Прикладная математика и механика. Том XXV, 1961
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

О СТРУКТУРЕ УДАРНЫХ ВОЛН

Г. Я. Любарский
(Харьков)

Хорошо известно, что уравнения гидродинамики и магнитной гидродинамики допускают разрывные решения, если положить коэффициенты вязкости и теплопроводности равными нулю: $\eta = 0$, $\chi = 0$, а проводимость считать бесконечно большой: $\sigma = \infty$. Скачки этих решений удовлетворяют определенным алгебраическим соотношениям.

С другой стороны, при достаточно точной записи уравнений разрывные решения уступают место непрерывным. Если такое непрерывное решение стремится при $\eta \to 0$, $\chi \to 0$, и $\sigma \to \infty$ к разрывному, то его называют ударной волной. При достаточно малых значениях η, χ и σ^{-1} ударную волну можно заменить скачком. Однако не всякий скачок, удовлетворяющий указанным алгебраическим соотношениям, является пределом ударной волны. Поэтому, пренебрегая диссипативными коэффициентами η, χ и σ^{-1}, следует учитывать только те разрывные решения, которые являются пределами непрерывных решений. Скачки таких разрывных решений условимся называть допустимыми.

Для того чтобы отличить допустимый скачок от недопустимого, в настоящее время существует два метода. Согласно первому методу для установления допустимости данного скачка следует доказать существование соответствующей ударной волны [1,2] или даже вычислить ее [3-6]. Второй метод [7-11] опирается на тот факт, что некоторые скачки под действием бесконечно малого возмущения расщепляются на несколько расходящихся скачков. Такие неустойчивые относительно расщепления (неэволюционные) скачки считаются недопустимыми. Остальные скачки предполагаются допустимыми [1]. Практика решения некоторых задач (см., например, [12-16]) показала, что оставшихся скачков как раз достаточно, чтобы задача Коши имела решение и притом единственное.

Пока что имеются лишь отдельные указания на то, что обе изложенные точки зрения должны приводить к одинаковым результатам [1-2].

В предлагаемой статье этот вопрос рассматривается применительно к так называемым диссипативным системам уравнений, частным случаем которых являются уравнения обычной и магнитной гидродинамики. Оказывается, что условие устойчивости относительно расщепления является необходимым для того, чтобы скачку соответствовала единственная (с точностью до сдвига) ударная волна.

Выясняется также, в каких случаях профиль ударной волны содержит скачки. Это явление было обнаружено Маршаллом [4] и рассматривалось в работе Уитхема [5], с которой предлагаемая статья имеет ряд точек соприкосновения.

1. Диссипативные системы. Рассмотрим систему квазилинейных уравнений следующего вида

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} A_j(u) = \sigma_j \psi_j(u) \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

где $A_j(u) \equiv A_j(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ и $\psi_j(u)$ — дифференцируемые функции своих аргументов; кроме того, $\psi_j(u) \equiv 0$, если $j \leqslant m$ $(m < n)$.

---

[1] Пусть $V_1^- \leqslant V_2^- \leqslant \ldots \leqslant V_n^-$ — фазовые скорости малых возмущений в области слева от фронта волны, $V_1^+ \leqslant V_2^+ \leqslant \ldots \leqslant V_n^+$ — те же величины в области справа от волны. Обозначим через $n_-(n_+)$ число тех фазовых скоростей $V_j^-(V_j^+)$, которые меньше (больше), чем скорость фронта волны U. Для устойчивости скачка относительно расщепления необходимо, чтобы $n_- + n_+ = n - 1$.

Равенство $u = u^\circ$ (u° — постоянный вектор) определяет постоянное и однородное решение системы (1.1), если выполняются равенства $\psi_j(u^\circ) = 0$ ($j = m + 1, \ldots, n$). Совокупность всех таких векторов u° обозначим через M.

