

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЙ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ТРЕМЯ ПАРАМЕТРАМИ

Н. А. Губарь

(Горький)

Проведено качественное исследование фазового цилиндрического пространства для одной кусочно-линейной системы, представляющей интерес для приложений. В частности, установлено существование полуустойчивого предельного цикла, охватывающего цилиндр. Получены аналитические выражения для всех бифуркационных поверхностей, разбивающих пространство параметров на области одинаковой качественной структуры.

1. Постановка задачи. К уравнению

$$\ddot{x} + \alpha [1 - \beta F'(x)] \dot{x} + F(x) = \gamma$$

где $F(x)$ — периодическая функция с периодом 2π приводит рассмотрение ряда электро-механических и механических систем (синхронных машин переменного тока, систем автоподстройки, теории маятника и т. д.). Это уравнение неоднократно рассматривалось при различной аппроксимации функции $F(x)$. В работе [1] при кусочно-линейной аппроксимации $F(x)$ и $\alpha > 0$, $\beta < 1$ находятся условия рождения предельного цикла из сепаратрисы, идущей из седла в седло. В работе [2] при синусоидальной аппроксимации функции $F(x)$ и $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ дается качественное исследование уравнения и приводятся оценки расположения в пространстве параметров бифуркационной поверхности для сепаратрисы, идущей из седла в седло. Обширная литература посвящена частному случаю $\beta = 0$ (см., например, [3-8]).

В предлагаемой работе при кусочно-линейной аппроксимации функции $F(x)$ и любых значениях α и β дается качественное исследование уравнения и приводятся аналитические выражения для всех бифуркационных поверхностей. Полагая

$$F(x) = \frac{2}{\pi} x \quad \text{при} \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad F(x) = -\frac{2}{\pi} x + 2 \quad \text{при} \quad \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$$

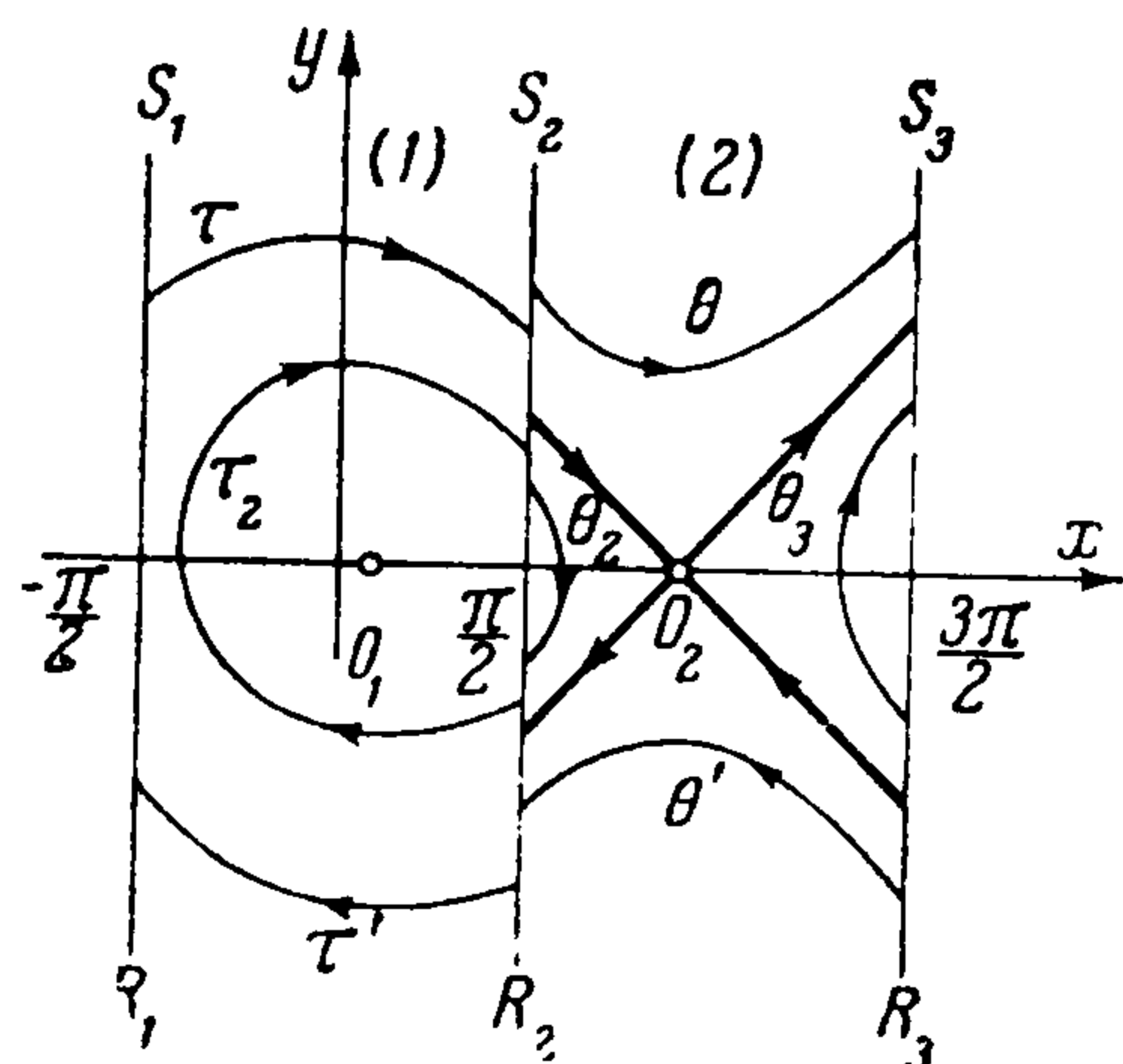
и вводя новые переменные и параметры, приходим к системе вида

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x - 2h_1 y + a \quad \text{при} \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \quad (1.1)$$

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = x - 2h_2 y - (\pi - a) \quad \text{при} \quad \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \quad (1.2)$$

Будем рассматривать фазовую цилиндрическую поверхность склеенной системы (1.1) — (1.2), развернутой на часть плоскости, соответствующей неравенствам $-\pi/2 \leq x \leq 3\pi/2$. Прямая $x = \pi/2$ разбивает рассматриваемую часть плоскости на области (1) и (2), в каждой из которых фазовые траектории определяются соответственно линейными системами

(1.1) и (1.2). Прямые $x = -\pi/2$ и $x = 3\pi/2$ отождествляются (фиг. 1). Склеенная система (1.1)—(1.2) имеет два состояния равновесия $O_1(a, 0)$ и $O_2(\pi - a, 0)$. Точка O_1 — простая особая точка системы (1.1). Очевидно, O_1 будет устойчивым фокусом при $0 < h_1 < 1$, неустойчивым фокусом при $-1 < h_1 < 0$ и центром при $h_1 = 0$. Далее особая точка O_1 —



Фиг. 1

устойчивый узел при $h_1 > 1$, неустойчивый узел при $h_1 < -1$ и дикритический узел при $|h_1| = 1$. Точка O_2 является простой особой точкой системы (1.2). При всех значениях параметра h_2 точка O_2 — седло, сепаратрисы которого определяются уравнениями

$$y = (-h_2 \pm \sqrt{h_2^2 + 1})(x - (\pi - a))$$

Существование предельных циклов системы (1.1) — (1.2) можно установить, рассматривая соответствующие точечные преобразования. Действительно, если существует предельный цикл, не охватывающий ци-

линдр, то он должен содержать внутри себя точку O_1 и либо пересекать одну прямую $x = \pi/2$, либо пересекать обе прямые $x = \pi/2$ и $x = 3\pi/2$. Таким образом, для определения предельных циклов, не охватывающих цилиндр, надо рассмотреть точечное преобразование прямой $x = \pi/2$ самой в себя, а также более сложное преобразование в случае, когда предельный цикл пересекает две прямые. Для определения предельных циклов, охватывающих цилиндр, надо рассмотреть точечные преобразования прямых $x = -\pi/2$, $x = \pi/2$ и $x = 3\pi/2$ одна в другую.

Обозначим через S_1, S_2, S_3 (R_1, R_2, R_3) полупрямые $x = -\pi/2$, $x = \pi/2$, $x = 3\pi/2$, соответствующие значениям $y > 0$ ($y < 0$). Фазовые траектории системы (1.1) осуществляют точечные преобразования полупрямой S_1 в S_2 , полупрямой R_2 в R_1 и полупрямой R_2 в S_2 . Обозначим эти преобразования соответственно через $L^{(1)}, L_-^{(1)}$ и $\Pi_2^{(1)}$. Фазовые траектории системы (1.2) осуществляют точечные преобразования полупрямой S_2 в S_3 , полупрямой R_3 в R_2 , полупрямой S_2 в R_2 и полупрямой R_3 в S_3 . Эти преобразования обозначим соответственно через $L^{(2)}, L_-^{(2)}, \Pi_2^{(2)}$ и $\Pi_3^{(2)}$ (фиг. 1).

В дальнейшем будем пользоваться следующими обозначениями:

$$\omega_1 = \sqrt{1 - h_1^2} \quad \text{при } |h_1| < 1, \quad \omega_1 = \sqrt{h_1^2 - 1} \quad \text{при } |h_1| > 1$$

$$k_1 = \frac{h_1}{\omega_1}, \quad \omega_2 = \sqrt{h_2^2 + 1}, \quad k_2 = \frac{h_2}{\omega_2}$$

Пусть $s_1, s_2, s_3, r_1, r_2, r_3$ — ординаты точек соответствующих полупрямых; $\tau/\omega_1, \tau'/\omega_1, \theta/\omega_2, \theta'/\omega_2, \tau_2/\omega_1, \theta_2/\omega_2, \theta_3/\omega_2$ — времена пробега изображающей точки (фиг. 1) через области, соответствующие преобразованиям $L^{(1)}, L_-^{(1)}, L^{(2)}, L_-^{(2)}, \Pi_2^{(1)}, \Pi_2^{(2)}, \Pi_3^{(2)}$. Величины s_1, \dots, r_3 , а также $\tau, \tau', \dots, \theta_3$ принимают положительные или равные нулю значения.

