

УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ ЖИДКОСТИ В ГОРИЗОНТАЛЬНОМ ЦИЛИНДРЕ, ПОДОГРЕВАЕМОМ СНИЗУ

Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий

(Пермь)

Задача об устойчивости равновесия жидкости в бесконечном горизонтальном цилиндре, подогреваемом снизу, решалась ранее одним из авторов [1]. Рассматривались только плоские возмущения равновесия, при которых вектор скорости не имеет составляющей вдоль оси цилиндра, и все величины, характеризующие возмущение, не зависят от координаты вдоль оси. Как заметил Г. Ф. Шайдуров [2], в опытах наблюдаются также нарушения равновесия с возникновением пространственных движений типа ячеек. Целью данной работы является исследование устойчивости равновесия относительно пространственных возмущений, периодических вдоль оси цилиндра. Задача решается методом Галеркина.

§ 1. Уравнения задачи. Жидкость заполняет горизонтальную цилиндрическую полость в бесконечном однородном твердом массиве. Вдали от полости в массиве поддерживается стационарный градиент температуры A , направленный вертикально вниз (жидкость подогревается снизу). Если величина градиента меньше наименьшего критического значения [3], то жидкость находится в равновесии. При этом скорость жидкости $V_0 = 0$; градиент температуры в жидкости ∇T_0 и градиент давления в равновесии ∇p_0 равны

$$\nabla T_0 = -\frac{2A}{1+\alpha}\gamma = -A'\gamma, \quad \nabla p_0 = \rho g \beta T_0 \gamma, \quad \alpha = \frac{\kappa}{\kappa_e}$$

Здесь A' — равновесный градиент температуры в жидкости; γ — единичный вектор, направленный вертикально вверх; κ и κ_e — коэффициенты теплопроводности жидкости и массива.

Возникающие малые возмущения меняются со временем по закону $e^{-\sigma t}$, где σ — вещественно [3]. На границе устойчивости $\sigma = 0$. Уравнения для характеристических движений имеют вид

$$\nabla p = \Delta \mathbf{v} + RT\gamma, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (1.1)$$

$$\Delta T = -\mathbf{v}\gamma, \quad \Delta T_e = 0 \quad (1.2)$$

Здесь \mathbf{v} , T , p , T_e — безразмерные возмущения скорости, температуры, давления и температуры массива.

Единицы расстояния скорости, давления и температуры соответственно таковы: a (радиус цилиндра), χ/a , $\rho v \chi/a^2$, $A'a$. Число Релея $R = g\beta A'a^4/\nu\chi$ определено через равновесный градиент температуры в жидкости.

Граничные условия для безразмерных возмущений таковы:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}, T & \text{ — конечны} && \text{при } r = 0 \\ \mathbf{v} = 0, \quad T = T_e, \quad \alpha \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial T_e}{\partial r} & && \text{при } r = 1 \\ T_e \rightarrow 0 & && \text{при } r \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (1.3)$$

Задача состоит в отыскании собственных значений параметра R , определяющих кризис равновесия, и соответствующих критических движений жидкости.

§ 2. Аппроксимация скорости. Имея в виду решать задачу методом Галеркина, аппроксимируем скорость следующим образом:

$$\mathbf{v} = c_1 \varphi_1 + \dots + c_N \varphi_N \quad (2.1)$$

Все функции φ_i удовлетворяют уравнению непрерывности и граничным условиям задачи.

Введем декартову систему координат, направив ось z по оси цилиндра, а оси x и y — в плоскости сечения (ось x — вертикально вверх). Рассматривая периодические вдоль оси z возмущения, положим

$$v_x = f_1(x, y) k \cos kz, \quad v_y = f_2(x, y) k \cos kz, \quad v_z = f_3(x, y) \sin kz \quad (2.2)$$

Здесь k — волновое число возмущений. Функции f_i будем искать в виде полиномов, обращающихся в нуль на поверхности цилиндра (ср. [4])

$$\begin{aligned} f_1 &= (1 - r^2) \sum_{m, n} a_{mn} x^m y^n, & f_2 &= (1 - r^2) \sum_{m, n} b_{mn} x^m y^n \\ f_3 &= (1 - r^2) \sum_{m, n} c_{mn} x^m y^n \end{aligned} \quad (2.3)$$

