Прикладная математика и механика. Том XXV, 1961
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

С. А. Горбатенко

(Москва)

Рассматривается система автоматического управления с нелинейными характеристиками объекта управления и с существенно нелинейной характеристикой органа управления.

При помощи метода Ляпунова [1] проводится исследование устойчивости невозмущенного движения системы в случае, когда характеристическое уравнение системы содержит два нулевых корня, а все остальные корни имеют отрицательные вещественные части. При исследовании использованы результаты, полученные Г. В. Каменковым [2,3].

1. Уравнения возмущенного движения системы предполагаем в виде

$$\frac{dx_k}{dt}=\sum_{\alpha=1}^{n+1} b_{k\alpha}x_\alpha+n_k x_{n+2} \qquad (k=1,\ldots,n+1)$$

$$\frac{dx_{n+2}}{dt}=f(\sigma), \qquad \sigma=\sum_{\alpha=1}^{n+1} p_\alpha x_\alpha+p_{n+2}x_{n+2} \tag{1.1}$$

Здесь x_k — обобщенные координаты объекта управления; x_{n+2} — координата органа управления; σ — сигнал управления; $b_{k\alpha}$, n_k, p_α, p_{n+2} — известные постоянные параметры.

Будем считать, что $f(\sigma)$ можно аппроксимировать функцией вида

$$f(\sigma)=K\sigma^N+K_1\sigma^{N+1}+\ldots \qquad (N>2) \tag{1.2}$$

Положим, что характеристическое уравнение объекта содержит один нулевой корень и n корней с отрицательными вещественными частями, что соответствует нейтральности объекта по одной из своих $n+1$ координат и устойчивости по остальным n координатам. Следовательно, характеристическое уравнение всей системы содержит два нулевых корня; например, пусть $\lambda_{n+1}=\lambda_{n+2}=0$. Остальные $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ корни имеют отрицательные вещественные части.

Задачей настоящего исследования является определение условий устойчивости невозмущенного движения системы (1.1) при сделанных допущениях.

2. Предполагая корни характеристического уравнения системы (1.1) известными, приведем систему (1.1) к каноническому виду Лурье [4]

$$\frac{dz_s}{dt}=\lambda_s z_s+f(\sigma) \qquad (s=1,\ldots,n), \qquad \frac{dz_{n+1}}{dt}=f(\sigma)$$

$$\frac{d\sigma}{dt}=\sum_{1}^{n}\beta_s z_s+\beta_{n+1}z_{n+1}-rf(\sigma) \tag{2.1}$$

Здесь $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — ненулевые корни характеристического уравнения объекта управления; при этом параметры преобразования

$$z_s = \sum_{\alpha=1}^{n+1} C_{s\alpha} x_\alpha + x_{n+2} \qquad (s = 1, \ldots, n+1) \tag{2.2}$$

а также величины $\beta_1, \ldots, \beta_{n+1}$ определяются по методу, изложенному в работе [4].

Очевидно, что характеристическое уравнение системы (2.1) имеет два нулевых корня, а остальные n корней имеют по условию отрицательные вещественные части.

Положим $\sigma = \sigma_1 + A_1 z_1 + \ldots + A_n z_n$; тогда

$$\frac{d\sigma_1}{dt} = \beta_{n+1} z_{n+1} + \sum_{\alpha=1}^{n} (\beta_\alpha - A_\alpha \lambda_\alpha)\, z_\alpha - f(\sigma)\left[\sum_{\alpha=1}^{n} A_\alpha + r\right]$$

Положим $A_\alpha = \beta_\alpha / \lambda_\alpha$ и введем обозначения $\sigma_1 = x$,

$$\beta_{n+1} z_{n+1} - Bf(\sigma) = y, \qquad A_1 + \ldots + A_n + r = B$$

Тогда систему (2.1) можно представить в виде

$$\frac{dx}{dt} = y, \qquad \frac{dy}{dt} = Y(x, y, z_1, \ldots, z_n)$$

$$\frac{dz_s}{dt} = \lambda_s z_s + X_s(x, y, z_1, \ldots, z_n) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{2.3}$$

Здесь

$$\sigma = \sigma(x, y, z_1, \ldots, z_n), \qquad X_s = f(\sigma)$$

$$Y = \beta_{n+1} f(\sigma) - BKN\sigma^{N-1}\left\{y + \sum_{\alpha=1}^{n} A_\alpha\, [\lambda_\alpha z_\alpha + f(\sigma)\right\} + \ldots$$

Разложения функций Y и X_s по степеням своих переменных не содержат членов разложения ниже второго порядка.

