

ЗАКОН ПОДОБИЯ ДЛЯ ГИПЕРЗВУКОВЫХ ОБТЕКАНИЙ ТОНКИХ ПРИТУПЛЕННЫХ ТЕЛ ВЯЗКИМ ГАЗОМ

В. В. Лунев
(Москва)

В работе [1] Г. Г. Черный установил гиперзвуковой закон подобия обтекания тонких притупленных тел идеальным (невязким) газом. В работе [2] установлен закон подобия при обтекании тонких заостренных тел гиперзвуковым потоком вязкого теплопроводного газа. Аналогичные результаты по этим вопросам получены в работах [3,4]. Ниже получен общий закон подобия ламинарного обтекания тонких плоских ($\nu = 0$) и осесимметричных ($\nu = 1$) притупленных тел гиперзвуковым потоком вязкого теплопроводного газа, из которого упомянутые выше следуют как частные предельные случаи. Получены условия подобия течения в невязком высокоэнтропийном слое и в пограничном слое с переменной энтропией на внешней границе.

1. Характерной особенностью гиперзвукового обтекания тонких тел вязким теплопроводным газом является разделение возмущенной области на две с различными по порядку величин параметрами. Первая область — ударный слой — это примыкающая непосредственно к скачку уплотнения зона сильно сжатого газа, прошедшего через скачок уплотнения с малым углом наклона, и имеющего, следовательно, небольшую температуру по сравнению с температурой торможения.

Вторая область течения — высокотемпературный или высокоэнтропийный слой — заполнена газом с малой плотностью и высокой температурой, обусловленными или вязкой диссипацией энергии, или сильным повышением энтропии газа при прохождении через отошедшую от притупления ударную волну с большим наклоном, или обеими причинами одновременно.

При больших числах Рейнольдса $R_l = \rho_\infty U l / \mu_\infty$, где ρ_∞ , μ_∞ , U — соответственно плотность, вязкость и скорость набегающего потока, l — характерная длина тела, первоначально образуется невязкий высокоэнтропийный слой. Обычный пограничный слой, обусловленный прилипанием, развивается вначале внутри высокоэнтропийного, а затем на некотором расстоянии от носка заполняет его полностью и выходит за его пределы.

Это расстояние уменьшается с уменьшением числа $R_d = \rho_\infty U d / \mu_\infty$, где d — диаметр мидаля притупления. При дальнейшем уменьшении числа R_d (и увеличении числа Маха M набегающего потока) течение между притуплением и отошедшей ударной волной становится полностью вязким [5], и в этом случае течение в высокоэнтропийном слое будет вязким всюду. Кроме того, при уменьшении числа R_d вследствие сильной завихренности потока, прошедшего через ударную волну с большим наклоном, вязкость и теплопроводность газа могут влиять на его движение в высо-

коэнтропийном слое уже независимо от условия прилипания [6]. В этих условиях уже невозможно провести различие между собственно пограничным слоем, образующимся вследствие прилипания частиц к поверхности тела, и остальной частью высокоэнтропийного слоя, однако в любом случае высокоэнтропийный слой обладает рядом общих свойств, позволяющих применить к нему общий подход.

Пусть xl и rl — система координат, расположенная вдоль и нормально оси тела, с центром в носке, uU и vU — составляющие скорости по этим осям, $\rho_\infty U^2 r$ и $U^2 i$ — давление и удельная энтальпия, α — порядок угла наклона ударной волны, β — относительная толщина тела. Тогда, очевидно, будем иметь $u \sim 1$, $p \sim \alpha^2$, $v \sim \alpha$, $r \sim \alpha$ и $x \sim 1$ во всей возмущенной области течения и $u \sim 1$, $i \sim \alpha^2$ в ударном слое. Заметим, что в высокоэнтропийном слое при высоких температурах может быть $1 - u \sim u$ и предположение $u \sim 1$ не будет здесь иметь места [7].

В дальнейшем примем, что уравнение состояния газа в высокоэнтропийном слое и законы изменения вязкости $\mu_\infty \mu$ и числа Прандтля σ имеют вид

$$\frac{p}{p_0} = \frac{p}{p_0} f_1(i), \quad \frac{\mu}{\mu_0} = C f_2(i), \quad \sigma = \sigma(i) \quad \left(C = \text{const} \sim 1, f_1 \sim \frac{i}{i_0}, i_0 \approx \frac{1}{2} \right) \quad (1.1)$$

Здесь индекс 0 относится к величинам в точке торможения за прямым скачком уплотнения.

Из проекции уравнения движения на ось r для перепада давления поперек высокоэнтропийного слоя и из уравнения сохранения массы для отношения λ расходов через высокоэнтропийный слой и всю возмущенную область следует

$$\frac{\Delta p}{p} \sim \frac{\alpha \delta}{l} \frac{p}{p} \sim \frac{p_0}{p_0} \frac{\alpha \delta}{l} \frac{i_0}{i}, \quad \lambda \sim \rho \frac{\delta}{\alpha l} \left(\frac{\beta l + \delta}{\alpha l} \right)^\nu \quad (1.2)$$

Здесь δ — толщина высокоэнтропийного слоя. В вязком высокоэнтропийном слое энтальпия имеет порядок энтальпии торможения даже при интенсивном охлаждении поверхности тела. В невязком случае введем для удобства эффективный показатель адиабаты γ_0 , пригодный для оценок величин при высоких температурах (для диссоциированного воздуха $\gamma_0 = 1.1 \div 1.3$). Тогда в предельных случаях вязкого и невязкого высокоэнтропийного слоя будем соответственно иметь ¹

$$i \sim i_0, \quad p \sim p_0 \alpha^2; \quad i \sim i_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{(\gamma_0 - 1)/\gamma_0}, \quad p \sim p_0 \alpha^{2/\gamma_0} \quad (1.3)$$

С учетом (1.3) из первого соотношения (1.2) следует, что при $\alpha \ll 1$ с точностью не менее, чем $p_0 \alpha^{2/\gamma_0}$ давление поперек высокоэнтропийного слоя можно считать постоянным. Из второго соотношения (1.2) при $\alpha \ll 1$ имеем $\lambda \ll 1$ и, следовательно, $\alpha \sim M^{-1} + \beta + \delta / l$. Таким образом, основная масса возмущенного газа находится вне высокоэнтропийного слоя. Очевидно, что α мала в том случае, если малы величины M^{-1} , β и δ / l .