Из уравнения непрерывности следует

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + f_3 = 0$$

поэтому коэффициенты a_{mn} , b_{mn} и c_{mn} удовлетворяют соотношениям

$$(m + 1)[a_{m-1, n} - a_{m+1, n} + a_{m+1, n-2}] + (n + 1)[b_{m, n-1} - b_{m, n+1} + b_{m-2, n+1}] + c_{m-2, n} + c_{m, n-2} - c_{mn} = 0 \quad (2.4)$$

Ограничимся случаем $m + n \leq 2$. Тогда формулы (2.3) будут содержать восемнадцать неопределенных коэффициентов. В силу (2.4) эти коэффициенты связаны тринадцатью соотношениями. Имеется, таким образом, пять независимых коэффициентов, что позволяет построить систему пяти базисных векторных функций φ_i . Выбор этих функций, разумеется, неоднозначен. Если, однако, учесть соображения симметрии, то представляется удобной такая система функций:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \begin{cases} (1 - r^2) y k \cos kz, \\ -(1 - r^2) x k \cos kz, \\ 0 \end{cases} & \varphi_2 &= \begin{cases} (1 - r^2) (1 - x^2 - 5y^2) k \cos kz \\ 4(1 - r^2) x y k \cos kz \\ 0 \end{cases} \\ \varphi_3 &= \begin{cases} (1 - r^2)^2 k \cos kz, \\ 0 \\ 4(1 - r^2) x \sin kz, \end{cases} & \varphi_4 &= \begin{cases} 4(1 - r^2) x y k \cos kz \\ (1 - r^2) (1 - 5x^2 - y^2) k \cos kz \\ 0 \end{cases} \\ \varphi_5 &= \begin{cases} 0 \\ (1 - r^2)^2 k \cos kz \\ 4(1 - r^2) y \sin kz \end{cases} \end{aligned}$$

На фиг. 1 схематически изображены базисные движения. Критические движения жидкости, таким образом, будут суперпозицией этих пяти базисных движений

$$\mathbf{v} = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + c_3\varphi_3 + c_4\varphi_4 + c_5\varphi_5 \quad (2.5)$$

§ 3. Решение задачи. Найдем температуру в жидкости и в массиве. Для этого подставим скорость (2.5) в уравнение теплопроводности (1.2) и решим его при граничных условиях (1.3). Температура в жидкости равна

$$T = -k \cos kz \{ [A_0 + A_2r^2 + A_4r^4 + aI_0(kr)] + c_1 [B_1r + B_3r^3 + bI_1(kr)] + \\ + 2 [D_2r^2 + D_4r^4 + dI_2(kr)] (c_3 \cos 2\varphi + c_4 \sin 2\varphi) \} \quad (3.1)$$