Следуя работе [2], функции Y и X_s запишем в виде

$$\begin{aligned} Y(x, y, z_1, \ldots, z_n) &= Y_0(x, y) + Y_1(x, y, z_1, \ldots, z_n) \\ X_s(x, y, z_1, \ldots, z_n) &= X_{s0}(x, y) + X_{s1}(x, y, z_1, \ldots, z_n) \end{aligned} \tag{2.4}$$

Здесь

$$Y_1(x, y, 0, \ldots, 0) = 0, \quad X_{s1}(x, y, 0, \ldots, 0) = 0$$

а функции $Y_0(x, y)$ и $X_{s0}(x, y)$, следуя работе [2], представим в виде

$$\begin{aligned} Y_0(x, y) &= f_0(x) + y\varphi_0(x) + y^2\psi_0(x) + \ldots \\ X_{s0}(x, y) &= f_s(x) + y\varphi_s(x) + y^2\psi_s(x) + \ldots \end{aligned} \tag{2.5}$$

Здесь

$$\begin{aligned} f_0(x) &= a_0 x^{\alpha_0} + \ldots, \qquad & \varphi_0(x) &= b_0 x^{\beta_0} + \ldots \\ f_s(x) &= a_{s0} x^{\alpha_s} + \ldots, \qquad & \varphi_s(x) &= b_{s0} x^{\beta_s} + \ldots \end{aligned}$$

Для исследуемой системы

$$f_s(x) = Kx^N, \ \varphi_s(x) = \psi_s(x) = \ldots = 0, \ f_0(x) = \beta_{n+1} K x^N - BK^2 N \sum_{s=1}^{n} A_s x^{2N-1},$$

$$\varphi_0(x) = -BKNx^{N-1}, \ \psi_0(x) = \ldots = 0$$

Следовательно,

$$a_0 = \beta_{n+1}K, \qquad \alpha_0 = N, \qquad b_0 = -BKN, \beta_0 = N - 1$$

Далее для облегчения построения функций Ляпунова — Четаева проведем преобразование

$$z_s = y_s + u_s(x) + y v_s(x) \tag{2.6}$$

Функции $u_s(x)$ и $v_s(x)$ надо определить так, чтобы наинизшая степень разложения функции $f_s(x)$ была выше наинизшей степени разложения функции $f_0(x)$.

Сохраняя в преобразованной системе представление (2.5), получим следующие уравнения для определения функций $u_s(x)$ и $v_s(x)$:

$$\lambda_s u_s(x) + f_s(x) + X_{s1}(x, 0, u_s) = 0 \tag{2.7}$$

$$v_s(x)\varphi_0(x) + \varphi_s(x) = 0 \tag{2.8}$$

Важно отметить, что наинизшие степени разложения по степеням x функций $u_s(x)$ и $v_s(x)$ равны соответственно N и $N-1$. При таком выборе функций $u_s(x)$ и $v_s(x)$ обеспечивается выполнение равенств $f_s(x) = -v_s(x) f_0(x)$, $\varphi_s(x) = -v_s(x)\varphi_0(x)$, а следовательно, и поставленных условий. Величины a_0, b_0, α_0, β_0 при этом не изменятся, но в преобразованной системе получим

$$\alpha_s \geqslant \alpha_0 + N - 1, \qquad \beta_{sk} \geqslant \alpha_0 + N - 2 \tag{2.9}$$

Преобразованную систему представим в виде

$$\frac{dx}{dt} = y, \qquad \frac{dy}{dt} = f_0(x) + y\varphi_0(x) + \ldots + \left\{\sum_{k_1+k_2=0}^{\infty} x^{k_1} y^{k_2} P^{(k_1,k_2)}(y_1, \ldots, y_n)\right\}$$

$$\frac{dy_s}{dt} = \lambda_s y_s + f_s(x) + \sum_{k=1}^{\infty} y^k \varphi_{sk}(x) + \sum_{k_1+k_2=0}^{\infty} x^{k_1} y^{k_2} P_s^{(k_1,k_2)}(y_1, \ldots, y_n)$$