Наряду с системой (1.1) рассмотрим систему, получающуюся из (1.1) путем линеаризации вблизи точки $u = u^\circ \in M$

$$\frac{\partial v_j}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} A_{jk}(u^\circ)\frac{\partial v_k}{\partial x} = \sigma_j \sum_{k=1}^{n} \psi_{jk}(u^\circ)\, v_k, \qquad v_j = u_j - u_j^\circ \tag{1.2}$$

где

$$A_{jk}(u^\circ) = \frac{\partial A_j(u^\circ)}{\partial u_k^\circ}, \qquad \psi_{jk}(u^\circ) = \frac{\partial \psi_j(u^\circ)}{\partial u_k^\circ}$$

Систему (1.1) будем называть диссипативной, если при любом выборе $u^\circ \in M$ выполняются следующие условия.

1°. У системы (1.2) все частные решения вида

$$v_j(x, t) = a_j e^{i(\omega t - kx)} \qquad (-\infty < k < \infty)$$

ограничены при $t > 0$, каковы бы ни были неотрицательные числа σ_j ($j = m + 1, \ldots, n$).

2°. Если все числа σ_j ($j = m + 1, \ldots, n$) положительны и конечны, то указанные частные решения стремятся к нулю при $t \to \infty$ (кроме решения, у которого $k = 0$, $\omega = 0$).

В дальнейшем будем считать систему (1.1) диссипативной. Это означает, как легко видеть, что ни один корень $\omega = \omega_s$ ($s = 1, 2, \ldots, n$) уравнения

$$D(\omega, k) \equiv \det | i\omega\delta_{js} - ikA_{js}(u^\circ) - \sigma_j\psi_{js}(u^\circ) | = 0 \tag{1.3}$$

не лежит в нижней полуплоскости, причем, если все коэффициенты σ_j ($j = m + 1, \ldots, n$) положительны и конечны, то и вещественная ось свободна от корней этого уравнения.

2. Ударные волны. Нас будут интересовать те решения системы (1.1), которые представляют собой ударные волны, движущиеся с некоторой постоянной скоростью U, не изменяя своей формы. Такие решения зависят только от комбинации $\xi = x - Ut$, удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$-U\frac{du_j}{d\xi} + \frac{d}{d\xi}A_j(u) = \sigma_j\psi_j(u) \tag{2.1}$$

и стремятся к некоторым пределам $u^+ \in M$ и $u^- \in M$, когда $\xi \to \infty$. Кроме того, $\lim du / d\xi = 0$ при $\xi \to \pm\infty$. Ради краткости условимся называть такие решения переходными.

Ясно, что векторы u^- и u^+ связаны между собой соотношениями

$$-Uu_j^- + A_j(u^-) = -Uu_j^+ + A_j(u^+) \qquad (j = 1, \ldots, m)$$

$$\psi_j(u^-) = \psi_j(u^+) = 0 \qquad (j = m + 1, \ldots, n)$$

Это и есть условия, которым должны удовлетворять скачки $u^+ - u^-$.

Получим простое условие, необходимое для существования переходного решения. При достаточно больших по модулю ξ ($\xi < 0$) систему (2.1) можно линеаризовать.

$$-U(u_j - u_j^-) + \sum_{s=1}^{n} A_{js}(u^-)(u_s - u_s^-) = 0 \qquad (j = 1, \ldots, m) \tag{2.2}$$

$$-U\frac{du_j}{d\xi} + \sum_{s=1}^{n} A_{js}(u^-)\frac{du_s}{d\xi} = \sigma_j \sum_{s=1}^{n} \psi_{js}(u^-)(u_s - u_s^-) \qquad (j = m+1, \ldots, n)$$

Линеаризованная система имеет частные решения вида

$$u^{(r)} - u^- = a^{(r)} \exp \nu_r - \xi \tag{2.3}$$

где ν_r^- ($r = 1, 2, \ldots, n - m$) — корни уравнения

$$D_1(\nu, U) \equiv \det \begin{vmatrix} -U\delta_{js} + A_{js}(u^\circ) \\ (-U\delta_{js} + A_{js}(u^\circ))\,\nu - \sigma_j\psi_{js}(u^\circ) \end{vmatrix} = 0, \qquad u^\circ = u^- \tag{2.4}$$