Здесь

$$A_0 = -\frac{1}{k^6} [(k^4 - 8k^2 + 64) c_2 + \\ + (k^4 - 16k^2 + 192) c_3]$$

$$A_2 = \frac{2}{k^4} [(k^2 - 8) c_2 + (2k^2 - 24) c_3]$$

$$A_4 = -\frac{1}{k^2} (c_2 + 3c_3)$$

$$B_1 = -\frac{1}{k^4} (k^2 - 8), \quad B_3 = D_4 = \frac{1}{k^2}$$

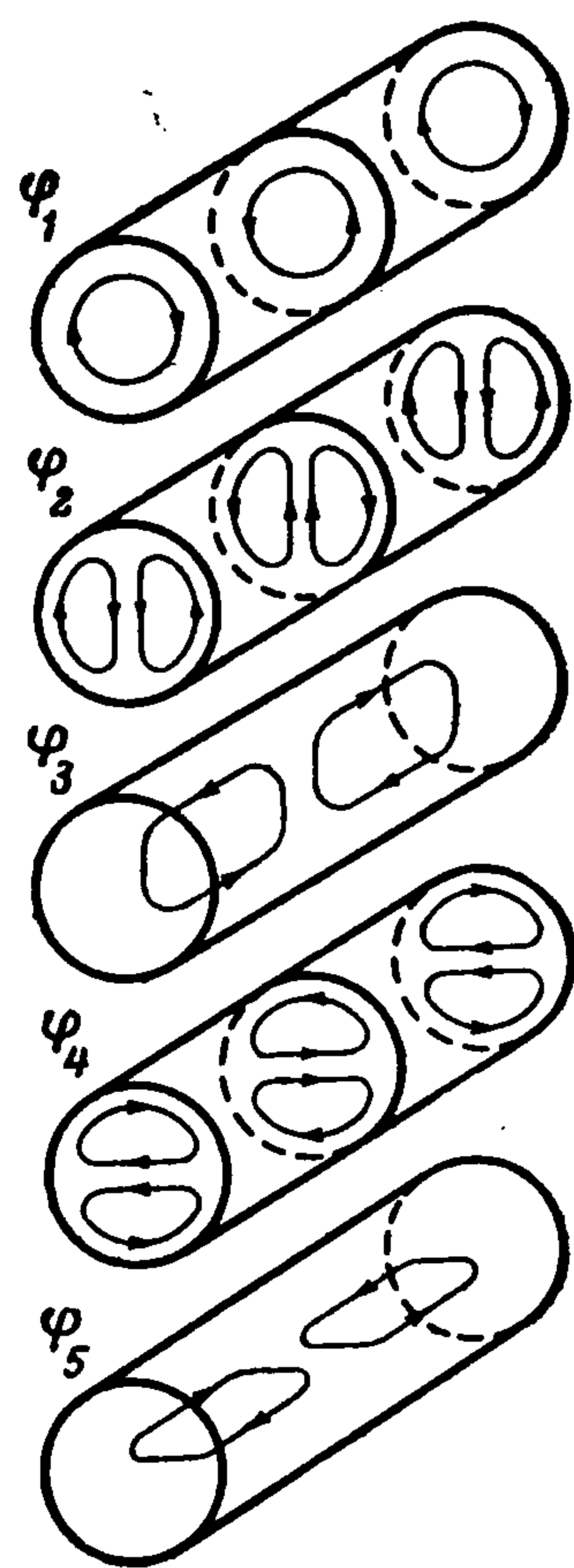
$$D_2 = -\frac{1}{k^4} (k^2 - 12) \quad (3.2)$$

$$a = \frac{4}{k^6 w_0} \{ 2 [(k^2 + 8) K_0' - 4\alpha k K_0] c_2 + \\ + [(8k^2 + 48) K_0' - \alpha (k^3 + 24k) K_0] c_3 \}$$

$$b = \frac{2}{k^5 w_1} [-4k K_1' + \alpha (k^2 + 4) K_1]$$

$$d = \frac{2}{k^5 w_1} [-6k K_2' + \alpha (k^2 + 12) K_2]$$

$$w_i = I_i K_i' - \alpha I_i' K_i$$



Фиг. 1

В приведенных формулах I_i и K_i — функции Бесселя от мнимого аргумента; в обозначениях коэффициентов (3.2) аргументом является волновое число k . В формулу (3.1) входят, разумеется, не определенные пока коэффициенты c_i . Температура в массиве T_e для дальнейших расчетов не требуется, и поэтому она здесь не приводится.

Для определения коэффициентов c_i умножим первое из уравнений (1.1) на φ_i и проинтегрируем по объему одной «ячейки» (т. е. по сечению цилиндра и по z в пределах от 0 до $\lambda = 2\pi/k$). Тогда получим систему пяти уравнений

$$\int \Delta v \varphi_i dV + R \int T \gamma \varphi_i dV = 0 \quad (3.3)$$

Интеграл, содержащий ∇p , равен нулю, в чем легко убедиться, интегрируя по частям.

Подставляя в (3.3) скорость (2.5) и температуру (3.1), получим систему пяти линейных однородных уравнений для определения коэффициентов c_i . Определитель этой системы имеет следующие отличные от нуля элементы: a_{11} , a_{22} , a_{33} , $a_{23} = a_{32}$, a_{44} , a_{55} , $a_{45} = a_{54}$. Элементы определителя являются весьма громоздкими функциями числа Релея R , волнового числа возмущений k и отношения теплопроводностей α . Приравняв определитель нулю, найдем пять критических чисел Релея и пять наборов коэффициентов c_i , определяющих критические движения.

