

**ОБ УСТАНОВИВШЕМСЯ ТЕЧЕНИИ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ
 В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ТРУБЕ С ДВУМЯ НЕПРОВОДЯЩИМИ
 СТЕНКАМИ И ДВУМЯ ПРОВОДЯЩИМИ, ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ
 ВНЕШНЕМУ МАГНИТНОМУ ПОЛЮ**

Г. А. Гринберг

(Ленинград)

1. Как было указано Шерклифом [1], если внешнее магнитное поле H^0 однородно, а поле скоростей и индуцированные электрическое и магнитное поля не зависят от координаты z , отсчитываемой в направлении оси трубы, то существует такое решение уравнений установившегося движения проводящей вязкой несжимаемой жидкости по трубе, когда

$$v = v i_z, \quad H = H^0 + H_z i_z \quad (1.1)$$

причем

$$E = \frac{c}{4\pi\sigma} \text{grad } H_z \times i_z + \frac{\mu}{c} H \times v, \quad j = \frac{c}{4\pi} \text{grad } H_z \times i_z \quad (1.2)$$

Здесь E и j — электрическое поле и плотность токов в жидкости, σ и μ — ее проводимость и магнитная проницаемость.

Выбираем ось x в направлении поля H^0 ; полагая $-\partial p / \partial z = P = \text{const}$ и считая сторонние объемные силы отсутствующими, получаем для H_z и v следующие уравнения;

$$\Delta H_z + \frac{4\pi\mu\sigma H^0}{c^2} \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (1.3)$$

$$\Delta v + \frac{H^0\mu}{4\pi\eta} \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\frac{P}{\eta} \quad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \quad (1.4)$$

Здесь η — коэффициент вязкости жидкости.

Граничные условия для H_z на стенках (контуре) S трубы (считаем ее покоящейся) записываются так:

на непроводящих участках стенок

$$\partial H_z / \partial S = 0 \quad \text{на } S \quad (1.5)$$

на идеально проводящих (n — нормаль к стенке)

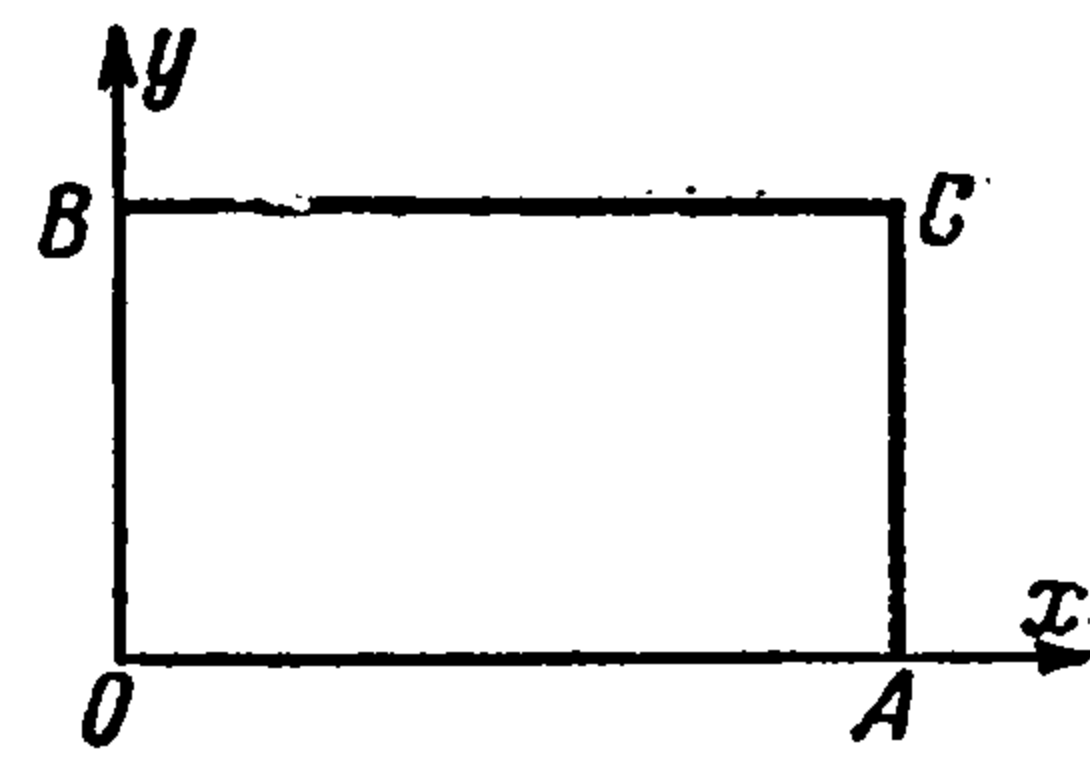
$$\partial H_z / \partial n = 0 \quad \text{на } S \quad (1.6)$$

К ним добавляется очевидное условие

$$v = 0 \quad \text{на } S \quad (1.7)$$

Случай непроводящих стенок рассмотрен в работе [1], случай идеально проводящих стенок в работе [2]. В обоих случаях решение представляется в виде тригонометрических рядов, получаемых при помощи метода частных решений. Сходным образом могла бы быть решена и задача для прямоугольной трубы, у которой стенки, перпендикулярные к внеш-