Если $\operatorname{Re}\nu_r^- > 0$, то разность $u^{(r)} - u^-$ стремится к нулю при $\xi \to -\infty$. Очевидно, переходное решение $u(\xi)$ в рассматриваемой области представляет собой линейную комбинацию типа

$$u - u^- = \sum_{r=1}^{\rho^-} C_r^- a^{(r)} \exp \nu_r - \xi \tag{2.5}$$

где суммирование производится по всем тем r, для которых $\operatorname{Re}\nu_r^- > 0$. Подобным же образом в области больших положительных ξ функция $u(\xi)$ может быть представлена в виде

$$u - u^+ = \sum_{r=1}^{\rho+} C_r^+ b^{(r)} \exp \nu_r + \xi \tag{2.6}$$

где суммирование производится по всем тем r, для которых $\operatorname{Re}\nu_r^+ < 0$.

Полученные таким образом решения (2.5) и (2.6) можно, по крайней мере принципиально, продолжить при помощи точной системы (2.1) до точки $\xi = 0$. В этой точке оба решения должны иметь одинаковые компоненты. Более того, одна из компонент, скажем u_1, должна принимать заранее предписанное значение $u_1(0)$ ($u_1(0) \in (u_1^-, u_1^+)$), так как, если существует хотя бы одно переходное решение $u(\xi)$ ($u(-\infty) = u^-$, $u(+\infty) = u^+$), то должно существовать бесчисленное множество таких решений, а именно $u(\xi - a)$ ($-\infty < a < \infty$). Выбором параметра a можно добиться того, чтобы величина $u_1(0)$ имела заранее предписанное значение из интервала (u_1^-, u_1^+).

Таким образом, в точке $\xi = 0$ должно выполняться ($n + 1$) условий

$$u_1(-0) = u_1(+0), \qquad u_s(-0) = u_s(+0) \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

Для выполнения этих условий мы располагаем ρ^+ параметрами C_r^+ и ρ^- параметрами C_r^-. Если число этих параметров ($\rho^+ + \rho^-$) меньше, чем число условий ($n + 1$), то непрерывное переходное решение, вообще говоря, не может быть построено. Если $\rho^+ + \rho^- > n + 1$, то, по-видимому, существует целое семейство различных переходных решений, имеющих одинаковую компоненту $u_1(0)$. Таким образом, для существования единственного (с точностью до сдвига) переходного решения нужно, чтобы

$$\rho^- + \rho^+ = n + 1 \tag{2.7}$$

Наша цель — установить связь между этим условием и условием устойчивости скачка относительно расщепления $n^- + n^+ = n - 1$ (см. сноску на стр. 1041). Для решения этой чисто алгебраической задачи воспользуемся некоторыми специфическими свойствами диссипативных систем.

3. **Идеальные системы.** Вместе с системой (1.1) рассмотрим ряд вспомогательных систем, которые можно получить следующим образом. Положим часть коэффициентов σ_j равными нулю, а остальные устремим к бесконечности. Предположим, что компоненты перенумерованы u_j так, что $\sigma_j = 0$ ($j = 1,\ldots, m_1 \geqslant m$) и $\sigma_j = \infty$ ($j = m_1 + 1,\ldots, n$). Система (1.1) примет при этом следующий вид:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} A_j(u) = 0 \qquad (j = 1, \ldots, m_1) \\ &\psi_j(u) = 0 \qquad (j = m_1 + 1, \ldots n) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Число m_1 ($m \leqslant m_1 \leqslant n$) будем называть рангом системы (3.1). Очевидно, имеется по одной системе рангов m и n, $(n - m)$ систем рангов $m + 1$ и $n - 1$ и т. д.