Приведем уравнения в параметрическом виде функций соответствия (см., например, [4] гл. 3) для каждого из указанных преобразований.

Преобразования $L^{(1)}$ и $L_-^{(1)}$

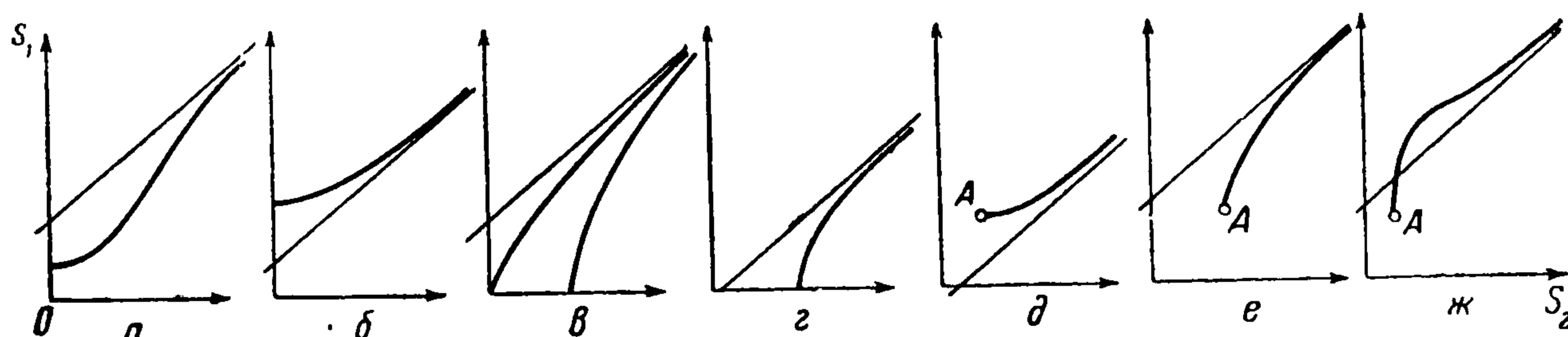
$$s_1(\tau, h_1, a) = \left(\frac{\pi}{2} - a\right) \frac{\omega_1}{\sin \tau} e^{k_1 \tau} + \left(\frac{\pi}{2} + a\right) (\omega_1 \operatorname{ctg} \tau + h_1)$$

$$s_2(\tau, h_1, a) = s_1(\tau, -h_1, -a) \quad (1.3)$$

$$\frac{ds_1}{ds_2} = e^{2k_1 \tau} \frac{s_2}{s_1} \quad (1.4)$$

$$\frac{d^2 s_1}{ds_2^2} = \frac{\sin \tau}{\omega_1 s_1^3} e^{3k_1 \tau} \left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) s_1 - \left(\frac{\pi}{2} + a\right) s_2 \right] \quad (1.5)$$

В случае $|h_1| > 1$ выражения для $s_1(\tau, h_1, a)$, $s_2(\tau, h_1, a)$ и производных получим, если в правых частях равенств (1.3) и (1.5) заменим $\sin \tau$ и $\operatorname{ctg} \tau$ через $\operatorname{sh} \tau$ и $\operatorname{cth}(\tau)$. Равенство (1.4) останется без изменения.



Фиг. 2

В случаях $h_1 = \pm 1$ надо в равенствах (1.3)–(1.5) заменить τ через $\omega_1 \tau$ и перейти к пределу при $h_1 \rightarrow \pm 1$.

Из рассмотрения выражений (1.3) и соответствующей фазовой картины вытекает, что при $|h_1| < 1$ возможны следующие случаи.

1) Если $(\pi/2 - a) e^{k_1 \pi} > (\pi/2 + a)$, то для получения всех возможных значений s_1 и s_2 параметр τ надо менять от нуля до некоторого значения $\tau = \tau^* < \pi$, при котором $s_2(\tau^*) = 0$, $s_1(\tau^*) > 0$.

2) Если $(\pi/2 - a) e^{k_1 \pi} = (\pi/2 + a)$, то $0 < \tau \leq \pi$ и $s_1(\pi) = s_2(\pi) = 0$.

3) Если $(\pi/2 - a) e^{k_1 \pi} < (\pi/2 + a)$, то $0 < \tau < \tau_0 < \pi$ и $s_1(\tau_0) = 0$, $s_2(\tau_0) > 0$.

В случае, когда точка O_1 является узлом, т. е. при $|h_1| \geq 1$, параметр τ надо менять от нуля до некоторого значения $\tau = \tau^* > 0$, при котором $s_2(\tau^*) = 0$, $s_1(\tau^*) > 0$, если $h_1 > 0$; параметр τ меняется от нуля до некоторого значения τ_0 , при котором $s_1(\tau_0) = 0$, $s_2(\tau_0) > 0$, если $h_1 < 0$.

Уравнения (1.3) и соответствующие уравнения при $|h_1| \geq 1$ определяют для преобразования $L^{(1)}$ функцию соответствия $s_1 = s_1(s_2)$. При всех значениях параметров a и h_1 , кривая $s_1 = s_1(s_2)$ имеет асимптоту

$$s_1 = s_2 + 2\pi h_1 \quad (1.6)$$

Равенства (1.3)–(1.6) позволяют определить вид кривой $s_1 = s_1(s_2)$. Она изображена на фиг. 2, где

$$0 < a < \frac{\pi}{2}, \quad h_1 \geq 1 \quad \text{или} \quad 0 < h_1 < 1, \quad \left(\frac{\pi}{2} - a\right) e^{k_1 \pi} > \left(\frac{\pi}{2} + a\right) \quad (\text{фиг. 2а})$$

$$a = 0, \quad h_1 > 0 \quad (\text{фиг. 2б})$$

$$0 < a < \pi/2, \quad 0 \leq h_1 < 1, \quad (\pi/2 - a) e^{k_1 \pi} \leq (\pi/2 + a) \quad (\text{фиг. 2в})$$

$$0 \leq a < \pi/2, \quad h_1 < 0 \quad (\text{фиг. 2г})$$

Уравнения для функции соответствия преобразования $L_-^{(1)}$ получатся, если в равенствах (1.3) и соответствующих равенствах при $|h_1| \geq 1$ положить $s_1 \leq 0$, $s_2 \leq 0$, $\tau \leq 0$ и заменить затем s_1 , s_2 и τ соответственно через $-r_1$, $-r_2$, $-\tau'$. Легко видеть, что тогда выполняются равенства

$$r_1(\tau', h_1) = s_1(\tau', -h_1), \quad r_2(\tau', h_1) = s_2(\tau', -h_1) \quad (1.7)$$

Преобразования $L_-^{(2)}$ и $L_-^{(2)}$

$$s_3(\theta, h_2, a) = \left(\frac{\pi}{2} - a\right) \frac{\omega_2}{\text{sh } \theta} e^{-k_2 \theta} + \left(\frac{\pi}{2} + a\right) (\omega_2 \text{cth } \theta - h_2)$$

$$s_2(\theta, h_2, a) = s_3(\theta, -h_2, -a) \quad (1.8)$$

$$\frac{ds_3}{ds_2} = e^{-2k_2 \theta} \frac{s_2}{s_3} \quad (1.9)$$

$$\frac{d^2 s_3}{ds_2^2} = -\frac{\text{sh } \theta}{\omega_2 s_3^3} e^{-3k_2 \theta} \left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) s_3 - \left(\frac{\pi}{2} + a\right) s_2 \right] \quad (1.10)$$

Из рассмотрения выражений (1.8) и соответствующей фазовой картины вытекает, что параметр θ надо менять от нуля до ∞ . При этом s_2 и s_3 стремятся к ∞ при θ , стремящемся к нулю, и

$$\lim s_3 = (\pi/2 + a)(-h_2 + \omega_2), \quad \lim s_2 = (\pi/2 - a)(h_2 + \omega_2) \quad \text{при } \theta \rightarrow \infty$$

Уравнения (1.8) определяют для преобразования $L_-^{(2)}$ функцию соответствия $s_3 = s_3(s_2)$. Легко видеть, что эта функция имеет асимптоту

$$s_3 = s_2 - 2\pi h_2 \quad (1.11)$$

Точка $A [(h_2 + \omega_2)(\pi/2 - a), (-h_2 + \omega_2)(\pi/2 + a)]$ кривой $s_3 = s_3(s_2)$ соответствует значению $\theta = \infty$. Вид этой кривой, определенный при помощи равенств (1.8)–(1.11), представлен на фиг. 2

$$0 < a < \pi/2, \quad h_2 \geq 0 \quad \text{или} \quad a = 0, \quad h_2 > 0 \quad (\text{фиг. 2д})$$

$$a = 0, \quad h_2 < 0 \quad (\text{фиг. 2е})$$

$$0 < a < \pi/2, \quad h_2 < 0 \quad (\text{фиг. 2ж})$$

Рассуждая так же, как в случае преобразования $L_-^{(1)}$, получим, что для функции соответствия преобразования $L_-^{(2)}$, которая определяется равенствами $r_2 = r_2(\theta')$ и $r_3 = r_3(\theta')$, выполняются соотношения

$$r_3(\theta', h_2) = s_3(\theta', -h_2), \quad r_2(\theta', h_2) = s_2(\theta', -h_2) \quad (1.12)$$

Преобразование $\Pi_2^{(1)}$

$$s_2(\tau_2, h_1) = \left(-\frac{\omega_1}{\sin \tau_2} e^{-k_1 \tau_2} + \omega_1 \text{ctg } \tau_2 - h_1 \right) (\pi/2 - a)$$

$$r_2(\tau_2, h_1) = s_2(\tau_2, -h_1) \quad (1.13)$$

$$\frac{ds_2}{dr_2} = e^{-2k_1 \tau_2} \frac{r_2}{s_2} \quad (1.14)$$

Здесь $|h_1| < 1$. Параметр τ_2 надо менять от π до некоторого значения $\tau_2 = \tau_2^\circ \leq 2\pi$, при котором

$$s_2(\tau_2^\circ) = 0, \quad r_2(\tau_2^\circ) > 0, \quad \text{если } h_1 > 0$$

$$r_2(\tau_2^\circ) = 0, \quad s_2(\tau_2^\circ) > 0 \quad \text{если } h_1 < 0$$

$$r_2(\tau_2^\circ) = 0, \quad s_2(\tau_2^\circ) = 0, \quad \text{если } h_1 = 0$$