¹ Во многих случаях порядок величин в высокоэнтропийном слое будет один и тот же для вязкого и невязкого случаев, так как вследствие малости разности $\gamma_0 - 1$ можно считать $\alpha^{2(\gamma_0 - 1)/\gamma_0} \sim 1$, если только величина α не исчезающе мала.

Порядок толщины полностью вязкого высокоэнтропийного слоя определяется путем обычных оценок пограничного слоя. Эта толщина будет иметь максимальный порядок при $\alpha \sim \delta / l$. В этом случае будем иметь

$$\frac{\delta}{l} \sim \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\mu_0}{\rho_0 R_l} \right)^{1/2} \sim \left(\frac{\mu_0}{\rho_0 R_l} \right)^{1/4} \quad (1.4)$$

Толщина полностью невязкого высокоэнтропийного слоя определяется из условия постоянства расхода через его сечение. Этот расход имеет порядок $\pi^v \rho_\infty U d^{1+v}$, поэтому, полагая, как и в предыдущем случае, $\alpha \sim \delta / l$, будем иметь

$$\frac{\delta}{l} \sim \frac{\alpha^{-2/\gamma_0} d^{1+v}}{\rho_0 l (l\beta + \delta)^v} \sim \rho_0^{-m} \left(\frac{d}{l} \right)^{m_0(1+v)}, \quad m_0 = \gamma_0 [2 + \gamma_0 (1 + v)]^{-1}$$

Таким образом, величина α при малых M^{-1} и β будет мала, если

$$\left(\frac{\mu_0}{\rho_0 R_l} \right)^{1/4} \ll 1, \quad \left(\frac{d}{l} \right)^{m_0(1+v)} \ll 1 \quad (1.6)$$

2. Примем, что газ в ударном слое имеет тот же постоянный показатель адиабаты γ , что и в набегающем потоке. Введем величины

$$P = \frac{p}{\alpha^2}, \quad V = \frac{v}{\alpha}, \quad y = \frac{r}{\alpha}, \quad y_0 = \frac{r_0}{\alpha}$$

Здесь $r_0 = r_0(x)$ — форма поверхности ударной волны. Тогда уравнения движения газа в ударном слое и соотношения на скачке уплотнения примут вид:

$$\frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial x} (\rho y^v) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho y^v V) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \frac{P}{\rho^\gamma} + V \frac{\partial}{\partial y} \frac{P}{\rho^\gamma} = 0 \quad (2.1)$$

$$P = \frac{1}{\gamma \theta_\alpha^2} + y_0'^2 \left(1 - \frac{1}{\rho} \right), \quad V = y_0' \left(1 - \frac{1}{\rho} \right) \\ \frac{1}{\rho} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2}{\gamma + 1} \frac{1}{y_0'^2 \theta_\alpha^2} \quad (\theta_\alpha = M\alpha) \quad (2.2)$$

В общем случае движение газа в высокоэнтропийном слое должно описываться уравнениями Навье — Стокса; если при этом влияние вязкости не существенно, то вязкие члены автоматически выпадут из уравнений. Но при малых α с точностью не менее, чем α^2 , вязкая группа членов этих уравнений может обычным путем быть упрощена, и при постоянном давлении поперек высокоэнтропийного слоя уравнения, описывающие движение газа в нем, сведутся к обычным уравнениям пограничного слоя

$$y^v \frac{P}{f_1} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + V \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -k y^v \frac{dP}{dx} + N \frac{\partial}{\partial y} \left(y^v f_2 \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{P}{f_1} y^v u \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{P}{f_1} y^v V \right) = 0 \quad (2.3) \\ y^v \frac{P}{f_1} \left(u \frac{\partial i}{\partial x} + V \frac{\partial i}{\partial y} \right) = k y^v u \frac{dP}{dx} + N \frac{\partial}{\partial y} \left(y^v \frac{f_2}{\sigma} \frac{\partial i}{\partial y} \right) + N y^v f_2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \\ \left(k = \frac{\rho_0}{\rho_0}, \quad N = \frac{k\chi^2}{\theta_\alpha^4}, \quad \chi = \frac{M^2 \mu_0^{1/2}}{(R_l / C)^{1/2}} \right)$$

На поверхности тела будем требовать выполнения условий

$$u = V = 0, \quad i = i_w(x) \quad \text{или} \quad \frac{\partial i}{\partial y} = q(x) \quad (2.4)$$

Так как в возмущенной области $y \sim 1$, то на некотором удалении от носка тела в уравнении формы тела $r = \beta r_w(x) + d/2l$ можно опустить последний член и удовлетворять условиям (2.4) на поверхности

$$r = \beta r_w(x) \quad (r(0) = 0) \quad \text{при} \quad d \ll 2\alpha l \quad (2.5)$$

В ударном слое $i \sim \alpha^2$, в то время как, согласно (1.3), в высокоэнтропийном слое $i \gtrsim i_0 \alpha^{2(\gamma_0-1)/\gamma_0}$; поэтому на границе высокоэнтропийного слоя $r = r_\delta(x)$ так же, как и в работе [2], можно принять условия

$$u \approx 1, \quad i \approx 0, \quad V_+ = V_- \quad \text{при} \quad y = y_\delta = \frac{r_\delta}{\alpha} \quad (2.6)$$

Здесь V_+ и V_- — значения функции V при стремлении к границе $y_\delta(x)$ изнутри и извне высокоэнтропийного слоя.

