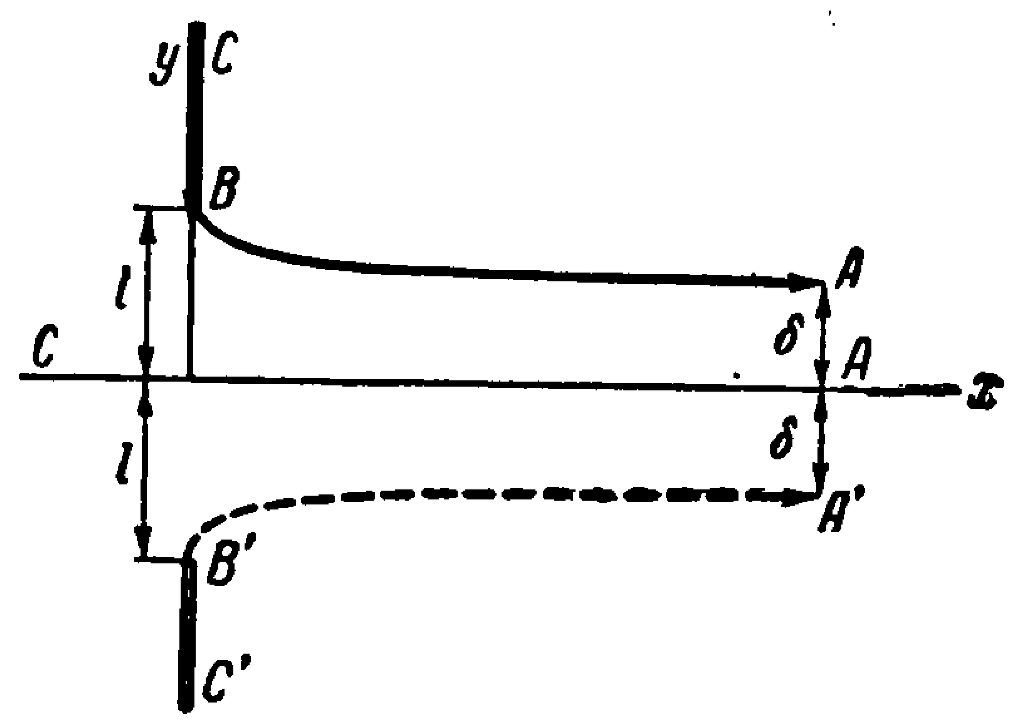
$$\frac{1}{R} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{v\, d\theta}{d\varphi} \tag{2.2}$$

Так как свободная поверхность струи направлена вогнутостью вверх, то $R > 0$. Интеграл Бернулли дает:

$$p - p_0 = \frac{\rho}{2}(v_0^2 - v^2) \qquad (2.3)$$

где p_0 — давление в бесконечности в точке A. Если ограничиться случаем, когда капиллярные волны отсутствуют, то будем иметь, что $p_0 = p_1$, т. е. в бесконечности $R = \infty$. Из (2.1), (2.2) и (2.3) имеем [1]

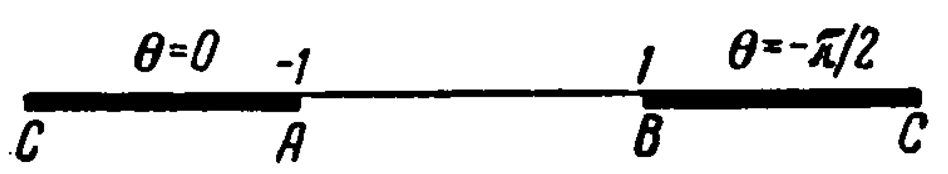
$$\alpha v \frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{\rho}{2}(v^2 - v_0^2) \qquad (2.4)$$



Фиг. 1

Обозначая расход в струе над осью x через $q = v_0\delta$, введем безразмерные величины V и a при помощи следующих соотношений;

$$V = \frac{v}{v_0}, \qquad a = \frac{\alpha}{\rho v_0 q} = \frac{\alpha}{\rho v_0^2 \delta} \qquad (2.5)$$



Фиг. 2

Тогда из (2.4) получаем;

$$V^2 - 2a \frac{d\theta}{d\varphi} qV - 1 = 0$$

Так как $V_{a=0} = 1$, то будем иметь:

$$V = aq \frac{d\theta}{d\varphi} + \sqrt{1 + a^2\left(q \frac{d\theta}{d\varphi}\right)^2} \qquad (2.6)$$

Можно попробовать решать задачу методом последовательных приближений, считая a малым параметром. В настоящей статье будут рассмотрены только два первых приближения.