нему магнитному полю, идеально проводящие, а параллельные ему — непроводящие¹. Гораздо сложнее оказывается рассмотрение вопроса для трубы, у которой идеально проводящими являются стенки, параллельные H° , а непроводящими — перпендикулярные к H° . Так как точное решение этой задачи, насколько нам известно, до настоящего времени в литературе отсутствует, то в данной заметке излагаются некоторые соображения, относящиеся к получению подобного решения и его исследованию. В частности, задача сводится к интегральному уравнению первого рода, которое легко решается численными методами для малых и умеренных значений числа Гартмана и допускает асимптотическое исследование в случае, когда это число велико.



2. Переходим к решению поставленной задачи. Выбирая оси x, y , как показано на фиг. 1, полагая $OA = l = 2a$, $OB = d$ и обозначая через I полный ток, втекающий через идеально проводящую сторону OA и вытекающий через BC (на единицу длины оси трубы), получаем следующие граничные условия для поля H_z :

$$H_z = 2\pi I / c \text{ при } x=0, \quad H_z = -2\pi I / c \text{ при } x=l \quad (2.1)$$

$$\partial H_z / \partial y = 0 \text{ при } y=0, \quad \partial H_z / \partial y = 0 \text{ при } y=d \quad (2.2)$$

Кроме того.

$$v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=l} = 0, \quad v|_{y=0} = 0, \quad v|_{y=d} = 0 \quad (2.3)$$

Вводя функцию

$$u = \frac{1}{2\gamma} \left[\frac{H^\circ \mu}{4\pi\eta} H_z + \frac{P}{\eta} (x - a) \right], \quad \gamma = \frac{\mu H^\circ}{2c} \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}} \quad (2.4)$$

и полагая

$$\alpha = \frac{1}{4\gamma\eta} \left(Pl - \frac{H^\circ \mu I}{c} \right) \quad (2.5)$$

получим из (1.3) и (1.4) уравнения

$$\Delta u + 2\gamma \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \Delta v + 2\gamma \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.6)$$

с граничными условиями на сторонах OB и AC

$$u|_{x=0} = -\alpha, \quad u|_{x=l} = \alpha; \quad v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=l} = 0 \quad (2.7)$$

¹ Следует заметить, что такая форма решения оказывается очень невыгодной в случае больших значений числа Гартмана, ибо сходимость рядов резко ухудшается при его возрастании. Положение здесь аналогично тому, какое имеет место в теории дифракции волн на телах конечного размера, где сходимость рядов, получаемых по методу частных решений, резко ухудшается с возрастанием отношения характерного размера тела к длине волны (для цилиндра, шара и др.). В данной задаче, как и в дифракционных, можно пытаться для получения практически пригодного решения суммировать исходные плохо сходящиеся ряды, сводя их к комплексным интегралам и преобразуя затем эти последние тем или иным способом с целью получения новой формы решения, удобной уже при больших значениях числа Гартмана.

Для комбинаций $p = u + v$ и $q = u - v$ находим

$$\Delta p + 2\gamma \partial p / \partial x = 0, \quad \Delta q - 2\gamma \partial q / \partial x = 0 \quad (2.8)$$

$$p|_{x=0} = -\alpha, \quad q|_{x=0} = -\alpha, \quad p|_{x=l} = \alpha, \quad q|_{x=l} = \alpha \quad (2.9)$$

Положим, наконец,

$$p = e^{-\gamma(x-a)} S, \quad q = e^{\gamma(x-a)} t \quad (2.10)$$

и введем неизвестные пока функции

$$\frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{y=0} = f_0(x), \quad \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{y=d} = f_d(x) \quad (0 \leq x \leq l) \quad (2.11)$$

Тогда для S и t получим уравнения

$$\Delta S - \gamma^2 S = 0, \quad \Delta t - \gamma^2 t = 0 \quad (2.12)$$

с граничными условиями

$$S|_{x=0} = -\alpha e^{-\gamma a}, \quad S|_{x=l} = \alpha e^{\gamma a}, \quad \frac{\partial S}{\partial y} \Big|_{y=0} = e^{\gamma(x-a)} f_0(x) \\ \frac{\partial S}{\partial y} \Big|_{y=d} = e^{\gamma(x-a)} f_d(x) \quad (2.13)$$

$$t|_{x=0} = -\alpha e^{\gamma a}, \quad t|_{x=l} = \alpha e^{-\gamma a}, \quad \frac{\partial t}{\partial y} \Big|_{y=0} = -e^{-\gamma(x-a)} f_0(x) \\ \frac{\partial t}{\partial y} \Big|_{y=d} = -e^{-\gamma(x-a)} f_d(x) \quad (2.14)$$