$$(s = 1, \ldots, n) \tag{2.10}$$

Условия (2.9) исключают влияние на устойчивость нелинейных членов в правой части третьего уравнения системы (2.10). Остается преобразовать систему (2.10) так, чтобы исключить влияние на устойчивость членов, заключенных в фигурных скобках второго уравнения системы (2.10). Как показано в работе [3], такое преобразование, не изменяющее задачи об устойчивости, существует и возможно. В результате суммирование в правой части второго уравнения системы (2.10) начинается с индексов k_1 и k_2, удовлетворяющих условию $k_1 + k_2 \geqslant \alpha_0 + N - 1$. Причем это преобразование таково, что оно не изменяет $\alpha_0 + N - 1$ первых членов разложения функции $f_0(x)$ по степеням x и $\alpha_0 + N - 2$ первых членов разложения функции $\varphi_0(x)$ по степеням x. Следовательно, указав на возможность такого преобразования, самого преобразования можно не проводить, так как a_0, b_0, α_0, β_0 не изменятся.

После проведенных преобразований критерии устойчивости можно получить, следуя работе [2]. Для устойчивости невозмущенного движения системы (1.1) необходимо и достаточно выполнение условий
N должно быть числом нечетным,

$$\beta_{n+1}K < 0, \qquad BKN > 0 \tag{2.11}$$

Требование нечетности числа N сводится к требованию нечетности характеристики органа управления. Условия (2.11) позволяют построить область допустимых значений параметров управляющего устройства, исходя из устойчивости невозмущенного движения системы (1.1).

3. Рассмотрим случай, когда корни характеристического уравнения системы (1.1) неизвестны. Обнаружить указанные свойства корней характеристического уравнения системы в этом случае можно непосредственно по коэффициентам самого уравнения по критериям Гурвица или Рауса, не решая самого уравнения.

Обратимся к уравнению (1.1). Введем следующее преобразование

$$x = \sum_{k=1}^{n+2} A_k x_k, \qquad y = \sum_{k=1}^{n+2} B_k x_k \tag{3.1}$$

Коэффициенты A_k и B_k определим согласно уравнениям

$$\frac{dx}{dt} = y, \qquad \frac{dy}{dt} = Y(x_1, \ldots, x_{n+2})$$

Здесь $Y(x_1, \ldots, x_{n+2})$ — голоморфная функция своих переменных, не содержащая членов ниже второго порядка.

Для определения A_k и B_k получим два тождества, которые дадут необходимое количество уравнений

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{n+2} A_k \Big(\sum_{\alpha=1}^{n+1} b_{k\alpha} x_\alpha + n_k x_{n+2}\Big) \equiv \sum_{k=1}^{n+2} B_k x_k \\ \sum_{k=1}^{n+2} B_k \Big(\sum_{\alpha=1}^{n+1} b_{k\alpha} x_\alpha + n_k x_{n+2}\Big) \equiv 0\end{gathered} \tag{3.2}$$

Найдя A_k и B_k, можно из (3.1) выразить x_{n+1} и x_{n+2} через $x, y, x_1, \ldots, x_n$ и подставить их в систему (1.1). Тогда систему (1.1) можно представить в виде

$$\begin{gathered}\frac{dx}{dt} = y, \qquad \frac{dy}{dt} = Y(x, y, x_1, \ldots, x_n) \\ \frac{dx_s}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{n} q_{s\alpha} x_\alpha + p_s x + q_s y \qquad (s = 1, \ldots, n)\end{gathered} \tag{3.3}$$

Здесь

$$\sigma = \sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha' x_\alpha + p_x x + p_y y, \qquad Y = B_{n+2} f(\sigma) + A_{n+2} \frac{df(\sigma)}{dt}$$

Вводя преобразование $x_s = y_s + C_s x + D_s y$, определяя C_s и D_s из уравнений

$$\sum_{\alpha=1}^{n} q_{s\alpha} C_\alpha + p_s = 0, \qquad \sum_{\alpha=1}^{n} q_{s\alpha} D_\alpha + q_s - C_s = 0 \tag{3.4}$$

получим вместо системы (3.3) следующую систему

$$\begin{gathered}\frac{dx}{dt} = y, \qquad \frac{dy}{dt} = Y(x, y, y_1, \ldots, y_n) \\ \frac{dy_s}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{n} q_{s\alpha} y_\alpha + X_s(x, y, y_1, \ldots, y_n) \qquad (s = 1, \ldots, n)\end{gathered} \tag{3.5}$$