§ 3. Решение задачи при отсутствии сил капиллярности ($a = 0$). Для решения задачи, хотя бы во втором приближении, нужно предварительно решить задачу в первом приближении, когда капиллярные силы отсутствуют. Решение этой задачи хорошо известно. Его можно найти в любом курсе гидродинамики, содержащем даже только краткое изложение теории струй. Для удобства чтения настоящей статьи приведем без вывода это решение в подходящей для дальнейшего изложения форме.

Для получения общего решения задачи достаточно отобразить на верхнюю полуплоскость параметрического переменного t (фиг. 2) области изменения комплексного потенциала w и функции Жуковского

$$\omega = \ln \frac{dw}{v_0\, dz} = \ln V - i\theta$$

Область изменения комплексного потенциала w представляет собой полоску шириной q. (Пусть $\psi = q$ на CBA, тогда на стенке CA имеем $\psi = 0$). С помощью конформного отображения полосы на полуплоскость легко получить, что:

$$w(t) = -\frac{q}{\pi}\ln(t + 1) + iq \qquad (3.1)$$

Формулу (3.1) легко проверить непосредственно. Дифференцируя (3.1), находим:

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{q}{\pi(1 + t)} \qquad (3.2)$$

Если бы мы при переходе к дальнейшим приближениям оставляли неизменной ширину отверстия, то расходы в струе должны были быть в различных приближениях различными. Нам удобно будет при переходе к новым приближениям оставлять неизменным расход q и соответственно менять ширину отверстия. В этом случае величина q в (3.1) будет одной и той же во всех приближениях.

Области изменения ω и z будут для различных приближений различными. Обозначим

$$(z)_{a=0} = z_1, \qquad (\omega)_{a=0} = \omega_1 = \ln (v_1 / v_0) - i\theta_1$$

На CA $(t < -1)$ имеем $\operatorname{Im} \omega_1 = -\theta_1 = 0$; на AB $(-1 < t < 1)$ функция ω_1 есть чисто мнимая величина, на BC $(t > 1)$ $\operatorname{Im} \omega_1 = -\theta_1 = \pi / 2$.

Функция $\omega_1 (t)$ имеет вид

$$\omega_1 = \ln \frac{\sqrt{1-t} + i\sqrt{1+t}}{\sqrt{2}}, \quad \text{или} \quad \frac{dw}{v_0\, dz_1} = \frac{\sqrt{1-t} + i\sqrt{1+t}}{\sqrt{2}} \tag{3.3}$$

Формулы (3.3) легко проверить непосредственно. Для этого достаточно проследить за изменением ω_1 и $dw / v_0\, dz_1$ вдоль действительной оси t.

§ 4. Определение ω при заданном V. Найдем $\omega (t)$, предполагая, что на отрезке $-1 < t < 1$ действительной оси нам известна зависимость $V (t)$. Введем вспомогательную функцию:

$$\Omega = \omega - \omega_1 = \ln \frac{dw}{v_0 dz} - \ln \frac{\sqrt{1-t} + i\sqrt{1+t}}{\sqrt{2}} \tag{4.1}$$

Функцию Ω можно найти, пользуясь методами теории тонкого крыла [5]. Граничные условия на действительной оси t для ω, ω_1 и Ω представляются в виде таблицы:

t	ω	ω_1	Ω
$t>1$	$\operatorname{Im} \omega=\pi/2$	$\operatorname{Im} \omega_1=\pi/2$	$\operatorname{Im} \Omega=0$
$-1<t<1$	$\operatorname{Re} \omega=\ln V$	$\operatorname{Re} \omega_1=0$	$\operatorname{Re} \Omega=\ln V$
$t<-1$	$\operatorname{Im} \omega=0$	$\operatorname{Im} \omega_1=0$	$\operatorname{Im} \Omega=0$

Функция $\Omega\ (1-t^2)^{-1/2}$ обращается при $t \to \infty$ в нуль и на действительной оси t нам всюду известна ее действительная часть. Поэтому для ее определения можно применить формулу Шварца для верхней полуплоскости, что в соответствии с таблицей граничных значений $\Omega (t)$ дает:

$$\Omega (t) = \frac{\sqrt{1-t^2}}{\pi i} \int_{-1}^{1} \frac{\ln V (\xi)\, d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}\, (\xi - t)} \tag{4.2}$$