Для нахождения функций S и t по граничным значениям (2.13) и (2.14) может служить функция Грина $G(\xi, \eta, x, y)$ для рассматриваемой прямоугольной области, определяемая формулой

$$2\pi G(\xi, \eta, x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{K_0[\gamma \sqrt{(x_m - \xi)^2 + (y_n - \eta)^2}] + \\ + K_0[\gamma \sqrt{(x_m - \xi)^2 + (y_n' - \eta)^2}] - K_0[\gamma \sqrt{(x_m' - \xi)^2 + (y_n - \eta)^2}] - \\ - K_0[\gamma \sqrt{(x_m' - \xi)^2 + (y_n' - \eta)^2}]\} \quad (2.15)$$

где $K_0(z)$ — функция Макдональда, а ¹

$$x_m = 2ml + x, \quad x_m' = 2ml - x \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \\ y_n = 2nd + y, \quad y_n' = 2nd - y \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (2.16)$$

и удовлетворяющая уравнениям (2.12) и граничным условиям вида ²

$$G(0, \eta, x, y) = 0, \quad G(l, \eta, x, y) = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial \eta} \Big|_{\eta=d} = 0 \quad (2.17)$$

¹ Отметим, что

$$x'_{-m} = -x_m, \quad x'_{-(m-1)} - l = -(x_m - l), \quad y'_{-n} = -y_n, \quad y'_{-(n-1)} - d = -(y_n - d).$$

² Она легко получается по методу отражения из основного решения $\Delta K_0(\gamma R)$ уравнения (2.12), где $R = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$ — расстояние от фиксированной точки (ξ, η) до переменной точки (x, y) . Заметим, что при малых γl и γd выражение (2.15) функции $G(\xi, \eta, x, y)$ выгоднее преобразовать для практического использования к другому виду, на чем здесь не будем останавливаться.

При помощи формулы Грина получаем следующие выражения:

$$S(x, y) = \int_0^l \{G(\xi, d, x, y) f_d(\xi) - G(\xi, 0, x, y) f_0(\xi)\} e^{\gamma(\xi-a)} d\xi - \\ - \alpha \int_0^d \{G_{\xi}'(l, \eta, x, y) e^{\gamma a} + G_{\xi}'(0, \eta, x, y) e^{-\gamma a}\} d\eta \quad (2.18)$$

Следовательно,

$$p(x, y) = e^{-\gamma(x-a)} S(x, y) = \\ = \int_0^l \{G(\xi, d, x, y) f_d(\xi) - G(\xi, 0, x, y) f_0(\xi)\} e^{\gamma(\xi-x)} d\xi - \\ - \alpha \int_0^d \{G_{\xi}'(l, \eta, x, y) e^{\gamma(l-x)} + G_{\xi}'(0, \eta, x, y) e^{-\gamma x}\} d\eta \\ q(x, y) = e^{\gamma(x-a)} t(x, y) = \quad (2.19)$$

$$= - \int_0^l \{G(\xi, d, x, y) f_d(\xi) - G(\xi, 0, x, y) f_0(\xi)\} e^{-\gamma(\xi-x)} d\xi - \\ - \alpha \int_0^d \{G_{\xi}'(l, \eta, x, y) e^{-\gamma(l-x)} + G_{\xi}'(0, \eta, x, y) e^{\gamma x}\} d\eta$$

Таким образом,

$$v(x, y) = \frac{1}{2} (p - q) = \quad (2.20) \\ = \int_0^l \{G(\xi, d, x, y) f_d(\xi) - G(\xi, 0, x, y) f_0(\xi)\} \operatorname{ch} \gamma(x - \xi) d\xi - \\ - \alpha \left\{ \operatorname{sh} \gamma(l - x) \int_0^d G_{\xi}'(l, \eta, x, y) d\eta - \operatorname{sh} \gamma x \int_0^d G_{\xi}'(0, \eta, x, y) d\eta \right\} \\ u(x, y) = \frac{1}{2} (p + q) = \quad (2.21)$$

$$= \int_0^l \{G(\xi, d, x, y) f_d(\xi) - G(\xi, 0, x, y) f_0(\xi)\} \operatorname{sh} \gamma(\xi - x) d\xi - \\ - \alpha \left\{ \operatorname{ch} \gamma(l - x) \int_0^d G_{\xi}'(l, \eta, x, y) d\eta + \operatorname{ch} \gamma x \int_0^d G_{\xi}'(0, \eta, x, y) d\eta \right\}$$

Последние формулы очень упрощаются, так как входящие в их правые части интегралы по η не зависят, как будет сейчас показано, от y и d и оказываются простыми функциями от x . Действительно, согласно (2.15), получим, например,

$$\int_0^d G_{\xi}'(0, \eta, x, y) d\eta = \frac{\gamma}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ x_m \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_0^d \frac{K_1(\gamma \sqrt{x_m^2 + (y_n - \eta)^2})}{\sqrt{x_m^2 + (y_n - \eta)^2}} d\eta + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_0^d \frac{K_1(\gamma \sqrt{x_m^2 + (y_{-n'} - \eta)^2})}{\sqrt{x_m^2 + (y_{-n'} - \eta)^2}} d\eta \right] - x_m' \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_0^d \frac{K_1(\gamma \sqrt{x_m'^2 + (y_n - \eta)^2})}{\sqrt{x_m'^2 + (y_n - \eta)^2}} d\eta + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_0^d \frac{K_1(\gamma \sqrt{x_m'^2 + (y_{-n'} - \eta)^2})}{\sqrt{x_m'^2 + (y_{-n'} - \eta)^2}} d\eta \right] \right\} \quad (2.22)$$