Для получения соответствующих формул преобразований $\Pi_2^{(2)}$ и $\Pi_3^{(2)}$ введем обозначения

$$u(\theta, h_2) = -\omega_2 \left(\frac{e^{k_2\theta}}{\operatorname{sh} \theta} - \operatorname{cth} \theta \right) + h_2, \quad v(\theta, h_2) = u(\theta, -h_2) \quad (1.15)$$

Легко видеть, что u и v стремятся к нулю при $\theta \rightarrow 0$ и $\lim u = (h_2 + \omega_2)$, $\lim v = (-h_2 + \omega_2)$ при $\theta \rightarrow \infty$. Далее

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{\omega_2}{\operatorname{sh} \theta} e^{k_2\theta} v, \quad \frac{dv}{d\theta} = \frac{\omega_2}{\operatorname{sh} \theta} e^{-k_2\theta} u \quad (1.16)$$

$$\frac{du}{dv} = e^{2k_2\theta} \frac{v}{u} \quad (1.17)$$

Нетрудно показать, что при $h_2 > 0$ и $h_2 < 0$ выполняются соответственно следующие неравенства:

$$u(\theta, h_2) - v(\theta, h_2) > 0, \quad u(\theta, h_2) - v(\theta, h_2) < 0 \quad (1.18)$$

Можно показать также, что при всех положительных значениях величин h_1 , h_2 и θ выполняется неравенство

$$[v^2(\theta) + 2v(\theta)h_1 + 1] e^{2k_2\theta} > [u^2(\theta) - 2u(\theta)h_1 + 1] \quad (1.19)$$

Преобразования $\Pi_2^{(2)}$ и $\Pi_3^{(2)}$

$$s_2(\theta_2) = u(\theta_2)(\pi/2 - a), \quad r_2(\theta_2) = v(\theta_2)(\pi/2 - a) \quad (1.20)$$

$$s_3(\theta_3) = v(\theta_3)(\pi/2 + a), \quad r_3(\theta_3) = u(\theta_3)(\pi/2 + a) \quad (1.21)$$

Все выводы о функциях соответствия и их производных для преобразований $\Pi_2^{(2)}$ и $\Pi_3^{(2)}$ следуют из формул (1.15)–(1.18), (1.20)–(1.21).

2. Предельные циклы, охватывающие цилиндр. Рассмотрим сложное преобразование $L = L^{(1)}L^{(2)}$. Неподвижным точкам этого преобразования соответствуют предельные циклы, охватывающие цилиндр и расположенные в верхней части фазовой плоскости $y > 0$. Для отыскания этих неподвижных точек надо найти точки пересечения кривых $s_1 = s_1(s_2)$ и $s_3 = s_3(s_2)$.

Используя соотношения (1.4)–(1.6), (1.9)–(1.11), можно установить наличие и количество точек пересечения этих кривых и характер соответствующих предельных циклов, основываясь на следующих легко доказываемых предложениях.

1°. Если во всех точках пересечения выполняется неравенство $d(s_1 - s_3)/ds_2 < 0 (> 0)$, то может быть не более одной точки пересечения и эта точка в силу теоремы Кенигса ([4], гл. 5) соответствует устойчивому (соответственно неустойчивому) предельному циклу.

2°. Если $d^2(s_1 - s_3)/ds_2^2 < 0 (> 0)$ при всех значениях s_2 и разность $s_1 - s_3 < 0 (> 0)$ при достаточно больших значениях s_2 , то может быть не более одной точки пересечения и эта точка соответствует устойчивому (неустойчивому) предельному циклу.

Нетрудно видеть, что бифуркации, при которых появляются или исчезают точки пересечения кривых $s_1 = s_1(s_2)$ и $s_3 = s_3(s_2)$, имеют место:

- а) если точка A кривой $s_3 = s_3(s_2)$ лежит на кривой $s_1 = s_1(s_2)$;
- в) если асимптоты рассматриваемых кривых совпадают;
- с) если рассматриваемые кривые касаются.

Случай (а). Должны выполняться равенства

$$s_1(\tau) = (-h_2 + \omega_2)(\pi/2 + a), \quad s_2(\tau) = (h_2 + \omega_2)(\pi/2 - a)$$

где $s_1(\tau)$ и $s_2(\tau)$ определяются равенствами (1.3) при $|h_1| < 1$ и соответствующими равенствами при $|h_1| \geq 1$. Исключая параметр τ и вводя обозначение

$$b = \ln \frac{\pi/2 + a}{\pi/2 - a} \quad (2.1)$$

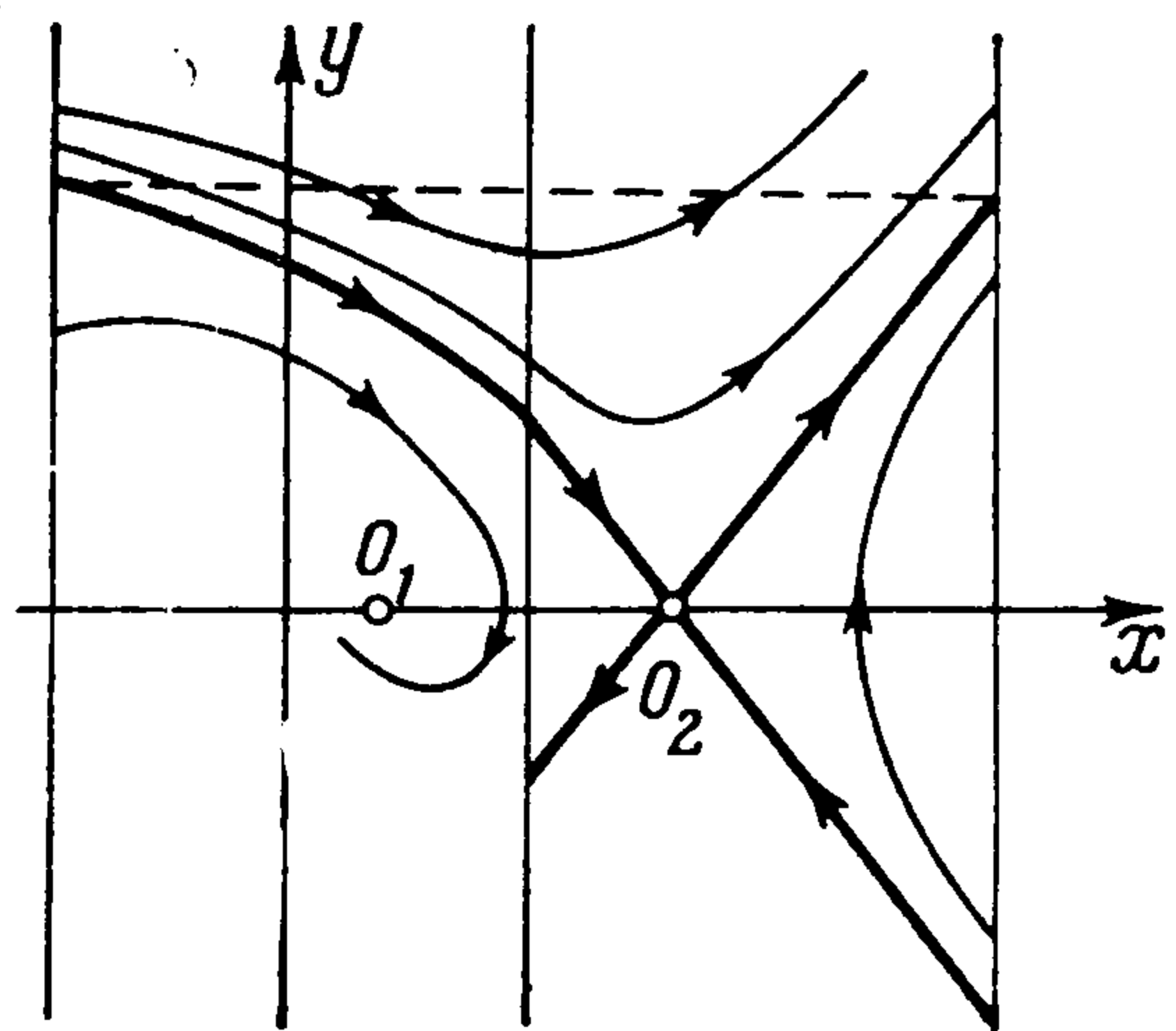
приходим к следующему соотношению между параметрами a , h_1 и h_2 , при которых осуществляется случай (а)

$$b = \frac{1}{2} \ln \frac{(\omega_2 + h_2)(\omega_2 + h_1)}{(\omega_2 - h_2)(\omega_2 - h_1)} + D(h_1, h_2) \quad (2.2)$$

Здесь

$$D(h_1, h_2) = \begin{cases} k_1 \left(\pi - \arctg \frac{\omega_1 \omega_2}{h_1 h_2} \right) & \text{при } 0 \leq h_1 < 1, h_2 \geq 0 \\ k_1 \arctg \frac{\omega_1 \omega_2}{-h_1 h_2} & \text{при } h_1 h_2 \leq 0, |h_1| < 1 \\ k_1 \operatorname{arcth} \frac{\omega_1 \omega_2}{-h_1 h_2} & \text{при } h_1 h_2 \leq 0, |h_1| > 1 \\ \pm \frac{\omega_2}{h_2} & \text{при } h_1 h_2 \leq 0, h_1 = \pm 1 \end{cases} \quad (2.3)$$

Значения параметров a , h_1 и h_2 , удовлетворяющие равенствам (2.2)–(2.3), будут бифуркационными. При этих значениях на верхней фазовой полуплоскости сепаратриса идет из седла в седло, охватывая цилиндр (фиг. 3). Рассматривая поведение кривых $s_1 = s_1(s_2)$ и $s_3 = s_3(s_2)$, нетрудно



Фиг. 3

заключить, что при $h_2 \geq 0$ ($h_2 < 0$) и с ростом (убыванием) параметра a или с убыванием (ростом) параметра h_2 в верхней фазовой полуплоскости из сепаратрисы, идущей из седла в седло, рождается один устойчивый (неустойчивый) предельный цикл.