§ 4. Критические градиенты и критические движения. Один из корней определяется уравнением $a_{11} = 0$. Отсюда найдем критическое число Релея (как выяснится из дальнейшего, его удобно назвать вторым)

$$R_2 = \frac{2k^5 (16 + k^2) w_1}{K_1' [12k^2 I_4 + (k^3 + 8k) I_5] - \alpha K_1 [(k^3 + 44k) I_4 + (7k^2 + 8) I_5]} \quad (4.1)$$

Соответствующее критическое движение

$$v_2 = c_1 \varphi_1 \quad (4.2)$$

Эта функция изображает движение с круговыми траекториями, лежащими в плоскостях, перпендикулярных к оси цилиндра. При смещении вдоль оси на $\lambda / 2 = \pi / k$ направление движения сменяется на обратное (фиг. 1). При $k = 0$ (плоские возмущения, $\lambda = \infty$ [1]¹)

$$R_2 = \frac{960 (1 + \alpha)}{2 + 7\alpha}$$

С ростом k (с уменьшением длины волны) число Релея R_2 монотонно возрастает; $R_2 \approx 2k^4$ при $k \gg 1$.

Следующие два критических числа Релея находятся как корни квадратного уравнения

$$a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} = 0 \quad (4.3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_{22} &= \frac{4}{15} (k^4 + 30k^2) + \frac{R}{5k^6} \left\{ (30k^4 - k^6) + \frac{160I_4}{w_0} [8(k^2 + 6)K_1 + \right. \\ &\quad \left. + \alpha K_0 (k^3 + 24k)] + \frac{80I_4}{w_2} [-6k^2 K_2' + \alpha K_2 (k^3 + 12k)] \right\} \\ a_{33} &= \frac{1}{15} (3k^4 + 30k^2 + 160) + \frac{R}{15k^4 w_0} \{ K_1 [54(k^3 + 36k) I_5 + \\ &\quad + (3k^4 + 196k^2 + 32) I_6] + \alpha K_0 [12(3k^3 + 28k) I_4 + (3k^4 + 52k^2 - 160) I_5] \} \\ a_{23} = a_{32} &= \frac{4}{3} k^2 + \frac{R}{30k^4 w_0} \{ K_1 [18(3k^3 + 88k) I_5 + (3k^4 + 176k^2 + 192) I_6] + \\ &\quad + \alpha K_0 [12(3k^3 + 8k) I_4 + (3k^4 + 32k^2 - 960) I_5] \} \end{aligned}$$

Выражения корней уравнения (4.3) R_1 и R_3 ($R_1 < R_3$) очень громоздки и здесь не приводятся. При $k = 0$

$$R_1 = \frac{23040 (1 + \alpha)}{31 + 41\alpha}$$

¹ В работе [1] число Релея R определено через градиент температуры в массиве ($R = R_e$), а не в жидкости ($R = R_f$), как принято в данной работе. Связь такова

$$R_f = \frac{2}{1 + \alpha} R_e$$

При увеличении волнового числа R_1 сначала убывает, проходит через минимум при некотором значении k , затем растет; $R_1 \approx 0.75k^4$ при $k \gg 1$.

Корень R_3 при $k \rightarrow 0$ стремится к бесконечности по закону

$$R_3 = \frac{23040}{k^2} \frac{1 - 0,5\alpha k^2 \ln(k/2)}{73 - 120\alpha \ln(k/2)}$$

При увеличении k корень R_3 , пройдя минимум, возрастает и $R_3 \approx 2.35k^4$ при $k \gg 1$.

Критические движения, соответствующие числам Релея R_1 и R_3 , представляют собой суперпозиции базисных движений φ_2 и φ_3

$$\mathbf{v}_1 = c_2\varphi_2 + c_3\varphi_3, \quad \mathbf{v}_3 = c_2'\varphi_2 + c_3'\varphi_3 \quad (4.4)$$

Ввиду однородности задачи коэффициенты c_2 и c_3 можно считать произвольными; весовые отношения c_3/c_2 и c_3'/c_2' зависят от k . В области волновых чисел k порядка единицы критическое движение \mathbf{v}_1 содержит в основном базисную функцию φ_3 с небольшой примесью φ_2 . При $k \rightarrow 0$ весовое отношение, однако, резко меняется и $\mathbf{v}_1 \rightarrow c_2\varphi_2$.