Соответствующее системе (3.1) дисперсионное уравнение (1.3) принимает следующий вид:

$$\Delta_{m_1}(i\omega, ik) \equiv \det \begin{vmatrix} i\omega\delta_{js} - ikA_{js}(u^\circ) \\ \psi_{js}(u^\circ) \end{vmatrix} = 0 \tag{3.2}$$

Легко видеть, что

$$\Delta_{m_1}(i\omega, ik) = (ik)^{m_1}\Delta_{m_1}\left(\frac{\omega}{k}, 1\right) \equiv (ik)^{m_1}\Delta_{m_1}(V), \qquad V = \frac{\omega}{k} \tag{3.3}$$

Поэтому фазовые скорости $V = \omega/k$, отвечающие системе (3.1), удовлетворяют уравнению $\Delta_{m_1}(V) = 0$ и не зависят от числа k. Более того, они все вещественны, так как в противном случае при изменении знака k число ω переходило бы из верхней полуплоскости в нижнюю (или наоборот), что несовместимо с диссипативностью системы (1.1). Вещественность фазовых скоростей V означает, что плоские волны $u = a \exp[i(\omega t - kx)]$ являются незатухающими. Таким образом, все системы типа (3.1) будут идеальными. Если часть диссипативных коэффициентов мала, а остальные коэффициенты очень велики, то с большой степенью точности можно заменить исходную систему (1.1) соответствующей системой (3.1). Поэтому системы (3.1) представляют известный интерес.

Рассмотрим систему (C), которая получится из системы (3.1), если заменить одно из уравнений $\psi_\alpha(u) = 0$ ($\alpha = m_1 + 1,\ldots, n$) уравнением

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} A_\alpha(u) = 0$$

Такие системы будем называть соседними

Имеет место следующая теорема.

Теорема (Уитхем [5]). Система (3.1) ранга m_1 имеет ровно m_1 фазовых скоростей $V_1 \leqslant V_2 \leqslant \ldots \leqslant V_{m_1}$, считая каждую скорость столько раз, какова ее кратность как корня уравнения $\Delta_{m_1}(V) = 0$. Фазовые скорости $V_1' \leqslant V_2' \leqslant \ldots \leqslant V_{m_1+1}'$ любой соседней системы перемежаются с фазовыми скоростями системы (3.1)

$$V_1' \leqslant V_1 \leqslant V_2' \leqslant V_2 \leqslant \ldots \leqslant V_{m'} \leqslant V'_{m'+1}$$

Доказательство. В системе (1.1) положим

$$\sigma_{m+1} = \sigma_{m+2} = \ldots = \sigma_{m_1} = 0, \quad 0 < \sigma_{m_1+1} < \infty, \quad \sigma_{m_1+2} = \ldots = \sigma_n = \infty$$

Уравнение (1.3) примет при этом следующий вид:

$$\det \begin{vmatrix} i\omega\delta_{js} - ikA_{js}(u^\circ) \\ i\omega\delta_{m_1+1s} - ikA_{m_1+1s} - \sigma_{m_1+1}\psi_{m_1+1s}(u^\circ) \\ \psi_{js}(u^\circ) \end{vmatrix} = 0$$

что можно записать так:

$$\Delta_{m_1+1}(i\omega,\ ik) - \sigma_{m_1+1}\Delta_{m_1}(i\omega,\ ik) = 0$$

или, если воспользоваться соотношением (3.3), еще и так:

$$w(V) \equiv \Delta_{m_1+1}(V) + i\,\frac{\sigma_{m_1-1}}{k}\,\Delta_{m_1}(V) = 0 \tag{3.4}$$

Рассмотрим это дисперсионное уравнение при положительных значениях k. Так как система (1.1) диссипативна, то все корни V уравнения (3.4) лежат в верхней полуплоскости или на вещественной оси.