Здесь

$$\sigma = \sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha' x_\alpha + \Big(\sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha' C_\alpha + p_x\Big) x + \Big(\sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha' D_\alpha + p_y\Big) y$$

$$Y = B_{n+2} f(\sigma) + A_{n+2} K N \sigma^{N-1} \Big\{ \sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha' \Big(\sum_{\beta=1}^{n} q_{\alpha\beta} y_\beta\Big) -$$

$$- \sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha' D_\alpha \Big[B_{n+2} f(\sigma) + A_{n+2} \frac{df(\sigma)}{dt}\Big] + \Big(\sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha' C_\alpha + p_x\Big) y +$$

$$+ \Big(\sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha' D_\alpha + p_y\Big)\Big[B_{n+2} f(\sigma) + A_{n+2} \frac{df(\sigma)}{dt}\Big]\Big\} \qquad X_s = - D_s Y$$

Для функций Y и X_s сохраним все представления (2.4) и (2.5). Раскрывая выражение для Y, найдем следующие наинизшие члены разложения функций $f_0(x)$ и $\varphi_0(x)$

$$\alpha_0 = N, \qquad \beta_0 = N - 1, \qquad \alpha_s = N, \qquad \beta_s = N - 1$$

$$a_0 = B_{n+2} K \Big(\sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha' C_\alpha + p_x\Big)^N$$

$$b_0 = N K B_{n+2} \Big(\sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha' C_\alpha + p_x\Big)^{N-1} \Big(\sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha' D_\alpha + p_y\Big) + N K A_{n+2} \Big(\sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha' C_\alpha + p_x\Big)^N$$

Систему (3.5) далее надо подвергнуть таким преобразованиям, которые бы позволили судить об устойчивости движения только при рассмотрении членов с $f_0(x)$ и $\varphi_0(x)$. Опуская рассуждения и выкладки, аналогичные проделанным, запишем сразу необходимые и достаточные условия устойчивости невозмущенного движения системы (1.1)

N должно быть числом нечетным

$$K B_{n+2} \Big(\sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha' C_\alpha + p_x\Big)^N < 0$$

$$N K B_{n+2} \Big(\sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha' C_\alpha + p_x\Big)^{N-1} \Big(\sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha' D_\alpha + p_y\Big) + N K A_{n+2} \Big(\sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha' C_\alpha + p_x\Big)^N < 0 \tag{3.6}$$

Как и в предыдущем случае, требование нечетности числа N сводится к требованию нечетности характеристики органа управления, а условия (3.6) позволяют построить область допустимых значений параметров управляющего устройства, исходя из устойчивости невозмущенного движения системы (1.1).

4. Рассмотрим случай, когда нарушается условие $\alpha_0 > \beta_0$ и возможно $\beta_0 \geqslant \alpha_0$. Очевидно, что в таком случае задача об устойчивости не решается низшими членами разложения функций $f_0(x)$ и $\varphi_0(x)$ и необходимо учитывать члены более высокого порядка.

Пусть $a_0 < 0$, α_0 — число нечетное, а $\beta_0 \geqslant (\alpha_0 - 1) / 2$, или $\beta_0 \geqslant m$, где $\alpha_0 = 2m + 1$.

Не изменяя задачи об устойчивости, введем преобразование

$$x = r \cos \theta, \qquad y = - r^{m+1} \sin \theta \qquad (r > 0)$$

Тогда вместо системы (2.10) или (3.5) получим систему

$$\frac{dr}{dt} = r^{m+1}R_1(\theta) + r^{m+2}R_2(\theta) + \ldots + r^{\alpha_0+N-m}\sum_{k=0}^{\infty} r^k R_k(\theta, y_1, \ldots, y_n)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = r^m Q_0(\theta) + r^{m+1}Q_2(\theta) + \ldots + r^{\alpha_0+N-1-m}\sum_{k=0}^{\infty} r^k Q_k(\theta, y_1, \ldots, y_n) \quad (4.1)$$

$$\frac{dy_s}{dt} = p_{s1}y_1 + \ldots + p_{sn}y_n + r^{\alpha_0+N}\sum_{k=0}^{\infty} r^k R_{sk}(\theta) + \sum_{k=0}^{\infty} r^k L_{sk}(\theta, y_1, \ldots, y_n)$$

$$(s = 1, \ldots, n)$$

Здесь

$$Q_0(\theta) = \frac{(m+1)\sin^2\theta + \cos^{2m+2}\theta}{1 + m\sin^2\theta}$$

$$R_k(\theta, 0, \ldots, 0) = 0, \qquad Q_k(\theta, 0, \ldots, 0) = 0, \qquad L_{sk}(\theta, 0, \ldots, 0) = 0$$