Выделяя в (4.2) мнимую часть, выражая $\ln V (\xi)$ через $d\theta / d\varphi$ при помощи (2.6) и исключая затем $d\varphi$ (см. (3.2)), легко получить для определения θ интегро-дифференциальное уравнение

$$\theta + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1+t}}{\sqrt{1-t}} = \frac{\sqrt{1-t^2}}{\pi} \text{v. p.} \int_{-1}^{1} \frac{\ln [aq\, d\theta / d\varphi + \sqrt{1 + a^2 q^2 (d\theta / d\varphi)^2}]}{\sqrt{1-\xi^2}\, (\xi - t)}\, d\xi$$

$$\left(d\varphi = -\frac{q\, d\xi}{\pi (1+\xi)}\right)$$

В дальнейшем решение задачи во втором приближении будет проведено без использования этого уравнения.

§ 5. Решение задачи во втором приближении. Для нахождения функции Жуковского во втором приближении при помощи (4.2) нужно предварительно найти в нем $V(t)$.

Пренебрегая в (2.6) величинами порядка a^2, полагая $\theta = \theta_1$ и используя (3.2), находим:

$$V_2(t) = 1 + \frac{d\theta_1}{d\varphi} aq = 1 + \frac{\pi a}{2}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}$$

Отсюда и из (4.2) получаем во втором приближении:

$$\Omega = \frac{\sqrt{1-t^2}}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{\ln\left[1 + a_1\sqrt{1+\xi}\,/\,\sqrt{1-\xi}\right]}{\sqrt{1-\xi^2}\,(\xi - t)}\,d\xi \qquad \left(a_1 = \frac{\pi a}{2}\right) \tag{5.1}$$

Для вычисления интеграла, входящего в уравнение (5.1), продифференцируем это последнее по параметру a_1. Получим:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial a_1} = \frac{\sqrt{1-t^2}}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{d\xi}{\left[1 + a_1\sqrt{1+\xi}\,/\,\sqrt{1-\xi}\right](\xi - t)(1-\xi)}$$

Произведя замену $(1+\xi)^{1/2}(1-\xi)^{-1/2} = \eta$, можно свести интеграл к интегралу от рациональной дроби. Вычисление этого интеграла дает

$$\frac{\partial\Omega}{\partial a_1} = \frac{\sqrt{1+t}}{\sqrt{1-t} + a_1\sqrt{1+t}} + \frac{2i}{\pi}\sqrt{1-t^2}\,\frac{\ln\left[a_1\sqrt{1+t}\,/\,\sqrt{1-t}\right]}{1 - t - a_1^2(1+t)}$$

Отсюда

$$\Omega = \ln\left(1 + a_1\frac{\sqrt{1+t}}{\sqrt{1-t}}\right) + \frac{2i}{\pi}\sqrt{1-t^2}\,\vartheta(a_1, t)$$

$$\vartheta(a_1, t) = \int_{0}^{a_1}\frac{\ln\left[a_1\sqrt{1+t}\,/\,\sqrt{1-t}\right]}{1 - t - a_1^2(1+t)}\,da_1 \tag{5.2}$$

§ 6. Вычисление коэффициента сжатия струи. Из фиг. 1, 2 имеем

$$l - \delta = \int_{t=-1}^{t=1} dy \tag{6.1}$$

Для нахождения коэффициента сжатия струи $k = \delta\,/\,l$ вычислим интеграл, стоящий в правой части (6.1). Из (4.1) следует, что

$$\frac{dw}{v_0\,dz} = \frac{\sqrt{1-t} + i\sqrt{1+t}}{\sqrt{2}}\,e^{\Omega}$$

Отсюда, пользуясь (3.2), находим:

$$dz = -\frac{qe^{-\Omega}\sqrt{2}}{\pi v_0\left(\sqrt{1-t} + i\sqrt{1+t}\right)(1+t)}\,dt \tag{6.2}$$

Или после использования (5.2) и несложных преобразований

$$dz = -\frac{\delta\left(\sqrt{1-t} - i\sqrt{1+t}\right)}{\pi\sqrt{2}\left(1 + a_1\sqrt{1+t}\,/\,\sqrt{1-t}\right)(1+t)}\exp\left(-\frac{2i}{\pi}\sqrt{1-t^2}\,\vartheta(a_1, t)\right)dt \tag{6.3}$$