Отсюда, согласно теореме Эрмита—Билера [17-18], непосредственно вытекает перемежаемость фазовых скоростей. Не приводя формулировки этой теоремы, мы воспроизведем рассуждение, при помощи которого она устанавливается. Предположим сначала, что полиномы $\Delta_{m_1+1}(V)$ и $\Delta_{m_1}(V)$ не имеют общих нулей и, следовательно, все нули полинома $w(V)$ имеют положительную мнимую часть. Когда точка V, двигаясь слева направо, пробегает всю вещественную ось, точка w описывает некоторую кривую в комплексной плоскости, не проходящую через точку $w = 0$, причем ее аргумент изменяется монотонно. Точка w поочередно пересекает вещественную и мнимую оси. Поэтому нули ее вещественной и мнимой частей перемежаются. Этот вывод остается в силе и тогда, когда функции Δ_{m_1+1} и Δ_{m_1} имеют один или несколько общих нулей.

Из перемежаемости нулей полиномов $\Delta_{m_1+1}(V)$ и $\Delta_{m_1}(V)$ следует, что степени полиномов отличаются не более, чем на единицу. Степень полинома $\Delta_n(V)$, очевидно, равна n, степень $\Delta_{n-1}(V)$ не превосходит $n-1$ и поэтому равна $n-1$. Продолжая рассуждение, убеждаемся в том, что степень полинома $\Delta_{m_1}(V)$ равна m_1 ($m_1 = m, \ldots, n$). Теорема доказана.

Сделаем еще следующее замечание. Обозначим через a_{m_1+1} коэффициент при старшем члене у полиномов $w(V)$ и $\Delta_{m_1+1}(V)$. Точка $w(V) / a_{m_1+1}$ при увеличении V движется так, что ее аргумент растет. При $V \to +\infty$ аргумент $w(V) / a_{m_1+1}$ стремится к нулю и, следовательно, он отрицателен при достаточно больших V. Это означает, что

$$\operatorname{Im} \frac{1}{a_{m_1+1}}\, w(V) = \sigma_{m_1+1} \frac{\Delta_{m_1}(V)}{k a_{m_1+1}} < 0$$

при достаточно большом V. Отсюда следует, что коэффициент a_{m_1} при старшем члене полинома $\Delta_{m_1}(V)$ имеет знак, противоположный знаку a_{m_1+1}.

Учитывая это и помня о перемежаемости фазовых скоростей соседних систем, заключаем, что

$$\begin{aligned} &\Delta'_{m_1+1}(V_j')\ \Delta_{m_1}(V_j') \leqslant 0 \qquad (j = 1, \ldots, m_1+1) \\ &\Delta_{m_1+1}(V_j)\ \Delta'_{m_1}(V_j) \geqslant 0 \qquad (j = 1, \ldots, m_1) \end{aligned} \tag{3.5}$$

4. Движение корней ν уравнения (2.4). Выясним, как перемещаются в комплексной плоскости корни ν уравнения (2.4), когда параметр U движется по вещественной оси.

Из определения функций $D(\omega, k)$ и $D_1(\nu, U)$ вытекает соотношение

$$D\,(i\nu U,\ -i\nu) \equiv \nu^m D_1(\nu,\ U) \tag{4.1}$$

Если предположить, что при каком-либо U $(-\infty < U < \infty)$ один из корней ν уравнения (2.4) принимает чисто мнимое значение $\nu = ik_0 \neq 0$, то получится, что уравнение $D\,(\omega,\ k_0) = 0$ имеет вещественное решение $\omega = -k_0 U$. Так как это невозможно для диссипативной системы, то при перемещении U по вещественной оси ни один из корней ν уравнения (2.4) не может пересечь мнимую ось в какой-либо точке, кроме $\nu = 0$.

Выясним, при каких значениях U один из корней ν может обратиться в нуль. Из определения (2.4) функции $D_1\,(\nu,\ U)$ следует, что

$$D_1\,(0,\ U) \equiv \Delta_m\,(U) \prod_{j=m+1}^{n} (-\sigma_j) \tag{4.2}$$

Поэтому точка $\nu = 0$ является корнем уравнения $D_1\ (\nu,\ U) = 0$ в том и только в том случае, когда U совпадает с одной из фазовых скоростей

$$V_1^\circ \leqslant V_2^\circ \leqslant \ldots \leqslant V_m^\circ \tag{4.3}$$

системы (C°) наинизшего ранга m.