Движение \mathbf{v}_3 , наоборот, состоит в основном из φ_2 с примесью φ_3 , но при $k \rightarrow 0$ переходит в чистое движение φ_3 (при $k = 0$ движению φ_3 соответствуют горизонтальные траектории и поэтому $R_3 \rightarrow \infty$). При больших k базисные функции φ_2 и φ_3 входят в критические движения \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_3 с примерно равными весами, причем $c_3/c_2 > 0$, а $c_3'/c_2' < 0$.

Оставшиеся два критических значения R_4 и R_5 находятся из уравнения $a_{44}a_{55} - a_{45}a_{54} = 0$; вычисления дают

$$R_4 = \frac{12k^5(k^6 + 40k^4 + 320k^2 + 1600)}{3k^4 + 30k^2 + 160} \times \frac{u_2}{K_2' [16k^2 I_5 + (k^3 + 18k) I_6] - \alpha K_2 [(k^3 + 82k) I_5 + (10k^2 + 36) I_6]} \quad (4.5)$$

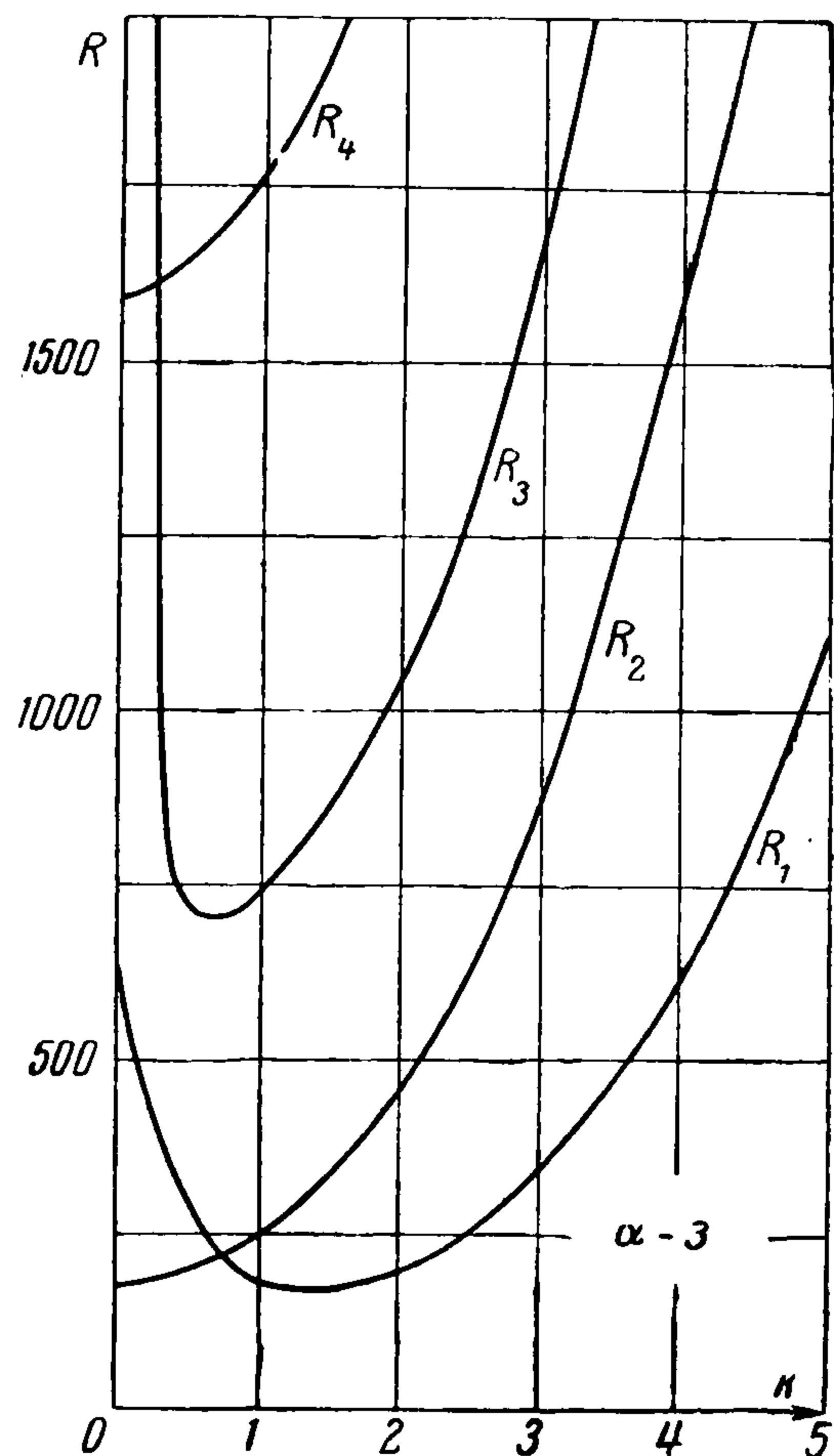
При $k = 0$

$$R_4 = \frac{23040(1 + \alpha)}{7 + 17\alpha}$$

При увеличении k корень R_4 монотонно растет и $R_4 \approx 4k^4$ при $k \gg 1$. Критическое движение \mathbf{v}_4 есть смесь φ_4 и φ_5 с определенным весовым соотношением:

$$\mathbf{v}_4 = c_4\varphi_4 + c_5\varphi_5, \quad \frac{c_5}{c_4} = - \frac{20k^2}{3k^4 + 30k^2 + 160}$$

Отсюда видно, что при $k \rightarrow 0$ $\mathbf{v}_4 \rightarrow c_4\varphi_4$.



Фиг. 2

Критическое движение v_5 содержит только базисную функцию φ_5 , так что $v_5 = c_5' \varphi_5$; траектории этого движения горизонтальны и соответствующее критическое число Релея R_5 бесконечно.

Таким образом, в рассматриваемом приближении удастся найти пять критических движений и соответствующие им критические градиенты температуры. На фиг. 2 для примера изображены критические числа Релея в зависимости от волнового числа возмущений для $\alpha = 3$. При изменении α характер спектра