В случае полностью вязкого высокоэнтропийного слоя его граница с ударным слоем определяется достаточно четко [2,4]. В невязком случае эта граница носит более условный характер; в качестве ее может быть взята линия тока, пересекающая ударную волну в какой-либо точке ее переходного участка, разделяющего области с $\alpha \sim 1$ и $\alpha \ll 1$. Очевидно, что этот переходный участок не может иметь большую протяженность и ограничивается окрестностью носка тела, так что для тел с отношением $d/l \ll 1$ можно полагать, что в начальном сечении $x \approx 0$ происходит отрыв ударной волны от высокоэнтропийного слоя; всю возмущенную область при $x \approx 0$ следует отнести к высокоэнтропийному слою, хотя условия $\delta \ll l$ и $\lambda \ll 1$ не будут здесь выполняться, и уравнения (2.3) могут быть неприменимы.

3. При учете влияния притупления малых, но конечных размеров так же, как и в работе [1], будем исходить из предположения, что для определенности решения достаточно удовлетворить в начальном сечении $x \approx 0$ законам сохранения в интегральной форме, а влияние конкретного начального распределения параметров на основные характеристики течения затухает на некотором удалении от носка. При такой схеме решения параметры, характеризующие роль начальных данных, должны определяться из уравнений, записанных в интегральной форме. Эти уравнения для высокоэнтропийного слоя имеют вид

$$\begin{aligned} \delta_1^{**} &= \frac{1}{2} K_\alpha + \int_{y_w}^{y_\delta} P y^\nu dy - \int_0^x P (y_\delta^\nu y_\delta' - y_w y_w') dx + \frac{N}{k} \int_0^x \left(y^\nu f_2 \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=y_w} dx \\ \vartheta_1 &= L_\alpha + \frac{N}{k} \int_0^x \left(y^\nu \frac{f_2}{\sigma} \frac{\partial i}{\partial y} \right)_{y=y_w} dx \\ \delta_1^{**} &= \frac{(\delta^{**})^{1+\nu}}{\alpha^{3+\nu}}, \quad \vartheta_1 = \frac{\vartheta^{1+\nu}}{\alpha^{3+\nu}}, \quad y_w = \frac{\beta}{\alpha} r_w, \quad i_* = i + \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} \quad (3.1) \\ (\delta^{**})^{1+\nu} &= \int_{r_w}^{r_\delta} \rho u r^\nu (1-u) dr, \quad \vartheta^{1+\nu} = \int_{r_w}^{r_\delta} \rho u r^\nu (i_0 - i_*) dr \end{aligned}$$

Здесь $l\delta^{**}$ и $l\vartheta$ — обычные в теории пограничного слоя толщины потери импульса и полной энтальпии. При выводе первого уравнения (3.1) не принята во внимание малая (порядка α^2) величина потерянного в ударном слое импульса газа, втекающего в высокоэнтропийный слой.

Постоянные K_α и L_α определяются из законов сохранения количества движения и энергии, применяемых к области D , ограниченной сечением $x \approx 0$ и передней частью ударной волны, и имеют вид

$$K_\alpha = \frac{1}{2^\nu} C_x \alpha^{-(3+\nu)} \left(\frac{d}{2l}\right)^{1+\nu}, \quad L_\alpha = \frac{1}{2^\nu} C_q \alpha^{-(3+\nu)} \left(\frac{d}{2l}\right)^{1+\nu} \quad (3.2)$$

$$C_x = c_x + c_\tau, \quad C_q = \frac{Q(2/d)^{1+\nu}}{\pi^\nu \rho_\infty U^3}$$

Здесь C_x , c_x и c_τ — соответственно коэффициенты полного, волнового и вязкого сопротивления носка тела; Q — количество тепла, теряемого газом в единицу времени при прохождении области D , C_q — среднее число Стантона носка. При этом мы пренебрегли давлением в набегающем потоке по сравнению с давлением на поверхности носка.

Пусть δ_0 и $u_0 U$ — соответственно толщина вязкого слоя на притуплении и характерная скорость газа на его внешней границе, ϑ — характерный угол поверхности притупления с направлением набегающего потока. Тогда при $\sigma \sim 1$ будем иметь

$$\frac{\delta_0}{d} \sim R_0^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{\mu_0}{\rho_0 u_0 R_d}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad c_\tau \sim u_0 C_q \cos \vartheta, \quad C_q \sim \frac{\rho_0 u_0}{R_0^{1/2}} = \frac{\rho_0 u_0 \Delta}{d} \frac{\delta_0}{\Delta} \quad (3.3)$$

Если все течение между поверхностью притупления и ударной волной вязкое, т. е. $\delta_0 \sim \Delta$, то величина $u_0 U$ будет совпадать с касательной составляющей скорости за ударной волной в точке, отстоящей от оси на расстоянии порядка $1/2 d$. Величина Δ при этом имеет тот же порядок [5], что и в невязком случае¹, поэтому в зависимости от величины угла ϑ согласно работе [8] будем иметь² при $\rho_0 \gg 1$

$$u_0 \sim 1, \quad \rho_0 \Delta \sim 1, \quad (\mu_0 / R_d)^{1/2} \sim k^{1/2} \quad \text{при } \cos \vartheta \sim 1$$

$$u_0 \sim k^{1/2}, \quad \Delta \sim k^{1/2}, \quad (\mu_0 / R_d)^{1/2} \sim k^{1/4} \quad \text{при } \cos \vartheta \ll 1 \quad (3.4)$$

Таким образом, в этом случае $C_q \sim 1$ и при $\cos \vartheta \sim 1$ величина $c_\tau \sim 1$, т. е. вязкое сопротивление носка при $\delta_0 \sim \Delta$ может быть одного порядка с волновым.