Случай (б). Этот случай характеризуется равенством

$$h_1 + h_2 = 0 \quad (2.4)$$

На фазовой плоскости при этом предельный цикл появляется из бесконечности. Именно, при значениях параметров $a \geq 0$, $h_1 < 0$ и $a > 0$, $h_1 > 0$ ($a = 0$, $h_1 > 0$) и при переходе от неравенства $h_1 + h_2 < 0$ ($h_1 + h_2 > 0$) к неравенству $h_1 + h_2 > 0$ ($h_1 + h_2 < 0$) на верхней фазовой полуплоскости из бесконечности появляется один устойчивый (неустойчивый) предельный цикл, охватывающий цилиндр. Это следует из поведения кривых $s_1 = s_1(s_2)$ и $s_3 = s_3(s_2)$.

Случай (с). Можно показать, что этот случай осуществляется только при значениях параметров h_1 и h_2 , удовлетворяющих неравенствам

$$h_1 > 0, \quad h_2 < 0, \quad h_1 + h_2 > 0, \quad h_1^2 - h_2^2 < 1 \quad (2.5)$$

В силу соотношений (1.4) и (1.9) случай (с) характеризуется равенствами $e^{2k_1\tau} = e^{-2k_2\theta}$ и $s_1(\tau) = s_3(\theta)$, где $s_1(\tau)$ определяется так же, как в случае (а), а $s_3(\theta)$ определяется равенством (1.8).

Исключая параметры τ и θ и используя обозначение (2.1), приходим к соотношению между параметрами a , h_1 и h_2

$$b = k_1\tau_0 - \frac{1}{2} \ln \varphi_2(\tau_0) \quad (2.6)$$

где $\tau_0 > 0$ — корень уравнения

$$\exp(-k_1\tau/k_2) = \varphi_1(\tau) \quad (2.7)$$

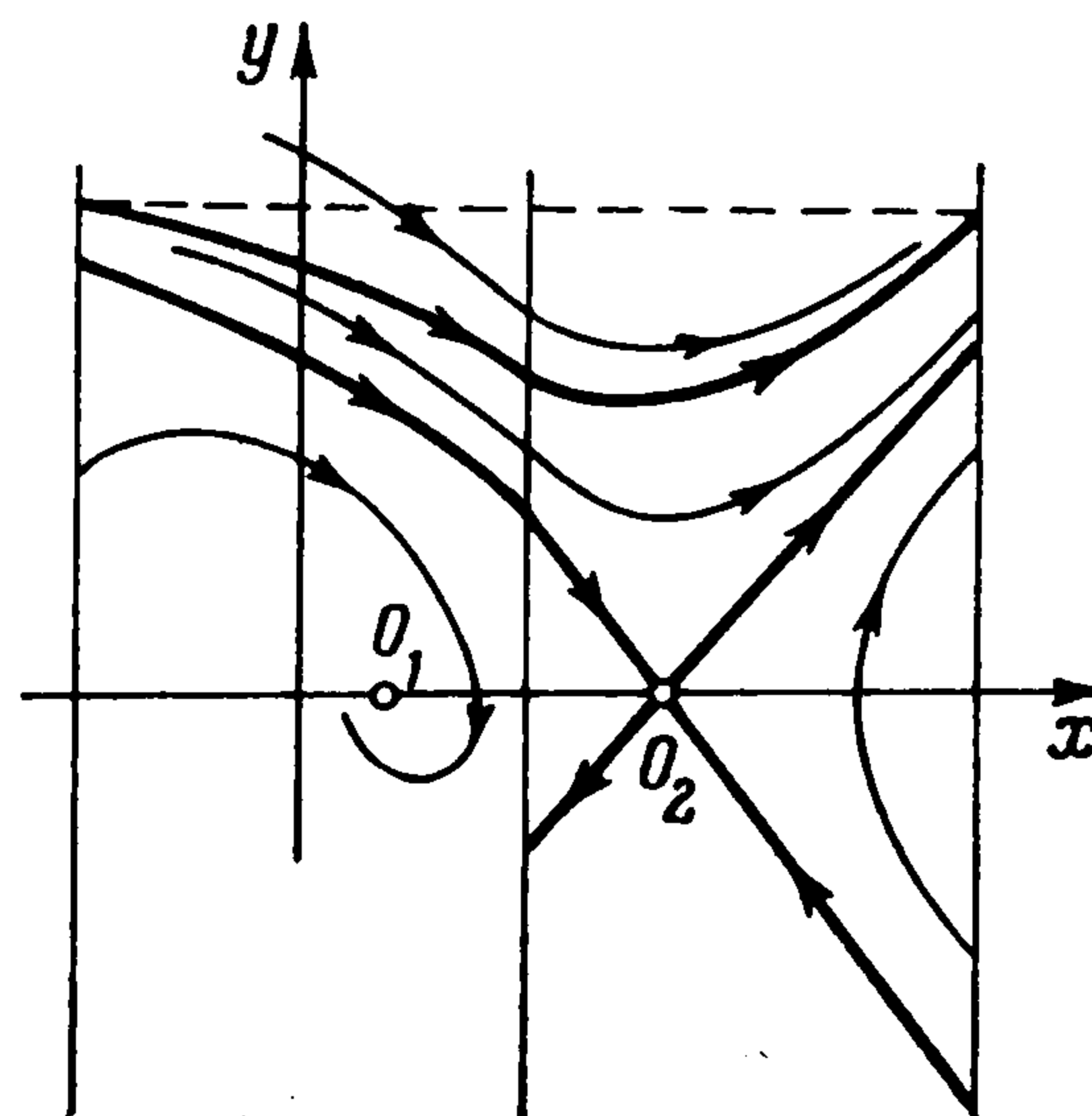
Если $h_1 < 1$, то

$$\varphi_1(\tau) = \frac{\sin \tau_1 + \sin \tau}{\tau_1 - \tau}, \quad \varphi_2(\tau) = \frac{\cos(\tau - \tau_2) - 1}{\cos(\tau + \tau_2) + 1}$$

$$\tau_1 = \operatorname{arctg} \frac{\omega_1\omega_2}{-h_1h_2}, \quad \tau_2 = \operatorname{arctg} \frac{\omega_1(h_1 + h_2)}{1 - h_1^2 - h_1h_2}$$

Если $h_1 > 1$, то

$$\varphi_1(\tau) = \frac{e^{\tau+\tau_1} - 1}{e^{\tau_1} - e^{\tau}}$$



Фиг. 4

а выражения для $\varphi_2(\tau)$, τ_1 и τ_2 получатся, если в соответствующих выражениях для случая $h_1 < 1$ заменить косинус и арктангенс через гиперболические косинус и арктангенс тех же аргументов.

При $h_1 = 1$ получаем

$$b = \tau_0 - \ln \varphi_2(\tau_0) \quad (2.8)$$

Здесь $\tau_0 > 0$ — корень уравнения $\exp(-\tau/k_2) = \varphi_1(\tau)$ и

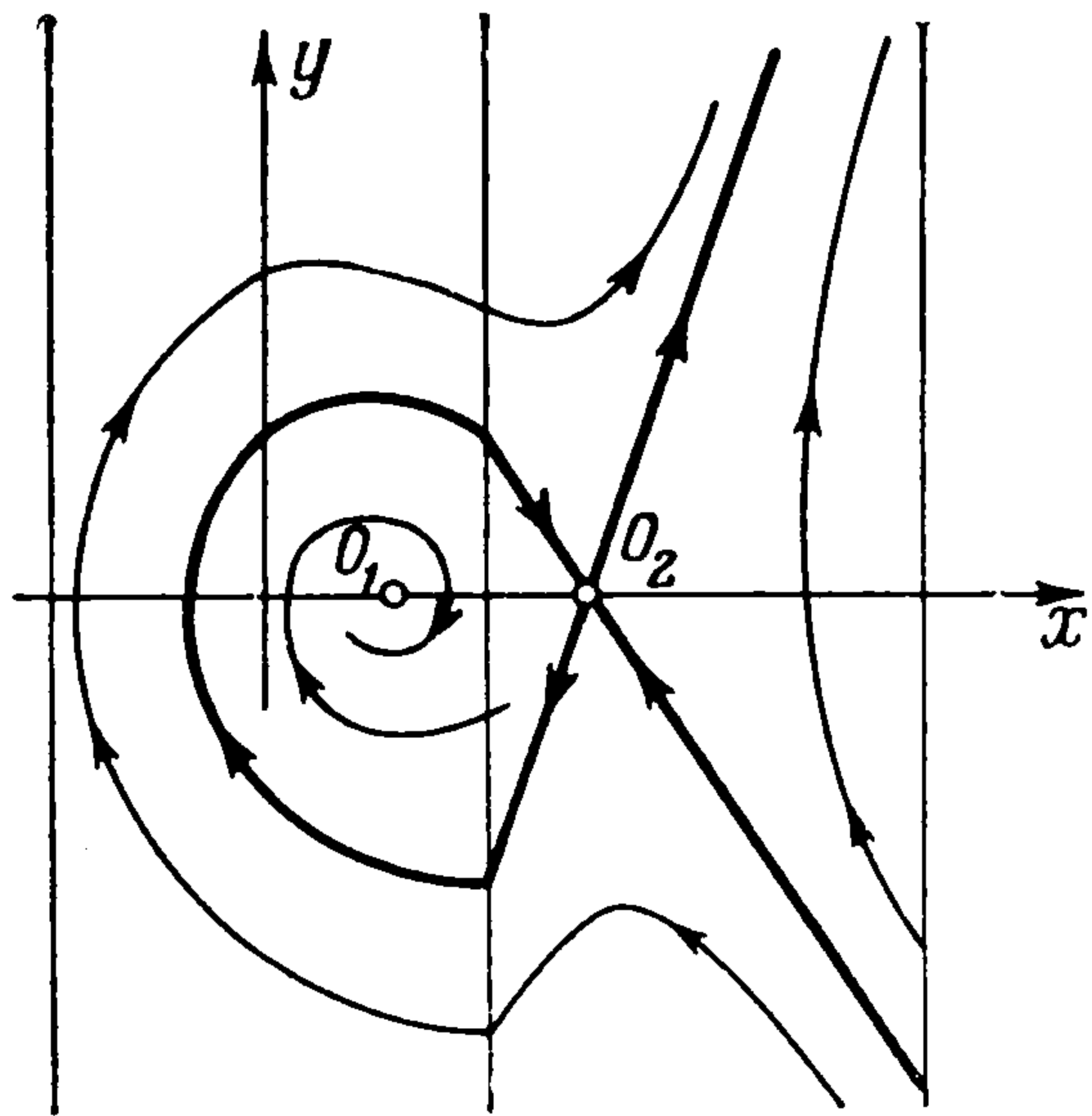
$$\varphi_1(\tau) = \frac{-k_2\tau + 1}{+1 + k_2\tau}, \quad \varphi_2(\tau) = \frac{-h_2\tau - (1 + h_2)}{-h_2\tau + (1 + h_2)} \quad (2.9)$$