Рассмотрим более подробно тот корень $\nu\ (U)$ уравнения (2.4), который обращается в нуль при $U = V_\alpha^\circ$ (α — одно из чисел $1, \ldots, m$).

Предположим, сначала, что хотя бы для одной из систем (C) ранга $m+1$ величина V_α° не является фазовой скоростью. Тогда $U = V_\alpha^\circ$ является простым нулем функции $\Delta_m\ (U)$ и, следовательно

$$\frac{\partial}{\partial U} D_1\,(0,\ U)\Big|_{U=V_\alpha^\circ} = (-1)^n \Delta'_m\ (V_\alpha^\circ) \prod_{j=m+1}^{n} \sigma_j \neq 0$$

С другой стороны, из вида функции $D_1\ (\nu,\ U)$ вытекает, что

$$\frac{\partial}{\partial \nu} D_1\,(\nu,\ V_\alpha^\circ)\Big|_{\nu=0} = (-1)^n \Big(\prod_{j=m+1}^{n} \sigma_j\Big) \sum_{s=m+1}^{n} \frac{\Delta_{m+1,\,s}\,(V_\alpha^\circ)}{\sigma_s}$$

Здесь $\Delta_{m+1,\,s}$ $(s = m+1, \ldots, n)$— определители, отвечающие всевозможным системам (C) ранга $m+1$.

Из неравенств (3.5) следует, что ни одно слагаемое последней суммы не может иметь знак, противоположный знаку $\Delta'_m\ (V_\alpha^\circ)$. Так как в силу сделанного предположения не все они равны нулю, то производные

$$\frac{\partial}{\partial U} D_1\,(0,\ U)\,\Big|_{U=V_\alpha^\circ}, \qquad \frac{\partial}{\partial \nu} D_1\,(\nu,\ V_\alpha^\circ)\,\Big|_{\nu=0}$$

имеют одинаковый знак. Поэтому $\nu'(V_\alpha^\circ) < 0$. Можно показать, что этот вывод остается в силе и тогда, когда скорость V_α° является фазовой скоростью для всех систем ранга $m + 1$.

Поэтому каждый раз, когда параметр U, монотонно возрастая, проходит через одну из фазовых скоростей (4.3) системы (C°), один из нулей ν уравнения $D_1(\nu, U) = 0$ переходит из правой полуплоскости в левую, двигаясь по вещественной оси.

Не следует, однако, думать, что когда параметр V перемещается по интервалу, свободному от фазовых скоростей V_α° ($\alpha = 1, \ldots, m$), то число корней ν уравнения $D_1(\nu, U) = 0$ в каждой полуплоскости остается постоянным.

В самом деле, корень $\nu(U)$ может перейти из одной полуплоскости в другую через бесконечность, не пересекая мнимой оси.

Такой переход действительно совершается каждый раз, когда коэффициент при старшей степени ν в полиноме $D_1(\nu, U)$ обращается в нуль. Этот коэффициент, очевидно, равен $(-1)^n \Delta_n(U)$. Он обращается в нуль при $U = V_j^*$ ($j = 1, \ldots, n$), где V_j^* — фазовые скорости системы (C) ранга n.

Легко показать, используя рассуждения, аналогичные приведенным ранее, что каждый раз, когда параметр U, монотонно возрастая, проходит через одну из фазовых скоростей V_j^* ($j = 1, \ldots, n$) системы (C^*) наивысшего ранга, один из нулей ν уравнения $D_1(\nu, U) = 0$ переходит из левой полуплоскости в правую, обращаясь при $U = V_j^*$ в бесконечность. Таким образом, число корней $\nu(U)$, лежащих по ту или иную сторону мнимой оси, изменяется только в том случае, когда параметр U проходит через фазовые скорости систем (C°) и (C^*), т. е. систем наинизшего и наивысшего рангов.