Относительный вклад притупления и боковой поверхности в теплообмен и сопротивление трения характеризуется соответственно параметрами ω_q и ω_τ , имеющими согласно (1.4) и (3.3) порядки

$$\omega_q \sim \frac{u_0^{1/2}}{\alpha} \left(\frac{d}{l}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{\beta l}{\alpha}\right)^{-\nu}, \quad \omega_\tau \sim u_0 \omega_q \cos \vartheta \quad (3.5)$$

Относительное влияние на сопротивление притупления и трения на боковой поверхности характеризуется параметром

$$\omega_0 \sim C_x \left(\frac{R_l}{\mu_0 \rho_0}\right)^{1/2} \frac{d}{\alpha l} \left(1 + \frac{\beta l}{d}\right)^{-\nu}$$

Движение газа в высокоэнтропийном слое полностью описывается уравнениями (2.3) или (3.1), поэтому уравнение импульсов в направлении, перпендикулярном к оси тела, не является для этой области существенным. Отношение величин количества движения газа по нормали к оси тела в высокоэнтропийном и ударном слоях имеет порядок отношения рас-

¹ По крайней мере до тех пор, пока толщина ударной волны пренебрежимо мала по сравнению с величиной Δ .

² Случай $\cos \vartheta \sim 1$ соответствует телам типа сферы, а случай $\cos \vartheta \ll 1$ — телам типа плоского диска, перпендикулярного к направлению набегающего потока.

ходов $\lambda \ll 1$. Следовательно, если импульс, сообщаемый в этом направлении газу притуплением, равный для перпендикулярного к направлению набегающего потока слоя единичной ширины (и на единицу угла между меридиональными плоскостями в осесимметричном случае) величине $I (1/2d)^{1+\nu} \rho_\infty U$, оказывает влияние на движение в целом, то этот импульс должен входить в соответствующее интегральное уравнение для ударного слоя, имеющее вид

$$\int_{y_8}^{y_0} \rho V y^\nu dy = J_\alpha + \int_0^x \left[P(y_8) y_8^\nu + \int_{y_8}^{y_0} P dy \right] dx \quad \left(J_\alpha = \frac{I}{\alpha^{2+\nu}} \left(\frac{d}{2l} \right)^{1+\nu} \right) \quad (3.6)$$

Параметры K_α и J_α аналогичны полученным Г. Г. Черным [1].

Таким образом, учет влияния вязкости не связан с появлением новых по сравнению с невязким случаем) параметров, обусловленных притуплением. Теплообмен поверхности носка с набегающим потоком приводит к появлению нового определяющего параметра L_α ; для теплоизолированного носка $L_\alpha = 0$, если в области D отсутствуют другие источники или поглотители энергии (свечение газа, вдув охладителя и т. д.).

4. Полученные уравнения и граничные условия содержат параметры

$$\gamma, \theta_\alpha, \chi, k, K_\alpha, L_\alpha, J_\alpha \quad (4.1)$$

Параметр β / α определяется в процессе решения и является функцией параметров (4.1), так что последние могут быть сведены к следующим:

$$\gamma, \theta, \chi, k, K, L, J \quad (4.2)$$

$$\left(\theta = M\beta, K = \frac{1}{2^\nu} \frac{C_x}{\beta^{3+\nu}} \left(\frac{d}{2l} \right)^{1+\nu}, L_\alpha = \frac{1}{2^\nu} \frac{C_q}{\beta^{3+\nu}} \left(\frac{d}{2l} \right)^{1+\nu}, J = \frac{I}{\beta^{2+\nu}} \left(\frac{d}{2l} \right)^{1+\nu} \right)$$

Параметры (4.2) при сделанных допущениях будут полной системой параметров подобия обтекания гиперзвуковым потоком вязкого, теплопроводного газа различных притупленных тел с одинаковой формой поверхности $r_w(x)$ и одинаковыми условиями (2.4) для энтальпии.

Для тел с пренебрежимо малой величиной притупления, т. е. при $K_\alpha \approx L_\alpha \approx J_\alpha \approx 0$, параметры K, L и J выпадают из системы (4.2). При этом условия подобия (4.2) отличаются от полученных в работе [2] лишь более общей формой уравнений (1.1), вследствие чего несколько изменился параметр χ и появился новый параметр k (в работе [2] $k = k(\gamma)$).

Система (4.1) содержит три параметра K_α, L_α и J_α , или эквивалентные им $K_\alpha, I\alpha / C_x$ и C_q / C_x , характеризующие влияние притупления. Величины c_x и I зависят от параметра k и формы притупления, а величины c_τ и C_q еще от параметра $(\mu_0 / R_d)^{1/2}$. Отсюда легко сделать вывод, что при постоянных первых пяти параметрах (4.1) или (4.2) по существу почти не остается степеней свободы, кроме формы притупления, для удовлетворения последним критериям подобия $I\alpha / C_x = \text{const}$ и $C_q / C_x = \text{const}$.