Полагая в первом интеграле справа $y_n - \eta = 2nd + y - \eta = t$, а во втором $y_{-n'} - \eta = -(2nd + y + \eta) = -t$ и объединяя получающиеся интегралы по t , находим

$$\begin{aligned} & \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_0^d \frac{K_1(\gamma \sqrt{x_m^2 + (y_n - \eta)^2})}{\sqrt{x_m^2 + (y_n - \eta)^2}} d\eta + \int_0^d \frac{K_1(\gamma \sqrt{x_m^2 + (y_{-n'} - \eta)^2})}{\sqrt{x_m^2 + (y_{-n'} - \eta)^2}} d\eta \right] = \\ & = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{2nd+y-d}^{2nd+y+d} \frac{K_1(\gamma \sqrt{x_m^2 + t^2})}{\sqrt{x_m^2 + t^2}} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_1(\gamma \sqrt{x_m^2 + t^2})}{\sqrt{x_m^2 + t^2}} dt = \frac{\pi e^{-\gamma|x_m|}}{\gamma|x_m|} \quad (2.23) \end{aligned}$$

При этом использована известная формула

$$\int_0^{\infty} \frac{K_1(\gamma \sqrt{a^2 + t^2})}{\sqrt{a^2 + t^2}} dt = \frac{\pi e^{-\gamma|a|}}{2\gamma|a|} \quad (2.24)$$

верная для любого вещественного $a \geq 0$.

Подставляя в (2.22) полученный результат и ему аналогичный, соответствующий замене x_m на x_m' в формуле (2.23), приходим к соотношению

$$\begin{aligned} \int_0^d G_{\xi}'(0, \eta, x, y) d\eta &= \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{x_m}{|x_m|} e^{-\gamma|x_m|} - \frac{x_m'}{|x_m'|} e^{-\gamma|x_m'|} \right\} = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{x_m}{|x_m|} e^{-\gamma|x_m|} = \frac{\text{sh } \gamma(l-x)}{\text{sh } \gamma l} \quad (2.25) \end{aligned}$$

причем учтено, что $x_m' = -x_m = -(2ml + x)$. Аналогично находим

$$\int_0^d G_{\xi}'(l, \eta, x, y) d\eta = -\frac{\text{sh } \gamma x}{\text{sh } \gamma l} \quad (2.26)$$

Подстановка полученных результатов в (2.20) и (2.21) дает

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \int_0^l \{G(\xi, d, x, y) f_d(\xi) - G(\xi, 0, x, y) f_0(\xi)\} \text{ch } \gamma(x - \xi) d\xi + \\ &+ \frac{2\alpha \text{sh } \gamma x \text{sh } \gamma(l-x)}{\text{sh } \gamma l} \quad (2.27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_0^l \{G(\xi, d, x, y) f_d(\xi) - G(\xi, 0, x, y) f_0(x)\} \text{sh } \gamma(\xi - x) d\xi - \\ &- \alpha \frac{\text{sh } \gamma(l-2x)}{\text{sh } \gamma l} \quad (2.28) \end{aligned}$$

Условия $v(x, 0) = v(x, d) = 0$ приводятся теперь к такому виду:

$$\begin{aligned} & \int_0^l \{G(\xi, d, x, 0) f_d(\xi) - G(\xi, 0, x, 0) f_0(\xi)\} \text{ch } \gamma(x - \xi) d\xi = \\ &= -2\alpha \frac{\text{sh } \gamma(l-x) \text{sh } \gamma x}{\text{sh } \gamma l} \quad (2.29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^l \{G(\xi, d, x, d) f_d(\xi) - G(\xi, 0, x, d) f_0(\xi)\} \text{ch } \gamma(x - \xi) d\xi = \\ &= -2\alpha \frac{\text{sh } \gamma(l-x) \text{sh } \gamma x}{\text{sh } \gamma l} \quad (2.30) \end{aligned}$$

Из (2.15) непосредственно следует, что

$$G(\xi, d, x, d) = G(\xi, 0, x, 0), \quad G(\xi, d, x, 0) = G(\xi, 0, x, d)$$

Поэтому, вычитая (2.29) из (2.30), получаем

$$\int_0^l \{G(\xi, 0, x, 0) - G(\xi, 0, x, d)\} [f_d(\xi) + f_0(\xi)] \operatorname{ch} \gamma(x - \xi) d\xi = 0$$

$$(0 < x < l) \quad (2.31)$$

Таким образом, должно быть ¹

$$f_d(\xi) = -f_0(\xi) \quad (2.32)$$

и уравнения (2.29), (2.30) приводятся к одному, а именно

$$\int_0^l \{G(\xi, d, x, 0) + G(\xi, 0, x, 0)\} f_0(\xi) \operatorname{ch} \gamma(x - \xi) d\xi = 2\alpha \frac{\operatorname{sh} \gamma x \operatorname{sh} \gamma(l - x)}{\operatorname{sh} \gamma l} \quad (2.33)$$

Это интегральное уравнение для функции $f_0(\xi)$. Если из этого уравнения определена функция $f_0(\xi)$, то по формулам (2.27), (2.28) и (2.32), через нее выражаются u и v , т. е. находится полное решение задачи.