Следуя далее Ляпунову [1], определим

$$g_1 = \int_0^{2\pi} \frac{R_1}{Q_0}\, d\theta$$

Введем обозначение

$$G(\theta) = \int_0^{\theta} \left(g_1 - \frac{R_1}{Q_0}\right) d\theta$$

Заметим, что $G(\theta)$ будет ограниченная периодическая функция θ с периодом 2π.

Предполагая, что $g_1 \neq 0$, вводим замену

$$\rho = re^{G(\theta)} \qquad (\rho > 0)$$

Тогда перейдем от системы (4.1) к следующей системе:

$$\frac{d\rho}{dt} = \rho^{m+1}g_1P_1(\theta) + \rho^{m+2}P_2(\theta) + \ldots + \rho^{\alpha_0+N-m}\sum_{k=0}^{\infty} \rho^k P_k(\theta, y_1, \ldots, y_n) \quad (4.2)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \rho^m F_0(\theta) + \rho^{m+1}F_1(\theta) + \ldots + \rho^{\alpha_0+N-1-m}\sum_{k=0}^{\infty} \rho^k F_k(\theta, y_1, \ldots, y_n)$$

$$\frac{dy_s}{dt} = p_{s1}y_1 + \ldots + p_{sn}y_n + \rho^{\alpha_0+N}\sum_{k=0}^{\infty} \rho^k M_{sk}(\theta) + \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k W_{sk}(\theta, y_1, \ldots, y_n)$$

$$(s = 1, \ldots, n)$$

Функцию Ляпунова возьмем в виде

$$V = \rho + V_1(y_1, \ldots, y_n) \quad (4.3)$$

где

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V_1}{\partial y_s}(p_{s1}y_1 + \ldots + p_{sn}y_n) = g_1(y_1^2 + \ldots + y_n^2)$$

Ясно, что при $g_1 > 0$ форма V_1 будет определенно отрицательной, а при $g_1 < 0$ форма V_1 будет определенно положительной.

Учитывая (4.2), получим

$$\frac{dV}{dt} = g_1 Q_0(\theta)\, e^{-mG(\theta)}\rho^{m+1} + g_1(y_1^2 + \ldots + y_n^2) + \rho^{m+2}P_2(\theta) + \ldots$$

$$\ldots + \rho^{\alpha_0+N-m}\sum_{k=0}^{\infty}\rho^k P_k(\theta, y_1, \ldots, y_n) +$$

$$+ \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V_1}{\partial y_s}\Big[\rho^{\alpha_0+N}\sum_{k=0}^{\infty}\rho^k M_{sk}(\theta) + \sum_{k=0}^{\infty}\rho^k W_{sk}(\theta, y_1, \ldots, y_n)\Big]$$

Анализируя выражение для $dV\,/\,dt$, находим, что для достаточно малых ρ, $y_1, \ldots, y_n$ знак $dV\,/\,dt$ определяется знаком числа g_1.

При $g_1 < 0$ имеем устойчивость движения, при $g_1 > 0$ имеем неустойчивость движения.

Определяя для исследуемой системы $R_1(\theta)$ и $Q_0(\theta)$, находим, что условием устойчивости невозмущенного движения систем (2.10) или (3.5) при $a_0 < 0$, а $\beta_0 \geqslant (\alpha_0 - 1)\,/\,2$ будет выполнение неравенства

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin\theta\cos\theta + a_0\cos^N\theta\sin\theta}{{}^1/_2(N+1)\sin^2\theta - a_0\cos^{N+1}\theta}\,d\theta > 0 \tag{4.4}$$

Число N при этом должно быть нечетным. Условие (4.4) связывает параметры управляющего устройства с параметрами объекта управления.