Зафиксируем параметр U, а точку $u^\circ \in M$ будем варьировать, изменяя тем самым фазовые скорости $V_j^\circ = V_j^\circ(u^\circ)$ ($j = 1, \ldots, m$) и $V_j^* = V_j^*(u^\circ)$ ($j = 1, \ldots, n$). Если при этом ни одна из фазовых скоростей не пересечет значения U, то число $l(U, u^\circ)$ корней $\nu(U)$, лежащих в левой полуплоскости, не изменится. Поэтому число

$$l(-\infty) = \lim l(U, u^\circ)$$

при $U \to -\infty$ одинаково для всех точек $u^\circ \in M$.

Сделанные в этом пункте три вывода можно объединить в следующую формулу

$$l(U, u^\circ) = l(-\infty) + n^\circ(U, u^\circ) - n^*(U, u^\circ) \tag{4.4}$$

где $n^\circ(U, u^\circ)$ и $n^*(U, u^\circ)$ — число фазовых скоростей $V_j^\circ(u^\circ)$ и $V_j^*(u^\circ)$, соответственно, меньших U. При помощи этого соотношения можно вычислить сумму $\rho^- + \rho^+$ (см. п. 2), зная только взаимное расположение точек $V_j^\circ(u^-)$, $V_j^\circ(u^+)$, $V_j^*(u^-)$, $V_j^*(u^+)$ и U на числовой прямой. Действительно, из (4.4) непосредственно следует, что

$$\rho^- + \rho^+ = n + \delta n^\circ - \delta n^* \tag{4.5}$$

где

$$\delta n^\circ = n^\circ(U, u^+) - n^\circ(U, u^-), \qquad \delta n^* = n^*(U, u^+) - n^*(U, u^-)$$

5. Непрерывные профили ударной волны и профили со скачком. Выясним, как узнать по взаимному расположению на числовой прямой фазовых скоростей $V_j°$ и V_j* и скорости ударной волны U, существует ли переходное решение, будет ли оно единственным (с точностью до сдвига) и непрерывным.

Предположим, что существует некоторое переходное решение $u(x)$.

Рассмотрим сначала наиболее простой случай, когда каждая из разностей $V_j^*(x) - U$ $(j = 1, \ldots, n,\ V_j^*(x) \equiv V_j^*[u(x)])$ имеет во всех точках $-\infty < x < \infty$ одинаковый знак. При этом $\delta n^* = 0$, и в силу (4.5) условие устойчивости скачка относительно расщепления $\delta n° = 1$ влечет за собой условие (2.7) $\rho^- + \rho^+ = n + 1$. Таким образом, в этом случае эволюционной волне соответствует единственный (с точностью до сдвига) непрерывный профиль, а неэволюционным волнам либо не соответствует ни одного переходного решения ($\delta n° < 1$), либо — бесконечное множество ($\delta n° > 1$).

Пусть теперь некоторые из разностей $V_j^*(x) - U$ меняют знак. Пусть $x = a$ — точка, в окрестности которой одна из разностей меняет знак, монотонно убывая. Точка a не может быть точкой разрыва, так как этот разрыв был бы неэволюционным. Поэтому функции $u_j(x)$ $(j = 1, \ldots, n)$ непрерывны в этой точке.

Можно показать, что в точке $x = a$ либо совпадают, по крайней мере, две фазовые скорости системы (C *), либо все производные $du / d\xi$ конечны. И в том и в другом случае в точке $x = a$, помимо условий непрерывности должно выполняться еще одно условие: условие разрешимости системы (2.1) относительно производных $du / d\xi$ (напомним, что определитель этой системы в точке $x = a$ обращается в нуль), или условие совпадения двух фазовых скоростей (мы предполагаем для простоты, что тождественно совпадающих фазовых скоростей V_j^* нет). Итак, наличие p точек указанного типа означает существование p дополнительных условий.