Формулы (2.27) и (2.28) приобретают при этом такой вид:

$$u = \int_0^l [G(\xi, d, x, y) + G(\xi, 0, x, y)] f_0(\xi) \operatorname{sh} \gamma(x - \xi) d\xi - \alpha \frac{\operatorname{sh} \gamma(l - 2x)}{\operatorname{sh} \gamma l} \quad (2.34)$$

$$(2.35)$$

$$v = - \int_0^l [G(\xi, d, x, y) + G(\xi, 0, x, y)] f_0(\xi) \operatorname{ch} \gamma(x - \xi) d\xi + 2\alpha \frac{\operatorname{sh} \gamma x \operatorname{sh} \gamma(l - x)}{\operatorname{sh} \gamma l}$$

Если $[\partial v / \partial y]_{y=0} = 0$, то в правых частях формул (2.34) и (2.35) останутся только внеинтегральные члены и эти формулы будут точным решением (известным) одномерной задачи для уравнений (2.6), (2.7), полученных в предположении, что весь процесс зависит от x и не зависит от y . Иными словами, эти слагаемые дают точное решение задачи о соответствующем течении жидкости не в трубе прямоугольного сечения, а между двумя параллельными бесконечными в направлении оси y пластинами.

Отметим также, что при $\alpha = 0$ правая часть уравнения (2.33) обращается в нуль, причем должно быть и $f_0(\xi) = 0$, а стало быть, согласно (2.34) и (2.35), и $u = v = 0$. Из формулы (2.4) следует, что при этом

$$H_z = \frac{4\pi P}{H^0 \mu} (a - x) \quad (2.36)$$

а так как из условия $\alpha = 0$ вытекает, что $\frac{P}{H^0 \mu} = \frac{I}{2ac}$, то

$$H_z = \frac{2\pi I}{c} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \quad (2.37)$$

Отсюда для плотности тока \mathbf{j} получается значение

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{grad} H_z \times \mathbf{i}_z = - \frac{I}{l} \mathbf{i}_y \quad (2.38)$$

т. е. ток течет параллельно оси y , причем плотность его по оси x постоянна. При этом имеем статический режим, когда жидкость находится в покое, так как перепад давления уравновешивается электромагнитными силами, действующими на токи \mathbf{j} со стороны поля \mathbf{H}^0 .

¹ Это вытекает более непосредственно из характера симметрии исходной задачи.

Из уравнения (2.33) видно, что

$$f_0(\xi) = \alpha \Phi(\xi) \quad (2.39)$$

где функция $\Phi(\xi)$ уже от α не зависит.

Аналогичного типа формулы получаются, согласно (2.34) и (2.35) для v и u . Для $\Phi(\xi)$ получается уравнение

$$\int_0^l \{G(\xi, 0, x, 0) + G(\xi, d, x, 0)\} \Phi(\xi) \operatorname{ch} \gamma(x - \xi) d\xi = \frac{2 \operatorname{sh} \gamma x \operatorname{sh} \gamma(l - x)}{\operatorname{sh} \gamma l} \quad (2.40)$$

Из выражения (2.15) для $G(\xi, \eta, x, y)$ видно, в частности, что при $\gamma d \gg 1$ слагаемое $G(\xi, d, x, 0)$ в левой части уравнения (2.40) становится очень малым по сравнению с $G(\xi, 0, x, 0)$.

Так как это слагаемое отражает влияние конечности размера сечения трубы в направлении оси y на распределение функции $f_0(\xi) = [\partial v / \partial y]_{y=0}$ вдоль стороны $y = 0$, т. е. влияние на это распределение стенки, находящейся при $y = d$, то из сказанного следует, что при $\gamma d \gg 1$ этим влиянием можно пренебречь, с тем большей точностью, чем параметр γd больше. При $d = \infty$, что соответствует случаю сечения не в виде прямоугольника, а в форме полуполосы, оно вообще исчезает. Уравнение (2.40) принимает при этом вид

$$\int_0^l g(\xi, 0, x, 0) \varphi(\xi) \operatorname{ch} \gamma(x - \xi) d\xi = \frac{2 \operatorname{sh} \gamma x \operatorname{sh} \gamma(l - x)}{\operatorname{sh} \gamma l} \quad (2.41)$$

где $\varphi(\xi)$ — соответствующее решение, а $g(\xi, 0, x, 0)$ — функция Грина для полуполосы, получаемая из (2.15) предельным переходом к случаю $d = \infty$ и равная

$$g(\xi, \eta, x, y) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \{K_0(\gamma \sqrt{(x_m - \xi)^2 + (y - \eta)^2}) + \\ + K_0(\gamma \sqrt{(x_m - \xi)^2 + (y + \eta)^2}) - K_0(\gamma \sqrt{(x_{m'} - \xi)^2 + (y - \eta)^2}) - \\ - K_0(\gamma \sqrt{(x_{m'} - \xi)^2 + (y + \eta)^2})\} \quad (2.42)$$

так как в (2.15) все члены с $n \neq 0$ обращаются в нуль.