Разделяя в (6.3) действительную и мнимую части и пренебрегая величинами высших порядков малости по a_1, будем иметь:

$$dy = \frac{\delta}{\pi\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{1+t}\left(1 + a_1\sqrt{1+t}\,/\,\sqrt{1-t}\right)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{1-t}}{(1+t)\left(1 + a_1\sqrt{1+t}\,/\,\sqrt{1-t}\right)}\,\frac{2}{\pi}\sqrt{1-t^2}\,\vartheta(a_1, t)\right]dt \tag{6.4}$$

Вставляя dy из (6.3) в (6.1), получим:

$$l-\delta=\frac{\delta}{\pi\sqrt{2}}\{J_1+J_2\},\quad \text{где } J_1=\int\limits_{-1}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1+t}\,(1+a_1\sqrt{1+t}\,/\sqrt{1-t})} \tag{6.5}$$

$$J_2=\frac{2}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{(1-t)\,\vartheta\,(a_1,t)}{\sqrt{1+t}\,(1+a_1\sqrt{1+t}\,/\sqrt{1-t})}\,dt \tag{6.6}$$

Интеграл J_1 нетрудно вычислить точно, сведя его к интегралу от рациональной дроби. После пренебрежения в полученном выражении величинами высшего порядка малости по a_1 получим:

$$J_1=2\sqrt{2}(1-a_1)+O\,(a_1^2\ln a_1) \tag{6.7}$$

Исключая из рассмотрения бесконечно малую окрестность точки $t=1$, для вычисления интеграла J_2 положим приближенно:

$$\frac{\vartheta\,(a_1,\,t)}{1+a_1\sqrt{1+t}/\sqrt{1-t}}\approx\frac{1}{1-t}\int\limits_{0}^{a_1}\left[\ln a_1+\ln\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\right]da_1$$

Отсюда

$$J_2\approx\frac{4a_1\sqrt{2}}{\pi}\,[\ln a_1-1-\ln 2]$$

Таким образом, из уравнения (6.4) получается, что:

$$l-\delta\approx\frac{2\delta}{\pi}\left\{1+\frac{2a_1\ln a_1}{\pi}-a_1\left[1+\frac{2}{\pi}+\frac{2}{\pi}\ln 2\right]\right\}$$

и коэффициент $k\,(a)$ после возвращения к параметру $a=2a_1/\pi$ равен:

$$k\,(a)=\frac{\pi}{\pi+2}\left[1+2a\,\frac{\ln\,(2\,/\,\pi a)}{\pi+2}+a\left(1+\frac{2\ln 2}{\pi+2}\right)\right] \tag{6.8}$$

Множитель $\pi\,/\,(\pi+2)=k\,(0)$ равен коэффициенту сжатия при отсутствии сил капиллярности. Параметр a может быть представлен в виде:

$$a=\frac{\alpha}{\rho v_0^2\delta}=\frac{\alpha}{\rho v_0^2 lk\,(a)}\approx\frac{\alpha}{\rho lv_0^2k\,(0)}=\frac{\alpha\,(2+\pi)}{\rho lv_0^2\pi}$$

Отсюда равенство (6.8) можно привести к виду

$$k\,(a)=k\,(0)\left\{1+\frac{\alpha}{\pi\rho lv_0^2}\left[2\ln\frac{2\rho lv_0^2}{\alpha\,(2+\pi)}+\pi+2+2\ln 2\right]\right\} \tag{6.9}$$

или

$$k\,(a)\approx 0.611\left\{1+\frac{0.318\alpha}{\rho lv_0^2}\left[2\ln\frac{0.39\rho lv_0^2}{\alpha}+6.52\right]\right\} \tag{6.10}$$

§ 7. Капиллярные волны на поверхности потока конечной глубины. Изложенное выше решение не единственное, так как на свободной поверхности могут существовать капиллярные волны. Ниже будет показано, как можно на полученное течение наложить течение с капиллярными волнами малой амплитуды.