Можно показать, что уравнение (2.7) имеет один и только один ненулевой корень при значениях параметров h_1 и h_2 , удовлетворяющих условиям (2.5) и при этих значениях $\varphi_2(\tau_0) < 1$.

Значения параметров a , h_1 и h_2 , удовлетворяющие равенствам (2.6)—(2.9), будут бифуркационными. При этих значениях на верхней фазовой полуплоскости имеется двойной полуустойчивый предельный цикл, охватывающий цилиндр (фиг. 4). Нетрудно видеть, рассматривая поведение кривых $s_1 = s_1(s_2)$ и $s_3 = s_3(s_2)$, что с ростом параметра a или убыванием параметра h_2 полуустойчивый предельный цикл распадается на два предельных цикла разной устойчивости и исчезает при обратном изменении параметров.

В силу равенств (1.7) и (1.13) выводы относительно количества предельных циклов, сделанные для полуплоскости $y > 0$ при значениях параметров h_1 и h_2 будут верны для полуплоскости $y < 0$ при значениях параметров $-h_1$ и $-h_2$. Нетрудно видеть, что устойчивость предельных циклов при этом изменится на противоположную. Бифуркационные значения параметров определяются равенствами (2.2)—(2.9), если изменить в этих равенствах знаки перед h_1 и h_2 на противоположные.

3. **Предельные циклы, не охватывающие цилиндр.** Рассмотрим сложное преобразование $\Pi_2 = \Pi_2^{(1)}\Pi_2^{(2)}$. Оно определено в случае $|h_1| < 1$. Неподвижным точкам этого преобразования соответствуют предельные циклы, не охватывающие цилиндр и пересекающие только прямую $x =$



Фиг. 5

$= \pi / 2$. В силу соотношений (1.18) и (1.20) заключаем, что преобразование Π_2 может иметь неподвижные точки только при различных знаках параметров h_1 и h_2 . Для отыскания неподвижных точек надо решить систему

$$r_2(\tau_2) = r_2(\theta_2), \quad s_2(\tau_2) = s_2(\theta_2) \quad (3.1)$$

(см. (1.13) и (1.20)). Используя соотношения (1.13)—(1.17), (1.20), а также неравенство (1.19) и теорему Кенигса, нетрудно доказать, что система (3.1) может иметь не более чем одно решение, которому соответствует устойчи-

вый (неустойчивый) предельный цикл при $h_1 < 0$ ($h_1 > 0$). Бифуркационными здесь будут значения параметров, удовлетворяющие равенству

$$F(h_1, h_2) = \frac{1}{2} \ln \frac{(\omega_2 + h_2)(\omega_2 + h_1)}{(\omega_2 - h_2)(\omega_2 - h_1)} + k_1 \operatorname{arctg} \frac{\omega_1 \omega_2}{-h_1 h_2} + k_1 \pi = 0 \quad (3.2)$$

и неравенствам

$$s_2(\tau_0) > (h_2 + \omega_2)(\pi / 2 - a), \quad r_2(\tau_0') > (-h_2 + \omega_2)(\pi / 2 - a) \quad (3.3)$$

Здесь $s_2(\tau_0)$ и $r_2(\tau_0')$ определяются из уравнений функций соответствий преобразований $L^{(1)}$ и $L_-^{(1)}$, а τ_0 и τ_0' — значения параметров τ и τ' , при которых $s_1(\tau_0) = r_1(\tau_0') = 0$.

При выполнении условий (3.2) и (3.3) на фазовой плоскости сепаратриса идет из седла в седло, не охватывая цилиндр и пересекая только прямую $x = \pi / 2$ (фиг. 5). Можно доказать, что при $h_1 > 0$ ($h_1 < 0$) система (3.1) не имеет решений, если выражение $F(h_1, h_2) > 0$ (соответственно $F(h_1, h_2) < 0$). Следовательно, на фазовой плоскости нет рассматриваемых предельных циклов в этих случаях. Если же при $h_1 > 0$ ($h_1 < 0$) выражение $F(h_1, h_2) < 0$ ($F(h_1, h_2) > 0$) и либо оба неравенства (3.3), либо одно из них выполняется, то на фазовой плоскости существует предельный цикл рассматриваемого типа.

При нарушении обоих условий (3.3) таких предельных циклов может и не быть, однако тогда будет существовать предельный цикл, не охватывающий цилиндр и пересекающий обе прямые $x = \pi / 2$ и $x = -\pi / 2$. Такие предельные циклы, очевидно, определяются неподвижными точками сложного преобразования $\Pi = L^{(1)}\Pi_2^{(2)}L_-^{(1)}\Pi_3^{(2)}$ и существуют только при различных знаках параметров h_1 и h_2 (см. (1.18), (1.20), (1.21)). Для отыскания их надо решить систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными (фиг. 1)

$$s_1(\tau) = s_3(\theta_3), \quad s_2(\tau) = s_2(\theta_2), \quad r_2(\tau') = r_2(\theta_2), \quad \tau_1(\tau') = r_3(\theta_3)$$

(см. (1.3), (1.7), (1.15), (1.20) и (1.21))

Пусть точка O_1 будет фокусом, т. е. $|h_1| < 1$, тогда последняя система в обоих случаях $h_1 < 0, h_2 > 0$ и $h_1 > 0, h_2 < 0$ после преобразований приводится к следующей системе двух уравнений с двумя неизвестными:

$$b = \frac{1}{2} \ln [u^2(\theta_2) + 2u(\theta_2)h_1 + 1] - \frac{1}{2} \ln [v^2(\theta_3) - 2v(\theta_3)h_1 + 1] + k_1\tau(\theta_2, \theta_3) \equiv F_1(\theta_2, \theta_3) \quad (3.4)$$

$$b = \frac{1}{2} \ln [v^2(\theta_2) - 2v(\theta_2)h_1 + 1] - \frac{1}{2} \ln [u^2(\theta_3) + 2u(\theta_3)h_1 + 1] - k_1\tau'(\theta_2, \theta_3) \equiv F_2(\theta_2, \theta_3)$$

Здесь в случае $h_1 < 0, h_2 > 0$ ($h_1 > 0, h_2 < 0$) первое уравнение соответствует верхней (нижней) фазовой полуплоскости, а второе — нижней (верхней) фазовой полуплоскости; величины b, u и v определяются (2.1) и (1.15), а функции $\tau(\theta_2, \theta_3)$ и $\tau'(\theta_2, \theta_3)$ имеют следующий смысл:

$$\tau(\theta_2, \theta_3) \equiv \arctg \frac{\omega_1 [u(\theta_2) + v(\theta_3)]}{q(\theta_2, \theta_3)} \equiv \varphi_1(\theta_2, \theta_3) \quad \text{при } q \geq 0 \quad (3.5)$$

$$\tau(\theta_2, \theta_3) \equiv \pi - \arctg \frac{\omega_1 [u(\theta_2) + v(\theta_3)]}{-q(\theta_2, \theta_3)} \equiv \varphi_2(\theta_2, \theta_3) \quad \text{при } q \leq 0 \quad (3.6)$$

$$\tau'(\theta_2, \theta_3) \equiv \varphi_1(\theta_3, \theta_2) \quad \text{при } q(\theta_3, \theta_2) \geq 0 \quad (3.7)$$

$$\tau'(\theta_2, \theta_3) \equiv \varphi_2(\theta_3, \theta_2) \quad \text{при } q(\theta_3, \theta_2) \leq 0 \quad (3.8)$$

$$q(\theta_2, \theta_3) \equiv u(\theta_2)v(\theta_3) - h_1[u(\theta_2) - v(\theta_3)] - 1 \quad (3.9)$$

Используя выражения (1.4), (1.7), (1.17), (1.20) и (1.21), а также неравенство (1.19), можно доказать, что система (3.4) имеет не более чем одно решение и этому решению соответствует устойчивый (неустойчивый) предельный цикл при значениях параметров $h_1 < 0, h_2 > 0$ ($h_1 > 0, h_2 < 0$).