Рассмотрим теперь точку $x = b$, в окрестности которой одна из разностей $V_j^* - U$ меняет свой знак, монотонно возрастая. В такой точке может существовать эволюционный разрыв. Заметим, что положение точки $x = b$ можно в известных пределах изменять. Поэтому наличие q точек типа точки $x = b$ означает существование q дополнительных свободных параметров. Условие (2.7), справедливое при отсутствии точек типа a и b, следует теперь переписать так:

$$\rho^+ + \rho^- + q = n + 1 + p \tag{5.1}$$

Учитывая, что $\delta n^* = q - p$, перепишем последнее соотношение с помощью (4.5) в виде

$$\delta n° = 1 \tag{5.2}$$

Итак, необходимым условием существования единственной ударной волны, отвечающей данному скачку, будут условие эволюционности (5.2).

Если при этом $\delta n^* > 0$, то профиль волны содержит разрывы, причем, число таких разрывов не менее δn^*.

В заключение отметим без доказательства, что все собственные числа матрицы

$$\left\| \sigma_j \frac{\partial \psi_j(u)}{\partial u_k} \right\|_{m+1}^{n}, \quad u \in M, \quad 0 < \sigma_\alpha < \infty, \quad \alpha = m+1, \ldots, n$$

положительны, если система (1.1) вполне диссипативна.

Автор благодарит А. И. Ахиезера и Р. В. Половина за обсуждение затронутых в статье вопросов и Л. И. Седова за критические замечания.

Поступила 9 VII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Germain P. Contribution à la théorie des ondes de choc en magnetodynamique des fluides. O. N. E. R. A. 1959, publ. 97.
2. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. О структуре наклонной магнитогидродинамической ударной волны. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 1.
3. Ludford C. S. S. The structure of magnetohydrodynamic schock in steady plane motion. J. Fluid Mechanics, 1959, 5.
4. Marshall W. The structure of magnetohydrodynamic shock waves, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A. 1955, 233, 367.
5. Whitham G. B. Some comments on wave propagation and shock wave structure with application to magnetohydrodynamics. Comm. Pure Appl. Math., 1959, 12, № 1.
6. Сиротина Е. П., Сыроватский С. И. Структура ударных волн слабой интенсивности в магнитной гидродинамике. ЖЭТФ, 1960, 39, вып. 9.
7. Lax P. D. Hyperbolic systems of conservation laws II. Comm. Pure Appl. Math. 1957, 10, № 3.
8. Бабенко К. И., Гельфанд И. М. Замечания о гиперболических системах. Науч. докл. высшей школы физ.-матем. наук, 1958, № 1.
9. Ахиезер А. И., Любарский Г. Я., Половин Р. В. Об устойчивости ударных волн в магнитной гидродинамике. ЖЭТФ, 1958, т. 35, № 3 (9).
10. Конторович В. М. О взаимодействии малых возмущений с разрывами в магнитной гидродинамике и об устойчивости ударных волн. ЖЭТФ, 1958, т. 35, № 5 (4).
11. Сыроватский С. И. Об устойчивости ударных волн в магнитной гидродинамике. ЖЭТФ, 1958, т. 35, № 6 (12).
12. Bazer I. Resolution of initial shear flow discontinuity in one dimensional hydromagnetic flow. Astrophys J., 1958, 129, № 3.
13. Волков Т. Ф. К задаче о распадении произвольного разрыва в сплошной среде. Сб. физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций, 1958, 3.
14. Ахиезер И. А., Половин Р. В. О движении проводящего поршня в магнитогидродинамической среде. ЖЭТФ, 1960, т. 38, вып. 2.
15. Бармин А. А., Гогосов В. В. Задача о поршне в магнитной гидродинамике. ДАН СССР, т. 134, № 5.
16. Гогосов В. В. Распад произвольного разрыва в магнитной гидродинамике. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 1.
17. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. ГИТТЛ, М., 1956.
18. Чеботарев Н. Г., Мейман Н.Н. Проблема Рауса-Гурвица для полиномов и целых функций. Тр. Матем. ин-та им. Стеклова, 1949, т. XXIV.