Вводя безразмерные переменные $z = x/l$, $\zeta = \xi/l$ и полагая $\gamma l = M$ и $l\varphi(zl) = \psi(z)$, окончательно находим¹

$$\int_0^l g(l\zeta, 0, lz, 0) \psi(\zeta) \operatorname{ch} M(z - \zeta) d\zeta = \frac{2 \operatorname{sh} Mz \operatorname{sh} M(1 - z)}{\operatorname{sh} M} \quad (2.43)$$

где

$$g(l\zeta, 0, lz, 0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [K_0(M|2m + z - \zeta|) - K_0(M|2m - z - \zeta|)] \quad (2.44)$$

Это однопараметрическое уравнение для искомой функции $\psi(\zeta)$; M — число Гартмана,

В дальнейшем рассматриваются некоторые следствия, вытекающие из этого уравнения.

¹ Очевидно, нет опасности спутать это $z = x/l$ с координатой z в направлении оси трубы.

3. Для малых и умеренных значений M уравнение (2.43) можно решать численно, сводя его к системе совокупных линейных уравнений, причем, следует учесть¹, что $\psi(0) = \psi(1) = 0$. При больших значениях аргумента функция $K_0(u)$ асимптотически равна $e^{-u} \sqrt{\pi/2u}$; поэтому в случае больших значений M ряд (2.44) для функции $g(l\zeta, 0, lz, 0)$ сходится очень быстро. При достаточно больших M можно ограничиться в формуле (2.44) тремя членами, а именно

$$g(l\zeta, 0, lz, 0) \approx \frac{1}{\pi} \{K_0(M|z - \zeta|) - K_0[M_1(z + \zeta)] - K_0[M(2 - z - \zeta)]\} \quad (3.1)$$

в соответствии с чем уравнение (2.43) примет следующий вид:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^1 \{K_0(M|z - \zeta|) - K_0(M|z + \zeta|) - K_0[M(2 - z - \zeta)]\} \psi(\zeta) \times \\ \times \operatorname{ch} M(z - \zeta) d\zeta = \frac{2 \operatorname{sh} Mz \operatorname{sh} M(1 - z)}{\operatorname{sh} M} \quad (3.2)$$

При численном решении этого уравнения следует учитывать, что ядро его становится бесконечным при $\zeta = z$. Разобьем весь интервал интегрирования $(0, 1)$ на достаточно малые субинтервалы (ζ_i, ζ_{i+1}) и воспользуемся приближенным равенством

$$\int_{\zeta_i}^{\zeta_{i+1}} g(l\zeta, 0, lz, 0) \operatorname{ch} M(z - \zeta) \psi(\zeta) d\zeta \approx \psi(\zeta_i^\circ) \times \\ \times \int_{\zeta_i}^{\zeta_{i+1}} g(l\zeta, 0, lz, 0) \operatorname{ch} M|z - \zeta| d\zeta \quad (3.3)$$

где ζ_i° — некоторое среднее междупредельное значение ζ , например, $\zeta_i^\circ = 1/2(\zeta_i + \zeta_{i+1})$. Существенно при этом, что входящий в эту формулу интеграл берется как неопределенный в известных функциях, если использовать формулы²

$$\int e^{\pm t} K_0(t) dt = te^{\pm t} [K_0(t) \pm K_1(t)] \quad (3.4)$$

и учесть выражение (3.1) для $g(l\zeta, 0, lz, 0)$ и то, что³

$$\operatorname{ch} M(z - \zeta) = \frac{1}{2} [e^{M(z-\zeta)} + e^{-M(z-\zeta)}]$$

4. Переходим к получению асимптотической формы уравнения (2.43) при $M \rightarrow \infty$. Будем при этом исходить из того, что при $M \rightarrow \infty$ в подавляющей части интервала интегрирования, а именно везде, где $M|z - \zeta| \gg 1$ имеет место асимптотическое равенство

$$K_0(M|z - \zeta|) \operatorname{ch} M(z - \zeta) \approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2M|z - \zeta|}} \quad (4.1)$$

¹ Потому, что $f_0(\xi) = [\partial v / \partial y]_{y=0}$ обращается в нуль при $\xi = 0$ и $\xi = 1$, так как скорость v на этих стенках равна нулю.

² Эти формулы, легко проверяемые дифференцированием, представляют собой частный случай более общих, данных нами в работе [3] и воспроизведенных в [4], стр. 696.

³ Интеграл в формуле (3.3) сводится, очевидно, просто к сумме интегралов вида (3.4) с постоянными множителями.