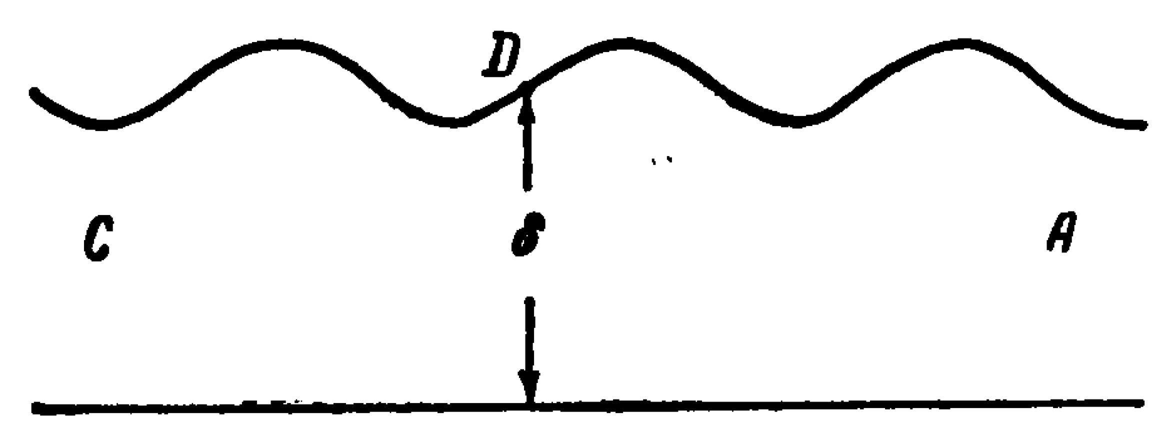
Прежде всего нам нужно будет исследовать поведение комплексной скорости в бесконечности — в окрестности точки A. Для этого рассмотрим задачу о капиллярных волнах малой амплитуды, движущихся по поверхности потока жидкости конечной глубины (фиг. 3). Теория капиллярных волн малой амплитуды является хорошо изученным разделом гидродинамики [6]; мы, однако, вкратце остановимся на решении этой задачи для того, чтобы придать ему нужную нам форму.

Рассмотрим синусоидальные волны малой амплитуды. Пусть δ — средняя глубина потока и v_0 — скорость в какой-нибудь точке перегиба D поверхности синусоидальной волны. С точностью до малых величин высшего порядка расход жидкости в потоке q будет равен $v_0\delta$. На свободной поверхности должны удовлетворяться уравнения (2.1) и (2.3). Так как в точке D $R = \infty$, то атмосферное давление p_1 в этой точке равно давлению жидкости и в качестве граничного условия на свободной поверхности можно взять уравнение (2.4).

Очевидно, что на дне, которое мы будем считать совпадающим с осью абсцисс X, вертикальная составляющая скорости по оси Y равна нулю.

Обозначим через w комплексный потенциал и будем искать решение в виде

$$\frac{dw}{dZ} = v_0 \left[1 - \varkappa A \sin \frac{\varkappa(w + \varphi_0)}{v_0}\right] \qquad (7.1)$$



Фиг. 3

где A, $\varkappa$, φ_0 — действительные постоянные и $Z = X + iY$. Амплитуда волны A считается малой величиной. Дну соответствуют действительные значения w, на свободной поверхности $\operatorname{Im} w = \psi = v_0\delta$. Из (7.1) видно, что при действительных значениях w действительна и комплексная скорость $dw\,/\,dZ = v^\circ e^{-i\theta^\circ} = v_X - iv_Y$, т. е. вертикальная составляющая скорости v_Y равна нулю. Нам остается, таким образом, удовлетворить граничному условию на свободной поверхности $\psi = v_0\delta$.

Запишем граничное условие (2.4) в линеаризированном виде, и, заменяя θ через θ° и $v \approx v_0$ через v° получим

$$\alpha \frac{d\theta^\circ}{d\varphi} = \rho\,(v^\circ - v_0) \qquad (7.2)$$

Так как на свободной поверхности $w = \varphi + iv_0\delta$, то

$$v^\circ e^{-i\theta^\circ} = v_0\left\{1 - \varkappa A \sin\left[\frac{\varkappa}{v_0}(\varphi + \varphi_0) + i\varkappa\delta\right]\right\} =$$

$$= v_0\left\{1 - \varkappa A \sin\frac{\varkappa}{v_0}(\varphi + \varphi_0)\operatorname{ch}\delta\varkappa - i\varkappa A\cos\frac{\varkappa}{v_0}(\varphi + \varphi_0)\operatorname{sh}\varkappa\delta\right\}$$