Однако, если ограничить класс рассматриваемых случаев условием

$$K_\alpha \lesssim \alpha^{-m} \quad (m > 0) \quad (4.3)$$

и в вязком осесимметричном случае условием $\alpha^n \sim \beta \gtrsim d/l$, то (при $C_x \sim 1$) будем иметь¹

$$J_\alpha \sim \alpha^{1-m} \ll 1, \quad \omega_q \lesssim \alpha^{m_1 + \nu(1-n)} \ll 1 \quad \text{при} \quad m < 1, \quad \frac{8-3m}{4} > n \gtrsim 1$$

$$\left(m_1 = \frac{1-m+(3-2m)\nu}{2(1+\nu)} \right)$$

Следовательно, J и L можно исключить из системы критериев подобия (4.2). Заметим, что среди оставленных параметров по существу не содержится новых по сравнению с введенными ранее [1,2] при рассмотрении частных предельных случаев приведенного закона подобия.

Из общих формул для коэффициентов теплопередачи и трения легко получить, что при удовлетворении условиям подобия сохраняются величины c_q/α^3 и c_f/α^3 , где c_q и c_f — величины местного теплового потока и трения на поверхности, отнесенные соответственно к $\rho_\infty U^3$ и $\rho_\infty U^2$.

5. Для вязкого высокоэнтропийного слоя интегральный способ удовлетворения условиям в окрестности носка может быть оправдан влиянием вязкости и теплопроводности, которые будут сглаживать различия в начальном распределении параметров в высокоэнтропийном слое, так что решающую роль на некотором удалении от носка будут играть интегральные характеристики начальных условий. При больших числах Рейнольдса, когда высокоэнтропийный слой частично невязкий, различие в распределении энтропии газа в нем по линиям тока будет сохраняться вне пограничного слоя на большом расстоянии от носка до тех пор, пока пограничный слой не заполнит высокоэнтропийный слой полностью. При этом на границе пограничного слоя уже не выполняются условия $i \approx 0$, $u \approx 1$ и его характеристики зависят от распределения энтропии вдоль его внешней границы.

В этой связи рассмотрим подробнее условия подобия распределения параметров в частично или полностью невязком высокоэнтропийном слое, которое должно, очевидно, заключаться в совпадении в подобных случаях профилей $i(x, y)$ и $u(x, y)$. В пограничном слое влиянием условий при $x \approx 0$ можно, очевидно, пренебречь, поэтому, как это следует из уравнений (2.3), подобие в пограничном слое будет иметь место при одинаковых граничных значениях функций $i = i_1(x)$ и $u = u_1(x)$ на его внешней границе $y = y_1(x)$. В невязкой части, где течение изэнтропично, распределение функций $i(x, y)$ и $u \approx (1 - 2i)^{1/2}$ будет одинаковым в подобных случаях, если будет одинаковым распределение энтропии $s(x, y)$ и давления $p(x, y)$. В общем случае совпадение функций $p(x, y)$ не будет иметь места, однако этим можно пренебречь вследствие слабой зависимости энтальпии от давления. Действительно, имеем

$$i \approx \frac{1}{2} p^{(\gamma_0-1)/\gamma_0} (\sin \varepsilon)^{2/\gamma_0}$$

где ε — угол наклона ударной волны в точке пересечения ее данной линией тока. Так как разность $\gamma_0 - 1$ мала, особенно для воздуха при вы-

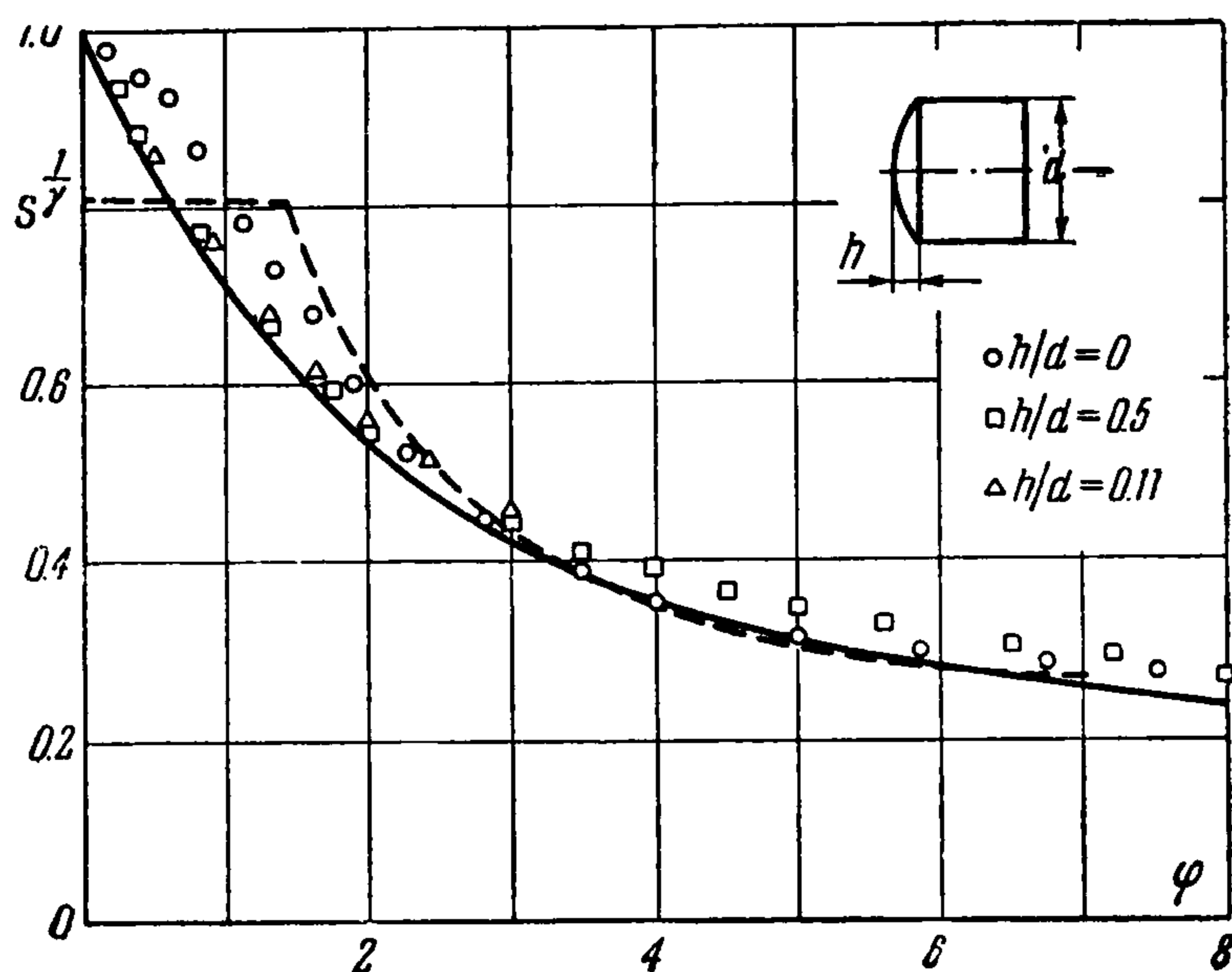
¹ Из условия $K_\alpha \lesssim \alpha^{-m}$ автоматически следует $d/\alpha l \lesssim \alpha^{(2-m)/(1+\nu)} \ll 1$, так что это условие будет, вообще говоря, большим ограничением для области применимости закона подобия по сравнению с принятым ранее условием $d \ll \alpha l$.