и аналогичные

$$K_0[M(z + \zeta)] \operatorname{ch} M(z - \zeta) \approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2M(z + \zeta)}} \begin{cases} e^{-2M\zeta} & \text{при } z > \zeta \\ e^{-2Mz} & \text{при } z < \zeta \end{cases} \quad (4.2)$$

$$K_0[M(2 - z - \zeta)] \operatorname{ch} M(z - \zeta) \approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2M(2 - z - \zeta)}} \begin{cases} e^{-2M(1-\zeta)} & \text{при } z < \zeta \\ e^{-2M(1-z)} & \text{при } z > \zeta \end{cases} \quad (4.3)$$

причем (4.2) верно при условии $M(z + \zeta) \gg 1$, а (4.3) — при условии

$$M|2 - (z + \zeta)| \gg 1$$

Уравнение (3.2) можно представить в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\sqrt{2\pi M}} \left\{ \int_0^1 \frac{\psi(\zeta) d\zeta}{\sqrt{|z - \zeta|}} - e^{-2Mz} \int_z^1 \frac{\psi(\zeta) d\zeta}{\sqrt{z + \zeta}} - e^{-2M(1-z)} \int_0^z \frac{\psi(\zeta) d\zeta}{\sqrt{2 - z - \zeta}} - \right. \\ & \left. - \int_0^z \frac{\psi(\zeta) e^{-2M\zeta}}{\sqrt{z + \zeta}} d\zeta - \int_z^1 \frac{\psi(\zeta) e^{-2M(1-\zeta)}}{\sqrt{2 - z - \zeta}} d\zeta \right\} = \frac{2 \operatorname{sh} Mz \operatorname{sh} M(1-z)}{\operatorname{sh} M} - \delta(z) \quad (4.4) \end{aligned}$$

или, если положить $\psi(\zeta) = 2\sqrt{2\pi M} \chi(\zeta)$, еще так

$$\int_0^1 \frac{\chi(\zeta) d\zeta}{\sqrt{|z - \zeta|}} = \frac{2 \operatorname{sh} Mz \operatorname{sh} M(1-z)}{\operatorname{sh} M} - \delta(z) + R(z) \quad (4.5)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \delta(z) = & \int_0^1 \left[K_0(M|z - \zeta|) \operatorname{ch} M(z - \zeta) - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2M|z - \zeta|}} \right] \psi(\zeta) d\zeta - \\ & - \int_0^z \left\{ K_0[M(z + \zeta)] \operatorname{ch} M(z - \zeta) - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2M(z + \zeta)}} e^{-2M\zeta} \right\} \psi(\zeta) d\zeta - \\ & - \int_z^1 \left\{ K_0[M(z + \zeta)] \operatorname{ch} M(z - \zeta) - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2M(z + \zeta)}} e^{-2Mz} \right\} \psi(\zeta) d\zeta - \\ & - \int_0^z \left\{ K_0[M(2 - z - \zeta)] \operatorname{ch} M(z - \zeta) - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2M(2 - z - \zeta)}} e^{-2M(1-z)} \right\} \psi(\zeta) d\zeta - \\ & - \int_z^1 \left\{ K_0[M(2 - z - \zeta)] \operatorname{ch} M(z - \zeta) - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2M(2 - z - \zeta)}} e^{-2M(1-\zeta)} \right\} \psi(\zeta) d\zeta \quad (4.6) \end{aligned}$$

$$R(z) = e^{-2Mz} \int_z^1 \frac{\chi(\zeta) d\zeta}{\sqrt{z + \zeta}} + e^{-2M(1-z)} \int_0^z \frac{\chi(\zeta) d\zeta}{\sqrt{2 - z - \zeta}} \quad (4.7)$$

В правой части уравнения (4.4) первое слагаемое можно записать так:

$$\frac{2 \operatorname{sh} Mz \operatorname{sh} M(1-z)}{\operatorname{sh} M} = 1 - \frac{e^{-2Mz} + e^{-2M(1-z)} - e^{-2M}}{1 - e^{-2M}}$$

т. е. при очень больших M оно практически равно единице в подавляющей части интервала ($0 \leq z \leq 1$), обращаясь, однако, в нуль на его концах. Что касается $\delta(z)$, то она стремится с возрастанием M к нулю во всем интервале, так как подынтегральная функция в каждом из входящих в нее

интегралов практически отлична от нуля только в зоне, имеющей ширину порядка $O(M^{-1})$ в смежности с точкой z .

Так, например, в точках z , достаточно удаленных от краев интервала $(0, 1)$, где функция $\psi(\zeta)$ меняется относительно мало на ширине порядка $O(M^{-1})$, имеем приближенно

$$\int_0^1 \left\{ K_0(M|z-\zeta|) \operatorname{ch} M(z-\zeta) - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2M|z-\zeta|}} \right\} \psi(\zeta) d\zeta \approx \approx \frac{2\psi(z)}{M} \int_0^\infty \left[K_0(t) \operatorname{ch} t - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2t}} \right] dt \quad (4.3)$$

Отсюда видно, что этот интеграл имеет во всяком случае порядок $O(M^{-1})$. Однако стоящий справа интеграл равен нулю, что легко получается при помощи формулы (3.4), которая дает

$$\int_0^\infty \left[K_0(t) e^t - \sqrt{\frac{\pi}{2t}} \right] dt = -1, \quad \int_0^\infty K_0(t) e^{-t} dt = 1$$

или

$$\int_0^\infty \left[K_0(t) \operatorname{ch} t - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2t}} \right] dt = 0$$

Из этого видно, что в местах, где функция $\psi(\zeta)$ меняется достаточно плавно, рассматриваемый интеграл будет иметь еще более высокий порядок малости.