Отсюда, пренебрегая величинами, содержащими высшие степени малой амплитуды A, находим:

$$v^\circ = v_0\left[1 - \varkappa A \sin\frac{\varkappa}{v_0}(\varphi + \varphi_0)\operatorname{ch}\varkappa\delta\right], \qquad \theta^\circ = \varkappa A\cos\frac{\varkappa}{v_0}(\varphi + \varphi_0)\operatorname{sh}\varkappa\delta$$

Вставляя эти выражения для v° и θ° в (7.2), получаем после очевидных сокращений

$$\varkappa \operatorname{th}\varkappa\delta = \frac{\rho v_0^2}{\alpha} \qquad (7.3)$$

Уравнение (7.3) определяет частоту $\varkappa$, при которой возможны малые синусоидальные капиллярные волны. Для относительно малых α и достаточных глубин $\operatorname{th}\varkappa\delta \approx 1$ и $\varkappa \approx \rho v_0^2\,/\,\alpha \gg 1$.

Область изменения комплексного потенциала w полностью совпадает с областью изменения комплексного потенциала w, рассмотренного в предыдущих параграфах. Отобразим область w на верхнюю полуплоскость параметрического переменного t.

Для этого можно воспользоваться уравнением (3.1). Будем иметь

$$\frac{dw}{dZ} = v_0 \left\{1 - \varkappa A \sin\left[\frac{\varkappa}{v_0}\left(-\frac{v_0\delta}{\pi}\ln(1+t) + iv_0\delta + \varphi_0\right)\right]\right\} \qquad (7.4)$$

Введем функцию

$$\omega^\circ = \ln\frac{dw}{v_0\,dZ} = \ln V^\circ - i\theta^\circ \qquad (7.5)$$

Если бы мы теперь к прежней функции Жуковского $\omega = \omega_1 + \Omega$ прибавили ω° и взяли в качестве новой функции Жуковского функцию $\omega = \omega_1 + \Omega + \omega^\circ$, то эта функция вместе с комплексным потенциалом w из (3.1) определила бы некоторое струйное течение с капиллярными волнами на свободной поверхности. Однако, при этом струя вытекала бы уже не из отверстия в плоскости, а из отверстия в некоторой искривленной стенке. Изменим поэтому функцию Жуковского еще, добавив к $\omega_1 + \Omega + w^\circ$ дополнительный член ω_+, исправляющий граничные условия и не меняющий капиллярных волн в бесконечности. Итак, рассмотрим окончательную функцию Жуковского и попробуем определить ω_+.

$$\omega = \omega_1 + \Omega + \omega^\circ + \omega_+ = \ln V - i\theta \qquad (7.6)$$

§ 8. Определение дополнительной функции $\omega_+ = V_+ - i\theta_+$. Функция ω_+ голоморфна в верхней полуплоскости параметрического переменного t. Найдем для нее граничные условия на действительной оси t.

Дну AC соответствуют действительные значения w, при этом $t < -1$ и мы имеем

$$\operatorname{Im}\left[-\frac{v_0\delta}{\pi}\ln(1+t) + iv_0\delta\right] = \operatorname{Im}\left[-\frac{v_0\delta}{\pi}\ln(-1-t)\right] = 0$$

Отсюда, согласно уравнениям (7.4) и (7.5), имеем—$\operatorname{Im}\omega^\circ = \theta^\circ = 0$. Так как необходимо, чтобы вдоль дна $\operatorname{Im}\omega = 0$, то отсюда и из (7.6), в соответствии с таблицей граничных значений § 4, имеем

$$\theta_+ = 0 \qquad \text{при } t < -1 \qquad (8.1)$$

На стенке BC $(t > 1)$ имеем $\theta = -\operatorname{Im}\omega = -\pi/2$. Из (7.4) и (7.5), пренебрегая высшими степенями малой амплитуды, находим

$$\theta^\circ = \varkappa A\cos\left[-\frac{\varkappa\delta}{\pi}\ln(1+t) + \frac{\varkappa\varphi_0}{v_0}\right]\operatorname{sh}\varkappa\delta$$

Это равенство вместе со значениями мнимых частей ω_1 и Ω (см. таблицу § 4) дает для θ_+ граничное условие:

$$-\operatorname{Im}\omega_+ = \theta_+ = -\varkappa A\cos\left[-\frac{\varkappa\delta}{\pi}\ln(1+t) + \frac{\varkappa\varphi_0}{v_0}\right]\operatorname{sh}\varkappa\delta \qquad \text{при } t > 1 \qquad (8.2)$$

Перейдем теперь к граничному условию (2.4) на свободной поверхности. В линеаризированном виде оно может быть записано так (ср. с (7.2)):

$$\alpha\frac{d\theta}{d\varphi} = \rho v_0 (V - 1) \qquad (8.3)$$

Очевидно, что

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{d\theta_1}{d\varphi} + \frac{d\theta_2}{d\varphi} + \frac{d\theta^\circ}{d\varphi} + \frac{d\theta_+}{d\varphi}$$

причем $d\theta_2 / d\varphi$ в соответствии с принятым методом решения является малой величиной по сравнению с $d\theta_1 / d\varphi$.