соких температурах, то функция i весьма слабо зависит от p и при $\gamma_0 \rightarrow 1$ эта зависимость пропадает совсем. Поэтому, принимая условие $\gamma_0 - 1 \ll 1$ в качестве дополнительного ограничения, будем считать, что энтальпия и скорость в высокоэнтропийном слое зависят лишь от энтропии ¹. В дальнейшем будем полагать $s = \sin^2 \varepsilon$.

Пусть далее $\psi r_\infty U (1/2d)^{1+\nu}$ — расход газа между поверхностью тела и рассматриваемой точкой, тогда имеем

$$\varphi = \frac{\psi}{C_x} = \frac{P}{kK} \int_{y_w}^y \frac{u}{f_1(i)} y^\nu dy \quad (5.1)$$

$$y^{1+\nu} - y_w^{1+\nu} = \frac{2^\nu kK}{P} \int_0^\varphi \frac{f_1(i)}{u} d\varphi$$



Фиг. 1

Если при фиксированных значениях параметров подобия функции $u(x, y)$ и $i(x, y)$ будут универсальными функциями своих переменных, то универсальными будут также функция $s(x, y)$ и согласно (5.1) функция $\varphi(x, y)$. Но так как при различных формах носка зависимость $s(\psi) = s(C_x \varphi)$ будет, вообще говоря, различной, то из универсальности функций $s(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ в невязкой части высокоэнтропийного слоя следует, что в подобных случаях должна быть одинаковой функция $s(\varphi)$.

Наоборот, если в подобных случаях в невязкой части высокоэнтропийного слоя функция $s(\varphi)$, а, следовательно и функции $i(\varphi)$ и $u(\varphi)$ будут одинаковыми, то, очевидно, будут одинаковыми функции $i(x, \varphi)$ и $u(x, \varphi)$ в пограничном слое и его граница ² $\varphi = \varphi_1(x)$. Следовательно, согласно (5.1) функции $i(x, y)$ и $u(x, y)$ в высокоэнтропийном слое будут универсальными функциями своих переменных во всех подобных случаях.