Выясним условия, при которых система (3.4) имеет решение. Для этого рассмотрим уравнения

$$z = F_1(\theta_2, \theta_3), \quad z = F_2(\theta_2, \theta_3) \quad (3.10)$$

где функции $F_1(\theta_2, \theta_3)$ и $F_2(\theta_2, \theta_3)$ определяются равенствами (3.4), как уравнения двух семейств кривых, зависящих от параметра θ_3 . Необходимым условием пересечения кривых (3.10), соответствующих одному и тому же значению параметра θ_3 , является выполнение неравенства $F_1(\infty, \theta_3) - F_2(\infty, \theta_3) > 0$. При выполнении указанного неравенства достаточным условием пересечения тех же кривых явится выполнение неравенства $F_1(0, \theta_3) - F_2(0, \theta_3) \leq 0$. В этих утверждениях нетрудно убедиться, рассматривая частные производные функций (3.10) и имея в виду, что в силу (1.19) при всех значениях θ_2 и θ_3 выполняются неравенства $\partial F_1 / \partial \theta_2 > \partial F_2 / \partial \theta_2, \partial F_1 / \partial \theta_3 > \partial F_2 / \partial \theta_3$.

Из сказанного вытекают следующие выводы: система (3.10) не имеет решения, если выражение $F_1(\infty, \infty) < 0$ при $h_1 < 0, h_2 > 0$ (соответственно выражение $F_1(\infty, \infty) > 0$ при $h_1 > 0, h_2 < 0$), если

$$F_1(\infty, \infty) = \frac{1}{2} \ln \frac{(\omega_2 + h_2)(\omega_2 + h_1)}{(\omega_2 - h_2)(\omega_2 - h_1)} + k_1 \arctg \frac{\omega_1 \omega_2}{-h_1 h_2} = 0 \quad (3.11)$$

то система (3.4) имеет единственное решение $\theta_2 = \theta_3 = \infty$ только при значении параметра $a = 0$. На фазовой плоскости при этом сепаратриса идет из седла в седло, охватывая цилиндр как в нижней, так и в верхней фазовой полуплоскости (фиг. 6). Далее, если выполняются условия при $h_1 < 0, h_2 > 0$

$$F_1(\infty, \infty) > 0$$

$$F_1(\infty, 0) - F_2(\infty, 0) = \frac{1}{2} \ln \frac{(\omega_2 + h_2)(\omega_2 + h_1)}{(\omega_2 - h_2)(\omega_2 - h_1)} + k_1 \operatorname{arctg} \frac{\omega_1 \omega_2}{-h_1 h_2} + k_1 \pi \leq 0 \quad (3.12)$$

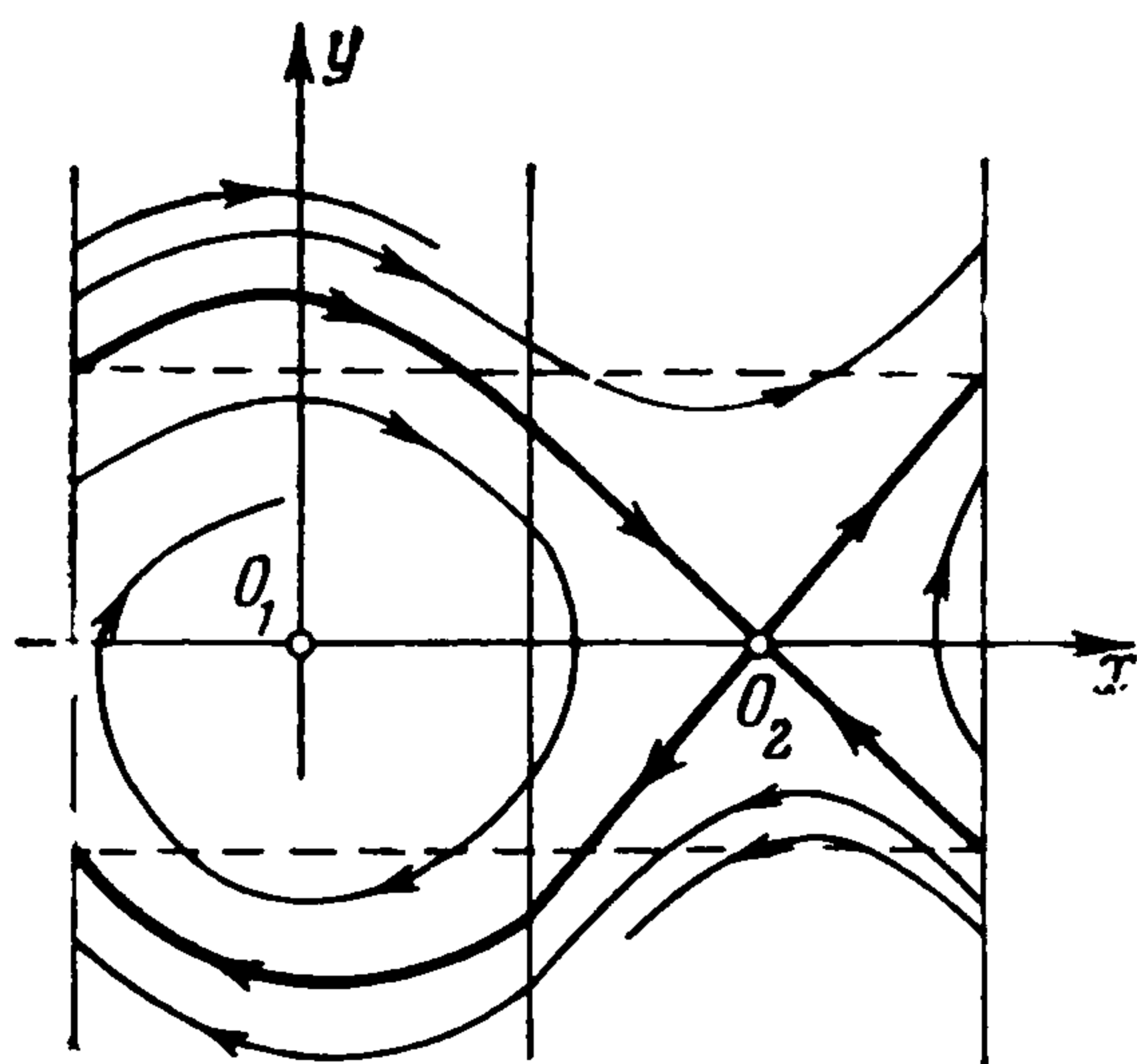
при $h_1 > 0, h_2 < 0$

$$F_1(\infty, \infty) < 0, \quad F_1(\infty, 0) - F_2(\infty, 0) \geq 0$$

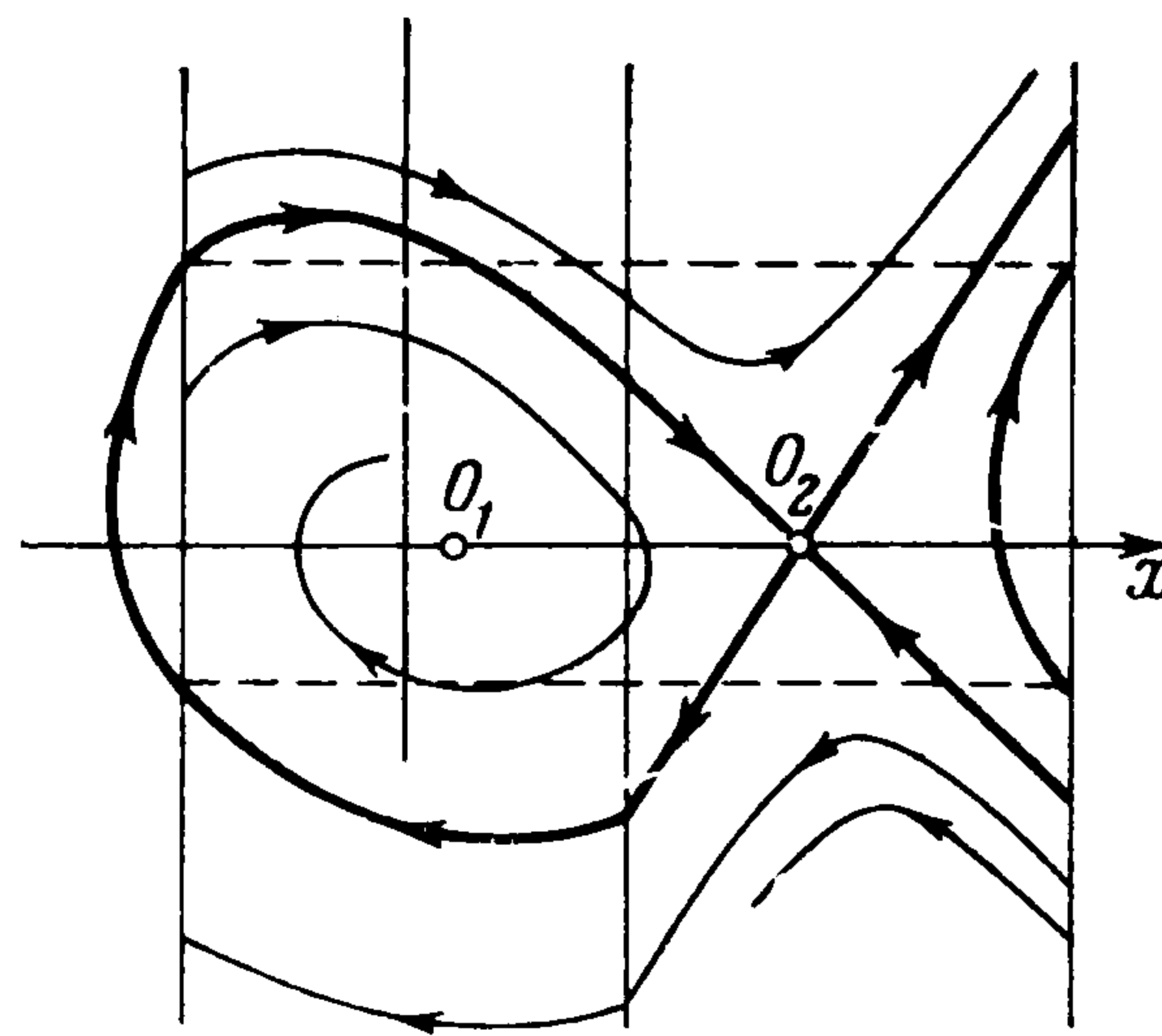
то существует бифуркационное значение параметра $\theta_3 = \theta_3^*$, определяемое равенством

$$F_1(\infty, \theta_3^*) = F_2(\infty, \theta_3^*) \quad (3.13)$$

такое, что для всех значений параметра a , при которых $b \leq F_1(\infty, \theta_3^*)$, система (3.4) имеет решение (единственность этого решения показана выше).