В случае $g_1 = 0$ надо переходить к следующему наинизшему члену, определять

$$g_2 = \int_0^{2\pi}\frac{P_2}{F_0}\,d\theta$$

и далее исследование вести аналогичным путем. Если же и $g_2 = 0$, то надо определять первое не равное нулю число g_k. Если невозможно определить такое конечное число k, что $g_k \neq 0$, а $g_1 = \ldots = g_{k-1} = 0$, то вопрос об устойчивости исследуемой системы остается нерешенным.

5. Рассмотрим случай, когда в правых частях первых $n+1$ уравнений системы (1.1) находятся нелинейные члены.

Пусть вместо системы (1.1) имеем систему

$$\frac{dx_k}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{n+1} b_{k\alpha}x_\alpha + n_k x_{n+2} + \Phi_k(x_1, \ldots, x_{n+2}) \qquad (k = 1, \ldots, n+1)$$

$$\frac{dx_{n+2}}{dt} = f(\sigma), \qquad \sigma = \sum_{\alpha=1}^{n+1} p_\alpha x_\alpha + p_{n+2}x_{n+2} \tag{5.1}$$

Здесь смысл переменных и коэффициентов прежний, функция $f(\sigma)$ имеет вид (1.2), а разложения функций Φ_k по степеням своих переменных содержат члены не ниже второго порядка; корни характеристического уравнения системы (5.1) содержат прежние особенности.

Пусть

$$\Phi_k = \sum_{\alpha=1}^{n+2} d_{k\alpha}x_\alpha^2 + \sum_{\alpha=1}^{n+2} m_{k\alpha}x_\alpha^3 \qquad (k = 1, \ldots, n+1)$$

Применяя к системе (5.1) рассмотренные преобразования, получим систему типа (3.5), где

$$\sigma = \sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha' x_\alpha + \left(\sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha' C_\alpha + p_x\right)x + \left(\sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha' D_\alpha + p_y\right)y$$

$$Y = \sum_{k=1}^{n+1} B_k \Phi_k + \sum_{k=1}^{n+1} A_k \frac{d\Phi_k}{dt} + B_{n+2} f(\sigma) + A_{n+2}\frac{df(\sigma)}{dt}$$

$$X_s = -D_s Y + \Phi_s \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

Для функций Y и X_s сохраняем представления (2.4) и (2.5).

Для исследуемой системы получим, что $\alpha_0 = 2$, $\beta_0 = 1$, а величины a_0, b_0, a_1 и b_1 зависят от $d_{k\alpha}$ и $m_{k\alpha}$, причем

$$a_0 = a_0(d_{k\alpha}), \qquad b_0 = b_0(d_{k\alpha}), \qquad a_1 = a_1(d_{k\alpha}, m_{k\alpha}), \qquad b_1 = b_1(d_{k\alpha}, m_{k\alpha})$$

Если $a_0 \neq 0$ и $b_0 \neq 0$, то наинизший член разложения функции $f_0(x)$ имеет четную степень, равную двум. В этом случае имеем неустойчивость движения.

Для устойчивости движения необходимо обеспечить нечетную степень α_0 наинизшего члена разложения функции $f_0(x)$ и четную степень β_0 наинизшего члена разложения функции $\varphi_0(x)$, сохранив $\beta_0 < \alpha_0$.

Учитывая ранее полученные результаты, получаем следующие необходимые и достаточные условия устойчивости невозмущенного движения системы (5.1):

$$a_0(d_{k\alpha}) = 0, \qquad b_0(d_{k\alpha}) = 0 \tag{5.2}$$

$$a_1(d_{k\alpha}, m_{k\alpha}) < 0, \qquad b_1(d_{k\alpha}, m_{k\alpha}) < 0 \tag{5.3}$$

Заметим, что выполнить условие (5.2) при $d_{k\alpha} \neq 0$ и при $N > 2$ в выражении (1.2) невозможно, поэтому для обеспечения устойчивости в этом случае необходимо иметь в выражении (1.2) $N = 2$.

Условия (5.3) и (5.2) связывают параметры управляющего устройства с коэффициентами уравнений объекта управления в том числе и с коэффициентами при нелинейных членах.

Поступила 10 IV 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. ОНТИ, 1935.
2. Каменков Г. В. Об устойчивости движения в одном особенном случае. Сб. научн. тр. Казан. авиац. ин-та, 1935, № 4.
3. Каменков Г. В. Об устойчивости движения. Тр. Казан. авиац. ин-та, 1939, № 9.
4. Лурье А. И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. ГИТТЛ, 1951.