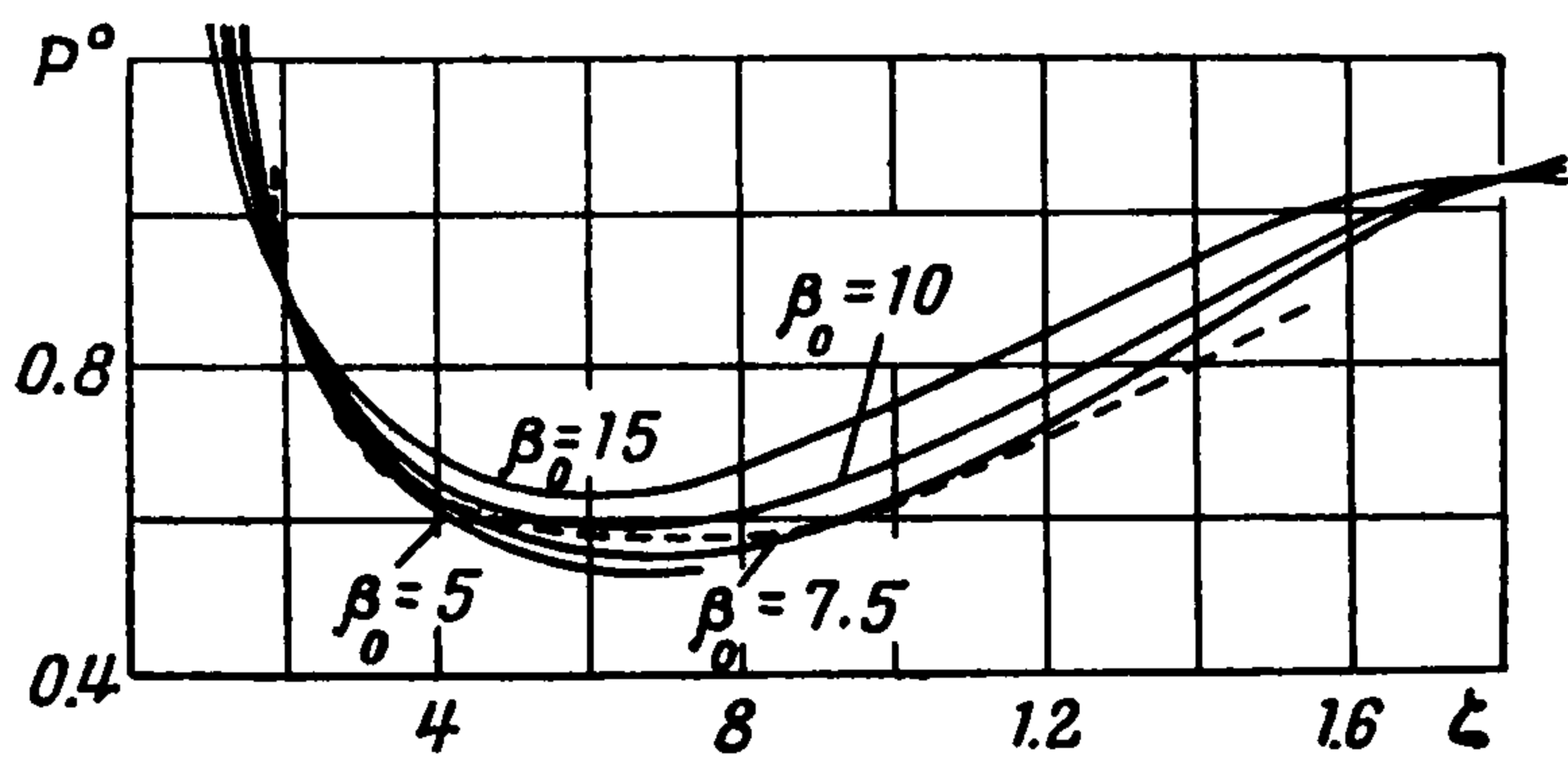
Таким образом, полученный закон подобия сохраняет силу во всей возмущенной области течения (за исключением, может быть, некоторой промежуточной области между высокоэнтропийным и ударным слоями), если $\gamma_0 - 1 \ll 1$, а функция $s(\varphi)$ одинакова в подобных случаях.

При больших числах Рейнольдса величина C_x и форма ударной волны зависят лишь от параметра k , так что при неизменной форме притупления функция $s(\varphi)$ будет одинаковой в подобных случаях. Можно предполагать, что при равных k и одинаковых функциях $s(\varphi)$ для различных притуплений (при наличии отошедшей ударной волны или при $\varphi \gtrsim 1$) не будут сильно отличаться одна от другой. Подтверждением может служить фиг. 1, где приведены для различных тупых тел экспериментальные (взятые из различных источников) и расчетные (сплошная линия — сфера, пунктир — тупой конус с углом полураствора 50°) значения функ-

¹ Точнее для подобия течения в высокоэнтропийном слое в различных случаях $\alpha = \alpha_1$ и $\alpha = \alpha_2$ необходимо выполнение условия $(\alpha_1/\alpha_2)^{2(\gamma_0-1)/\gamma_0} \approx 1$, так что при $\alpha_1 \approx \alpha_2$ (например при обтекании тел, отличающихся лишь формой носка при прочих одинаковых условиях) условие $\gamma_0 - 1 \ll 1$ не будет обязательным.

² Эта граница определяется из условия гладкости профилей i и u .

ции $s(\varphi)^{1/\gamma}$ при $M = 6, \gamma = 1.4$. Как видно, все значения достаточно близки между собой, несмотря на большое различие в форме тел. Это свойство универсальности функции $s(\varphi)$ должно быть, конечно, про-



Фиг. 2

верено при меньших значениях k прежде, чем делать выводы о пределах применимости закона подобия¹. Можно ожидать, что различие в функциях $s(\varphi)$ и зависимость i от давления не будут особенно влиять на подобие основных характеристик пограничного слоя

(c_q, c_f , толщина вытеснения δ^*). В этом легко убедимся, сделав вполне приемлемое для качественных выводов предположение, что эти характеристики зависят лишь от местных условий. Полагая $f_1 = f_2$ и (для определения δ^*) $\rho\mu = \text{const}, \sigma = 1$, имеем

$$\frac{c_q}{\alpha^3} = \frac{A_1 u_1^{1/2} x^{1/2} \chi}{(kP)^{1/2} \Theta_\alpha^2} \quad \frac{c_f}{\alpha^3} = \frac{A_2 x^{1/2} u_1^{3/2} \chi}{(kP)^{1/2} \Theta_\alpha^2} \quad (5.2)$$

$$\frac{\delta^*}{\alpha l} = A_3 x^{1/2} (i_1 + 0.78 - 0.65 i_w) \chi \frac{k^{1/2} P^{-1/2}}{\Theta_\alpha^2 u_1^{1/2}}$$

Здесь A_1, A_2, A_3 — коэффициенты². Легко видеть, что формулы (5.2) сравнительно слабо зависят от i_1 при i_1/i_0 , не слишком близком к единице, так что различие в $s(\varphi)$ и p действительно мало отражается на характеристиках пограничного слоя. Заметим, что с ростом γ_0 функция i_1 убывает, и согласно (5.2) подобие характеристик пограничного слоя будет все меньше зависеть от разности $\gamma_0 - 1$ и универсальности функции $s(\varphi)$.