Фиг. 6



Фиг. 7

При значениях параметра a , удовлетворяющих условию $b > F_1(\infty, \theta_3^*)$ система (3.4) решения не имеет. Пусть

$$b = F_1(\infty, \theta_3^*) \quad (3.14)$$

Значения параметров, удовлетворяющие равенствам (3.13), (3.14) являются бифуркационными. Именно, при значениях параметров, удовлетворяющих условиям (3.12)—(3.14) на фазовой плоскости сепаратриса идет из седла в седло, не охватывая цилиндра и пересекая обе прямые $x = \pi/2, x = -\pi/2$ (фиг. 7). Из сказанного выше следует, что предельный цикл рождается в данном случае из сепаратрисы, идущей из седла в седло при убывании параметра a .

Наконец, нетрудно показать, что при выполнении условий

$$F_1(\infty, 0) - F_2(\infty, 0) > 0 \quad \text{при } h_1 < 0, h_2 > 0$$

$$F_1(\infty, 0) - F_2(\infty, 0) < 0 \quad \text{при } h_1 > 0, h_2 < 0$$

на фазовой плоскости существует предельный цикл, не охватывающий цилиндра и пересекающий обе прямые $x = \pi/2$ и $x = -\pi/2$, если пара-

метр a удовлетворяет условию $b < F_2(\theta_2^*, 0)$, в котором значение $\theta_2 = \theta_2^*$ определяется равенством $F_1(\theta_2^*, 0) = F_2(\theta_2^*, 0)$.

При выполнении равенства $b = F_2(\theta_2^*, 0)$ на фазовой плоскости существует предельный цикл, не охватывающий цилиндр и касающийся прямой $x = -\pi/2$. Если же $b > F_2(\theta_2^*, 0)$, то на фазовой плоскости существует предельный цикл, пересекающий только прямую $x = \pi/2$ (см. стр. 1018). При условиях (см. (3.12))

$$F_1(\infty, 0) - F_2(\infty, 0) = 0 \quad (3.15)$$

$$b = \frac{1}{2} \ln(\omega_2 + h_2)(\omega_2 + h_1) + k_1\tau \quad (3.16)$$

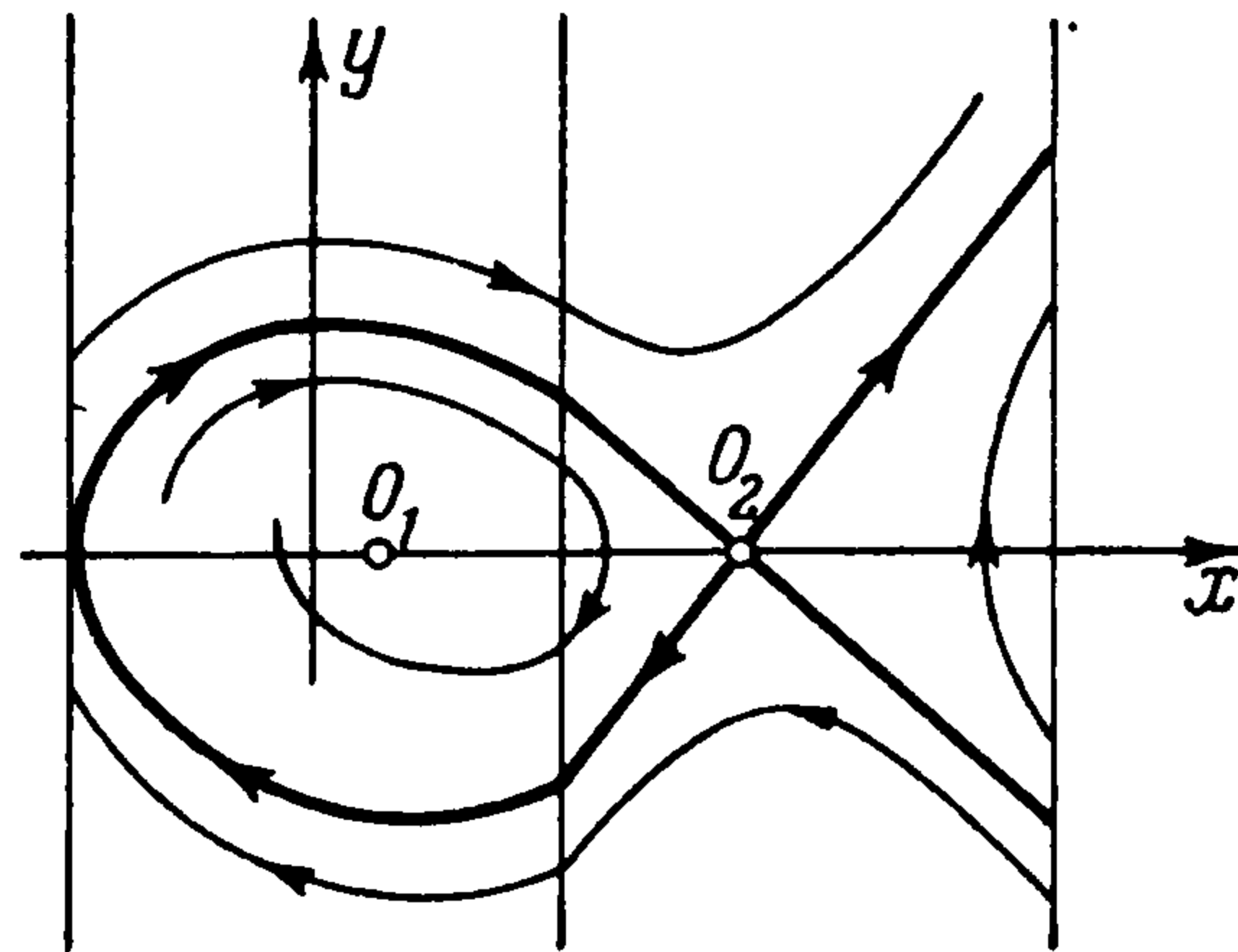
где

$$\tau = \operatorname{arctg} \frac{\omega_1(\omega_2 + h_2)}{-h_1(\omega_2 + h_2) - 1}$$

$$\text{при } -h_1(\omega_2 + h_2) \geq 1$$

$$\tau = \pi - \operatorname{arctg} \frac{\omega_1(\omega_2 + h_2)}{h_1(\omega_2 + h_2) + 1}$$

$$\text{при } -h_1(\omega_2 + h_2) \leq 1$$



Фиг. 8

на фазовой плоскости сепаратриса идет из седла в седло, не охватывая цилиндр и касаясь прямой $x = -\pi/2$ (фиг. 8).

В случае $|h_1| \geq 1$ система (3.4) может иметь решение только при значениях параметров $\theta_2 > \theta^\circ$, $\theta_3 > \theta^\circ$, где θ° определяется равенством $u(\theta^\circ) = h_1 + \omega_1$. При этом выражения $q(\theta_2, \theta_3)$ и $q(\theta_3, \theta_2)$ (см. (3.9)) положительны и в равенствах (3.4) функции $\tau(\theta_2, \theta_3)$ и $\tau'(\theta_2, \theta_3)$ определяются соответственно формулами (3.5) и (3.8), если при $|h_1| > 1$ в правых частях этих формул заменить $\operatorname{arc} \operatorname{tg}$ через $\operatorname{arc} \operatorname{th}$, а при $|h_1| = 1$ опустить знак $\operatorname{arc} \operatorname{tg}$.

Можно показать, что в случае $|h_1| \geq 1$ система (3.4) не имеет решения, если левая часть равенства

$$\frac{1}{2} \ln \frac{(\omega_2 + h_2)(\omega_2 + h_1)}{(\omega_2 - h_2)(\omega_2 - h_1)} + k_1 \operatorname{arc} \operatorname{th} \frac{\omega_1\omega_2}{-h_1h_2} = 0 \quad (3.17)$$

положительна (отрицательна) при значениях $h_1 < 0$, $h_2 > 0$ ($h_1 > 0$, $h_2 < 0$). Если же при $h_1 < 0$, $h_2 > 0$ ($h_1 > 0$, $h_2 < 0$) левая часть равенства (3.17) отрицательна (положительна), то система (3.4) имеет решение, когда параметр a удовлетворяет неравенству $b \leq F_1(\infty, \theta_2^*)$ (см. (3.13)) и не имеет решения в противоположном случае. Бифуркационные значения параметров a , h_1 , h_2 , при которых сепаратриса идет из седла, не охватывая цилиндр и пересекая обе прямые $x = \pi/2$ и $x = -\pi/2$, удовлетворяют так же, как и при $|h_1| < 1$, равенствам (3.13) и (3.14), в которых сделаны изменения, указанные выше для случаев $|h_1| > 1$ и $|h_1| = 1$.

4. Разбиение фазового пространства. Будем рассматривать разбиение на грубые области бифуркационными поверхностями пространства параметров b , h_1 , h_2 , где b определяется равенством (2.1).

Из проведенного исследования вытекает, что достаточно рассмотреть разбиение пространства при $h_1 > 0$. Отображая полученное разбиение

ние симметрично относительно оси b , получим разбиение пространства при значениях $h_1 < 0$. При этом все циклы системы, соответствующей отраженной точке пространства, изменят устойчивость на противоположную и, если точке $(h_1^\circ, h_2^\circ, b^\circ)$ соответствует система, имеющая предельный цикл, охватывающий цилиндр в верхней (нижней) фазовой полуплоскости, то отраженной точке $(-h_1^\circ, -h_2^\circ, -b^\circ)$ будет соответствовать система, имеющая предельный цикл, охватывающий цилиндр в нижней (соответственно верхней) фазовой полуплоскости.