Аналогичным образом можно оценить и остальные интегралы, входящие в $\delta(z)$.

Поэтому при отыскании асимптотического решения величину $\delta(z)$ в первом приближении будем отбрасывать. Аналогичным образом отбросим также слагаемые

$$\int_1^z \frac{\psi(\zeta) e^{-2M\zeta} d\zeta}{\sqrt{z+\zeta}}, \quad \int_z^1 \frac{\psi(\zeta) e^{-2M(1-\zeta)} d\zeta}{\sqrt{2-z-\zeta}} = \int_0^z \frac{\psi(\zeta_1) e^{-2M\zeta_1} d\zeta_1}{\sqrt{z_1+\zeta_1}} \quad (z_1 = 1 - z)$$

причем учтено, что $\psi(1-\zeta) = \psi(\zeta)$. Что касается второго и третьего слагаемых в фигурной скобке слева в формуле (4.4), то их следует оставить, так как хотя входящие в них множители e^{-2Mz} и $e^{-2M(1-z)}$ и убывают чрезвычайно быстро при удалении от концов $z = 0$ и $z = 1$ интервала, но именно они обуславливают обращение в нуль левой части уравнения (4.4) при $z = 0$ и $z = 1$, как это имеет место для правой части того же уравнения, из которой вычеркнуто $\delta(z)$, и без чего правая и левая стороны уравнения не могли бы в концевых точках равняться одна другой.

Уравнение (4.5) приобретает теперь (приближенно) такой вид:

$$\int_0^1 \frac{\chi(\zeta) d\zeta}{\sqrt{|z-\zeta|}} = \frac{2 \operatorname{sh} Mz \operatorname{sh} M(1-z)}{\operatorname{sh} M} + e^{-2Mz} \int_z^1 \frac{\chi(\zeta) d\zeta}{\sqrt{z+\zeta}} + e^{-2M(1-z)} \int_0^z \frac{\chi(\zeta) d\zeta}{\sqrt{2-z-\zeta}} \quad (4.9)$$

Если бы правая сторона уравнений (4.5) или (4.9) была известна, то $\chi(z)$ можно было бы найти в квадратурах, используя известное решение сингулярного интегрального уравнения вида

$$\int_0^1 \frac{\chi(\zeta) d\zeta}{\sqrt{|z-\zeta|}} = w(z) \quad (0 \leq z \leq 1) \quad (4.10)$$

где функция $w(z)$ считается известной [5,6].

Используем в дальнейшем форму решения этого уравнения, данную в работе [6], а именно

$$\chi(z) = - \frac{1}{\sqrt{2\pi} \Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)} \frac{1}{z^{1/4}} \frac{d}{dz} \int_z^1 \frac{\sqrt{\xi} d\xi}{(\xi - z)^{1/4}} \frac{d}{d\xi} \int_0^\xi \frac{w(\sigma) d\sigma}{\sigma^{1/4} (\xi - \sigma)^{1/4}} \quad (4.11)$$

Замечание. Подставляя в (4.11) вместо $w(z)$ правую часть уравнения (4.5), получим новую форму (точную) интегрального уравнения для искомой функции $\chi(z)$, а подставляя правую часть уравнения (4.9), получим приближенное интегральное уравнение для $\chi(z)$.

В работе [6] формула (4.11) дана в несколько ином виде, так как решаемое уравнение пишется таким образом:

$$\int_0^a \frac{\psi(y) dy}{|x^2 - y^2|^p} = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq a \quad (4.12)$$

где $a = \text{const}$, $p = \text{const}$, $0 < p < 1$.

Формула (4.10) получается из данного в [6] решения уравнения (4.12) при $p = 1/2$ и при соответствующей замене переменных.

Поступила 11 VIII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Sh e r c l i f f I. A. Steady motion of conducting fluids in pipes under transverse magnetic fields. Proc. of the Cambr. Phil. Soc., 1953, 1, 49.
2. У ф л я н д Я. С. Установившееся течение электропроводной жидкости в прямоугольном канале при наличии поперечного магнитного поля. ЖТФ, 1960, 10, 30.
3. Г р и н б е р г Г. А. The coastal refraction of electromagnetic waves. Journ. of Phys. of the USSR, 1942, 2, 6.
4. Г р и н б е р г Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Изд. АН СССР, М.—Л., 1948.
5. C a r l e m a n T. Ueber die Abel'sche Integralgleichung mit konstanten Integrationsgrenzen. Math. Zeitschrift, 1922, 15.
6. А х и е з е р Н. И., Щ е р б и н а В. А. Об обращении некоторых сингулярных интегралов. Записки математ. отд. физ.-математ. факультета Харьков. гос. ун-та им. А. М. Горького и Харьков. математ. общ.-ва, 1957, XXV, серия 4.