Условие (7.3) показывает, что $\varkappa$ является большой величиной, т. е. что частота капиллярных волн велика. Поэтому, при дифференцировании по φ появляется новый большой множитель $\varkappa$.

Сделаем предположение, что θ_+ плавно изменяется вместе с φ и стремится к нулю, когда $\varphi \to \infty$. При таком предположении мы можем считать, что $d\theta_+ / d\varphi$ мало по сравнению с $d\theta^\circ / d\varphi$ и тогда

$$\frac{d\theta}{d\varphi} \approx \frac{d\theta_1}{d\varphi} + \frac{d\theta^\circ}{d\varphi} \tag{8.4}$$

С другой стороны,

$$\ln V = \ln V_1 + \ln V_2 + \ln V^\circ + \ln V_+, \qquad \text{или} \qquad V = V_1 V_2 V^\circ V_+$$

Отсюда в соответствии с полученными выше решениями (см. § 4, § 5 и формулу (7.2)) находим:

$$V = 1\left(1 + aq\,\frac{d\theta_1}{d\varphi}\right)\left(1 + \frac{\alpha}{\rho v_0}\,\frac{d\theta^\circ}{d\varphi}\right)V_+ \tag{8.5}$$

так как согласно (2.5) $aq = \alpha/\rho v_0$ и для малых $V_+ - 1$ имеем $V_+ \approx 1 + \ln V_+$, то из (8.3), (8.4) и (8.5) находим с точностью до малых величин высших порядков:

$$\alpha\left(\frac{d\theta_1}{d\varphi} + \frac{d\theta^\circ}{d\varphi}\right) = \rho v_0\left(\frac{\alpha}{\rho v_0}\,\frac{d\theta_1}{d\varphi} + \frac{\alpha}{\rho v_0}\,\frac{d\theta^\circ}{d\varphi} + \ln V_+\right)$$

Отсюда имеем граничное условие на свободной поверхности

$$\ln V_+ = 0 \quad \text{при } -1 < t < 1 \tag{8.6}$$

Итак, задача определения ω_+ сводится к известной задаче нахождения функции комплексного переменного, голоморфной в верхней полуплоскости при условии, что на части границы задана $\operatorname{Im}\omega_+$ функции (см. (8.1) и (8.2)), а на части границы задана $\operatorname{Re}\omega_+$ (см. (8.6)).

Для решения этой задачи введем вспомогательную функцию $\omega_+ / \sqrt{t^2 - 1}$. Для этой функции всюду на действительной оси t будет задана ее мнимая часть. Формула Шварца для верхней полуплоскости дает:

$$\frac{\omega_+}{\sqrt{t^2 - 1}} = \operatorname{sh}\varkappa\delta\,\frac{\varkappa A}{\pi}\int\limits_1^\infty \frac{\cos\left[(-\varkappa\delta/\pi)\ln(1+\xi) + \varkappa\varphi_0/v_0\right]d\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}\,(\xi - t)} \tag{8.7}$$

В выражения для ω и ω_+ входят две неизвестные постоянные A и φ_0.

Поступила 23 VIII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуковский Н. Е. Определение движения жидкости при каком-нибудь условии, данном на линии тока. Журнал Русского физико-химического общества, 1891, т. XXII.
2. Mc. Leod E. B. The explicit solution of a free boundary problem involving surface tension. Journal of Rational Mechanics and Analysis. 1955, vol. 4, № 4.
3. Woronetz C. L'influence de la pesanteur sur la forme du jet liquide. C. R. Acad. de Sci. 1953, t. 236, № 3.
4. Гуревич М. И. и Пыхтеев Г. Н. Приближенное решение задачи об истечении тяжелой идеальной несжимаемой жидкости из-под щита. ПМТФ, 1960, № 2.
5. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.—Л. 1950.
6. Ламб Г. Гидродинамика. М.— Л. 1947.