Часть пространства $h_1 > 0$ разбивается на грубые области бифуркационными поверхностями $1, 1', 2, 3, 4$.

Поверхности 1 и $1'$ соответствуют появлению предельных циклов от сепаратрисы, идущей из седла в седло и охватывающей цилиндр в верхней соответственно нижней фазовых полуплоскостях.

Поверхности $2, 3$ и 4 соответствуют появлению предельных циклов соответственно из бесконечности, от сгущения траекторий и от сепаратрисы, идущей из седла в седло, не охватывая цилиндр.

Поверхность 1 определяется равенствами (2.2), (2.3) и пересекается с плоскостями $h_1 = 0$ и $h_2 = 0$ по линиям Γ_1 и Γ_2 , а с плоскостью $b = 0$ по линии K . Уравнение этой линии дано равенствами (3.11) и (3.17).

Поверхность $1'$ симметрична поверхности 1 относительно оси b и пересекается с ней по линии K , а с плоскостью $h_1 = 0$ по линии Γ'_1 , симметричной линии Γ_1 относительно оси b .

Поверхность 2 является биссектральной плоскостью (см. (2.4)).

Поверхность 3 определяется равенствами (2.6)–(2.9). Ее точкам соответствуют системы, имеющие двойной полуустойчивый предельный цикл. Нетрудно показать, что поверхность 3 пересекается с плоскостью $b = 0$ по биссектрисе $h_1 + h_2 = 0$, расположена ниже поверхности 1 и примыкает к поверхности 1 по линии Γ_2 пересечения ее с плоскостью $h_2 = 0$. Можно показать также, что значение b , определенное из уравнений поверхностей 1 и 3 , обращается в бесконечность на гиперболе $h_1^2 - h_2^2 = 1$.

Поверхность 4 состоит из двух частей, примыкающих одна к другой по линии C_* , определяемой равенствами (3.15), (3.16). Одна часть поверхности 4 проектируется в область плоскости $b = 0$, заключенную между линией K и линией C , которая является проекцией линии C_* на плоскость $b = 0$. Вторая часть расположена выше линии C_* и проектируется в линию C , т. е. совпадает с цилиндрической поверхностью $F(h_1, h_2) = 0$ (см. (3.2) и (3.15)). Точкам первой (второй) части поверхности 4 соответствуют системы, расположение сепаратрис которых представлено на фиг. 7 (фиг. 5).

Расположение сепаратрис систем, соответствующих точкам линии C_* , показано на фиг. 8.

Поверхность 4 пересекается с поверхностями 1 и $1'$ и плоскостью $b = 0$ по линии K . Точкам этой линии соответствуют системы, расположение сепаратрис которых показано на фиг. 6.

Рассмотренные поверхности разбивают часть пространства $h_1 > 0$ на семь областей. Укажем границы каждой области, число и характер циклов для систем, соответствующих точкам данной области.

Область (1) ограничена частью плоскости $h_1 = 0$ ниже линии Γ_1 , частью плоскости $b = 0$, заключенной между осью $h_1 = 0$ и прямой $h_1 + h_2 = 0$, и поверхностями 1 и 3 (предельных циклов нет).

Область (2) ограничена частью плоскости $h_1 = 0$ выше линии Γ_1 и поверхностями 1 и 2 (один устойчивый предельный цикл, охватывающий цилиндр в верхней фазовой полуплоскости).

Область (3) ограничена поверхностями 1, 2 и 3 (два предельных цикла разной устойчивости, охватывающих цилиндр в верхней фазовой полуплоскости).

Область (4) ограничена поверхностями 1, 2 и частью плоскости $b = 0$, расположенной между прямой $h_1 + h_2 = 0$ и линией K (один неустойчивый предельный цикл, охватывающий цилиндр в верхней фазовой полуплоскости и один неустойчивый предельный цикл, охватывающий цилиндр в нижней фазовой полуплоскости).

Область (5) ограничена поверхностями 1, 2 и 4 (один неустойчивый предельный цикл, охватывающий цилиндр в нижней фазовой полуплоскости).

Область (6) ограничена поверхностями 1', 4 и частью плоскости $h_1 = 0$ выше линии Γ'_1 (один неустойчивый предельный цикл, охватывающий цилиндр в нижней фазовой полуплоскости, и один неустойчивый предельный цикл, не охватывающий цилиндр).

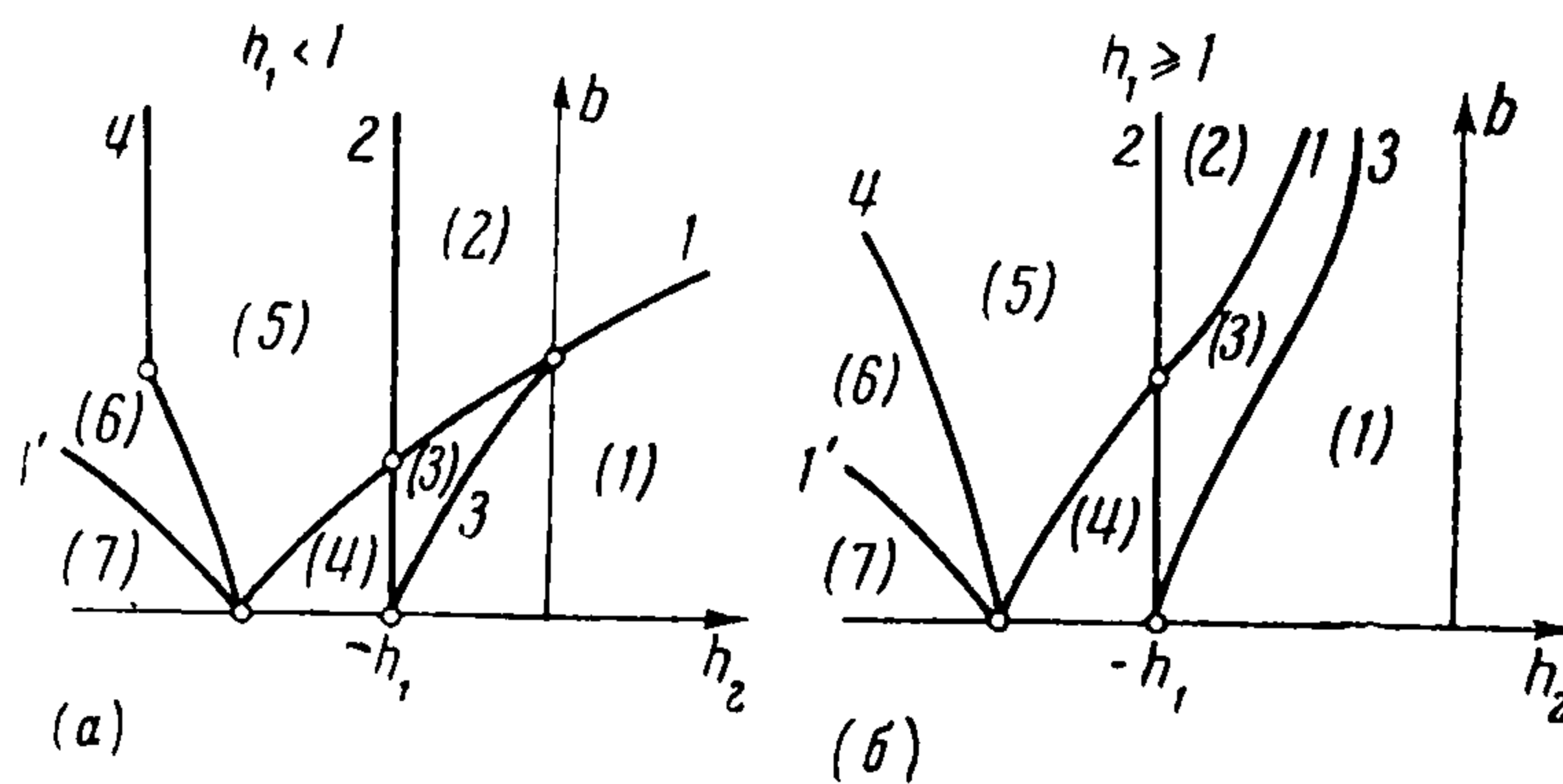
Область (7) ограничена частью плоскости $h_1 = 0$ ниже линии Γ'_1 , частью плоскости $b = 0$, расположенной между осью $h_1 = 0$ и линией K , и поверхностью 1' (один неустойчивый предельный цикл, не охватывающий цилиндр).

Схематическое расположение перечисленных выше областей представлено на фиг. 9, а ($0 < h_1 < \text{const} < 1$) и фиг. 9, б ($h_1 = \text{const} \geq 1$). Выражаю признательность Л. Н. Белюстиной, обратившей мое внимание на задачу о фазовой автоподстройке частоты.

Поступила 18 V 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Капранов М. В. Полоса захвата при фазовой автоподстройке частоты. Радиотехника, 1956, т. 2, № 12.
2. Белюстина Л. Н. Исследование нелинейной системы фазовой автоподстройки частоты. Изв. вузов, Радиофизика, 1959, т. 2, № 2.
3. Tricami F. Integrazione di un'equazione differenziale presentatisi in elettrotecnica. Ann. Soc. Norm. Sup. Pisa. 1933, ser. 2, v. 2.
4. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. Физматгиз, 1959.
5. Bohm C. Nuovi criteri di esistenza di soluzioni periodiche di una nota equazione differenziale non lineare. Ann. Mat. Pura App. 35, 1953.
6. Preston G. and Tullier J. The lock — in performance of an AFC circuit. PIRE, 1953, No. 2.
7. Giger A. Ein Grenzproblem einer technisch wichtigen nichtlinearen Differentialgleichung, ZAMP, 1956, 7.
8. Coppel W. A. On the equation of a synchronous motor. Mech. and Appl. Math. 1959, v. 12, p. 2.



Фиг. 9