качественно не меняется. О сдвигах кривых устойчивости при изменении α можно судить по предельным значениям критических чисел Релея при $k = 0$ и при $k \gg 1$, приведенным выше. Из фиг. 2 видно, что наиболее опасными для срыва равновесия будут движения v_1 и v_2 ; им соответствуют два нижних уровня спектра. На кривой устойчивости $R_2(k)$ минимум достигается при $k = 0$, т. е. когда $\lambda = \infty$ (плоские возмущения). На кривой $R_1(k)$ минимум достигается при некотором конечном k , т. е. минимальному R_{1*} соответствует разбиение на ячейки определенной длины; картина аналогична той, которая имеет место в релеевском случае нарушения равновесия в плоском горизонтальном слое (ячейки Бенара). Приводим минимальные значения чисел Релея R_{1*} и R_{2*} для некоторых значений α

α	0	1	10	100	∞
R_{1*}	260	210	134	102	96
R_{2*}	480	213	147	138	137

Как видно, $R_{1*} < R_{2*}$ во всем интервале значений α , причем эти числа близки. Поэтому в эксперименте вполне вероятно возникновение одновременно обоих критических движений. В опытах Г. Ф. Шайдурова, по-видимому, и наблюдалась суперпозиция этих различных критических движений.

Поступила 24 VII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Ж у х о в и ц к и й Е. М. Применение метода Галеркина к задаче об устойчивости неравномерно нагретой жидкости. ПММ, 1954, т. XVIII, вып. 2.
2. Ш а й д у р о в Г. Ф. Тепловая неустойчивость жидкости [в горизонтальном цилиндре. ИФЖ., 1961, т. 4, вып. II.
3. С о р о к и н В. С. Вариационный метод в теории конвекции. ПММ, 1953, т. XVII, вып. 1.
4. Ж у х о в и ц к и й Е. М. Об устойчивости неравномерно нагретой жидкости в шаровой полости. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 5.