Что касается влияния различия в функциях $s(\varphi)$ на распределение давления по телу в случае невязкого высокоэнтропийного слоя, то оно будет относительно мало, так как в формуле (5.1) для определения толщины высокоэнтропийного слоя функция $s(\varphi)$ входит под интеграл, что должно уменьшить суммарное влияние отклонения ее от универсальной.

Есть все основания предполагать, что вследствие влияния вязкости и теплопроводности, которые сглаживают различия в условиях вблизи носка и, по-видимому, более узкой промежуточной зоны между слоями, точность закона подобия будет выше в случае вязкого высокоэнтропийного слоя. Поэтому некоторое представление о точности закона подобия может дать фиг. 2, где нанесены полученные точными численными расчетами для невязкого газа при $\gamma = \gamma_0 = 1.4$ и $M = \infty$ кривые распределения давления по образующим конусов с сферическим носком и различными углами полураствора β_0 и (пунктир) с носком в форме конуса с углом

¹ При $k \rightarrow 0$ ударная волна в своей передней части принимает форму обтекаемого тела. Однако отличие формы ударной волны от предельной исчезает лишь вместе с $k^{1/2}$ (особенно для тел с $\cos \varphi \ll 1$) и для практически интересных значений $k \gtrsim 0.05$ может быть существенным, так что весьма вероятно, что функции $s(\varphi)$ будут близки к универсальным при этих условиях и для $\varphi \leq 1$.

² При помощи этих коэффициентов можно учесть предысторию пограничного слоя, т. е. распределение функции $P(x)$ по поверхности тела, форму тела и т. д.

полураствора 50° и $\beta_0 = 10^\circ$. В этом случае характерный размер l отсутствует и в координатах $P^\circ = p / \beta_0^2$ и $\zeta = (2^3 / C_x)^{1/2} \beta_0^2 l / d$ кривые $P^\circ(\zeta)$ должны совпадать для всех конусов [1]. Представленные кривые действительно достаточно близки между собой, несмотря на то, что величины давления и области влияния носка различаются при $\beta_0 = 5$ и 15° в 9 раз. Некоторое различие между кривыми для различных β_0 можно, видимо, объяснить, нарушением подобия в высокоэнтропийном слое вследствие недостаточной малости разности $\gamma_0 - 1$; при этом толщина высокоэнтропийного слоя δ убывает с ростом α медленней, чем при $\gamma_0 = 1$, так как $\delta \approx p^{-1/\gamma_0}$, что приводит соответственно к увеличению $P^\circ(\zeta)$.

Автор благодарит В. Г. Павлова за большую помощь в расчетах.

Примечание при корректуре. Недавно опубликована работа [9], где для совершенного газа при $\sigma = \text{const}$ и $\mu \sim i^n$ получены те же критерии подобия, что и в п. 4 нашей работы с той разницей, что вместо параметров K, χ и θ используются их комбинации. Параметры L и I в работе [9] не вводятся и условия, при которых их можно опустить, не рассматриваются.

Чтобы избежать трудностей, связанных с рассмотрением течения в высокоэнтропийном слое и свести вывод закона подобия к суммированию известных ранее результатов [1-4], авторы работы [9] предполагают, что для невязкого высокоэнтропийного слоя можно принять условие $u \approx 1$. Однако это условие во многих случаях не выполняется (например, на поверхности затупленного клина с $\beta = 10^\circ$ величина $u \approx 0.5 \div 0.8$ при $\gamma_0 = 1.1 \div 1.4$).

Кроме того, предположение $u \approx 1$ еще не исключает зависимости толщины высокоэнтропийного слоя, а следовательно и величин P и V во всей возмущенной области, от распределения энтропии (кроме случая [9] $\gamma = \gamma_0 \rightarrow 1$, несовместимого с предположением $u \approx 1$, так как $u \rightarrow 0$ при $\gamma_0 \rightarrow 1$).

В данной работе показано, что выполнение приведенных в п. 4 и в работе [9] критериев подобия недостаточно для подобия течения в невязком случае, для этого необходима еще универсальность распределения энтропии $s(\varphi)$. В рамках взрывной аналогии $s = \text{const} \varphi^{-1}$ при обтекании тупых цилиндра или пластины. Так как эта аналогия применима лишь на больших расстояниях от носка, то факт универсальности функции $s(\varphi)$ вблизи носка (фиг. 1) является весьма примечательным.

Поступила 3 VIII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Черный Г. Г. Течение газа с большой сверхзвуковой скоростью. Физматгиз, М., 1959.
2. Лунев В. В. О подобии при обтекании тонких тел вязким газом при больших сверхзвуковых скоростях. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. I.
3. Cheng H., Similitude of Hypersonic Real-Gas Flows Over Slender Bodies With Blunted Noses, JAS, 1959, № 9.
4. Hays W. and Probstein R. Viscous Hypersonic Similitude JAS, 1959, № 12.
5. Adams M. and Probstein R. On the Validity of Continuum Theory for Satellite and Hypersonic Flight Problems at High Altitude. Jet Propulsion, 1958, № 2.
6. Ферри А. Влияние кривизны ударной волны на поведение гиперзвукового пограничного слоя. Доклад на Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике. М., 1960. Механика, сб. иностр. переводов, 1960, № 5.
7. Лунев В. В. О движении в атмосфере затупленного тела с большими сверхзвуковыми скоростями. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1959, № 4.
8. Serbin H. The Speed Flow of Gas Around Blunt Bodies. The Aeronautical Quarterly, 1958, v. 9, № 4.
9. Cheng H., Hall T., Golian T., Hertzberg A. Boundary — Layer Displacement and Leading — Edge Bluntness Effects in High — Temperature Hypersonic Flow. JAS, 1961, № 5.