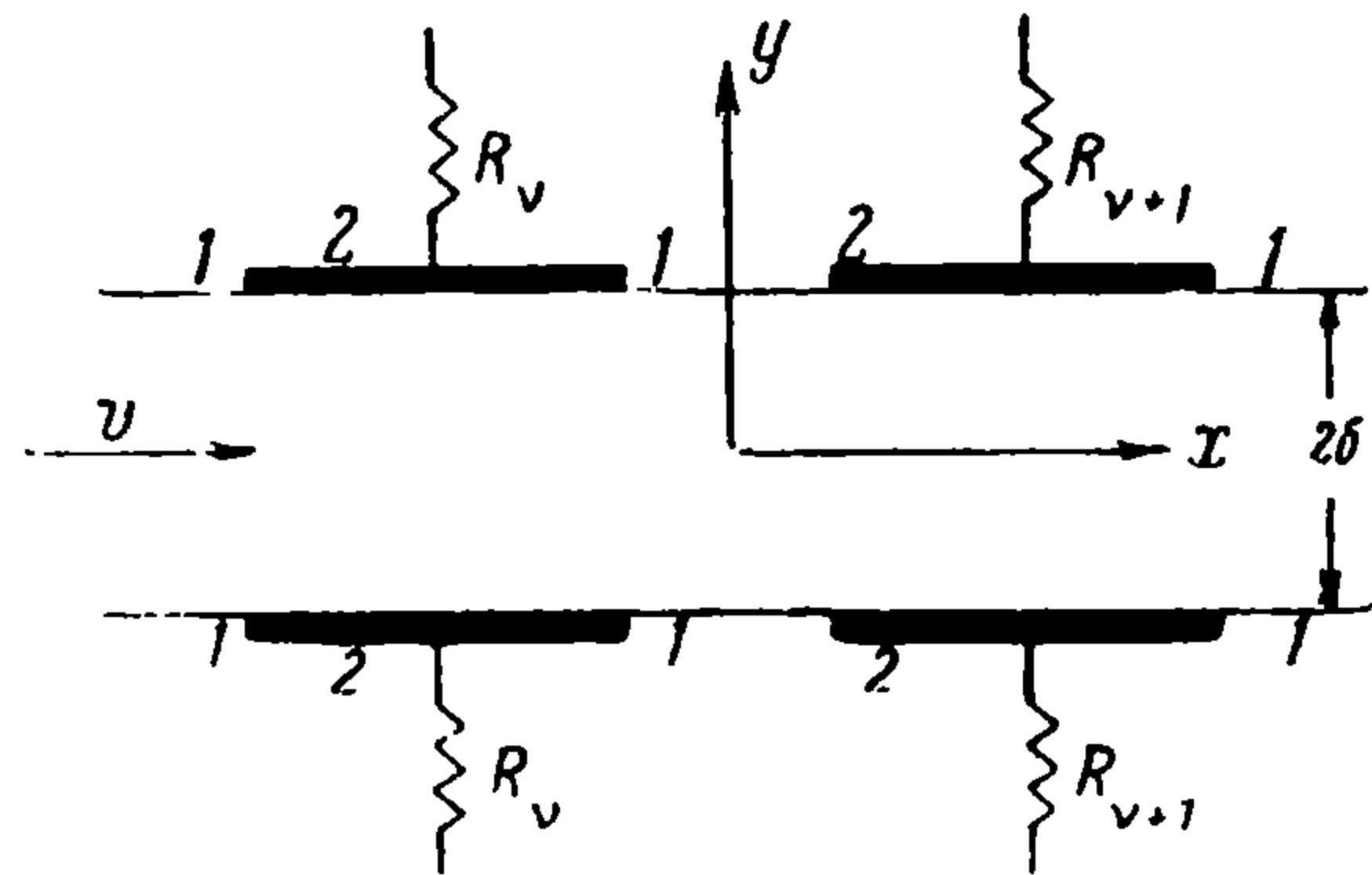


К РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МАГНИТОГИДРОДИНАМИКИ

А. Б. Ватажин (Москва)

Рассмотрены задачи о течении электропроводной среды в плоском канале с различными краевыми условиями в присутствии магнитного поля. Для канала, в центральной части которого стенки представляют собой электроды, а остальные участки стенок — изоляторы, получены решения в случае постоянного магнитного поля и произвольного закона изменения скорости поперек канала и в случае постоянной скорости течения и магнитного поля, произвольного по длине электродов.

§ 1. Рассмотрим течение жидкости с постоянной электропроводностью  $\sigma$  в канале (фиг. 1) с плоскими стенками  $y = \pm \delta$ , одни из участков которых являются изоляторами 1, другие — 2 — симметричными относительно оси канала электродами  $y = \pm \delta, a_v \leq x \leq b_v$ , каждая  $v$ -я пара которых соединена через внешнюю нагрузку  $R_v$  ( $v = 1, \dots, n$ ). Пусть внешнее магнитное поле  $\mathbf{B} = (0, 0, -B(x))$ ,  $B(x) \geq 0$  приложено перпендикулярно к плоскости течения и зависит только от координаты  $x$ . Тогда в результате взаимодействия потока жидкости и магнитного поля на внешних нагрузках выделяется электрическая мощность  $N_v = J_v^2 R_v$ , где  $J_v$  — полный ток на нагрузке. Если магнитные числа Рейнольдса малы (что выполняется во многих практических приложениях), то влиянием индуцированного магнитного поля на течение можно пренебречь и распределение плотности электрического тока  $\mathbf{j}$  и потенциала  $\phi$  искать из закона Ома и уравнения неразрывности



Фиг. 1

$$\mathbf{j} = \sigma \left( -\nabla\phi + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right), \quad \text{div } \mathbf{j} = 0 \tag{1.1}$$

в которых магнитное поле считается заданным.

В первом приближении скорость потока  $\mathbf{v}$  также можно считать известной из гидродинамических задач величиной. Тогда уравнения (1.1) представляют собой замкнутую систему для определения токов и потенциала. Если скорость имеет только продольную компоненту  $V$ , систему (1.1) можно записать

$$\frac{1}{\sigma} j_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad \frac{1}{\sigma} j_y = -\frac{\partial\phi}{\partial y} + \frac{1}{c} VB, \quad \Delta\phi = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial y} (VB) \tag{1.2}$$

Функция  $\phi$  должна удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\phi(x, \pm\delta) = \pm\phi_v \quad \text{— на электродах} \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{1}{c} VB \quad \text{— на изоляторах} \tag{1.4}$$

Постоянные  $\phi_v$  должны определяться из закона Ома для внешних нагрузок

$$R_v \int_{a_v}^{b_v} j_y(x, \pm\delta) dx = 2\phi_v \tag{1.5}$$

2. Рассмотрим течение газа в постоянном по длине канала магнитном поле. Предположим скорость произвольной четной функцией  $y$ . Тогда, введя функцию  $u(x, y)$  по формуле

$$u = \phi - \frac{1}{c} B \int_0^y V dy$$

из соотношений (1.2) имеем

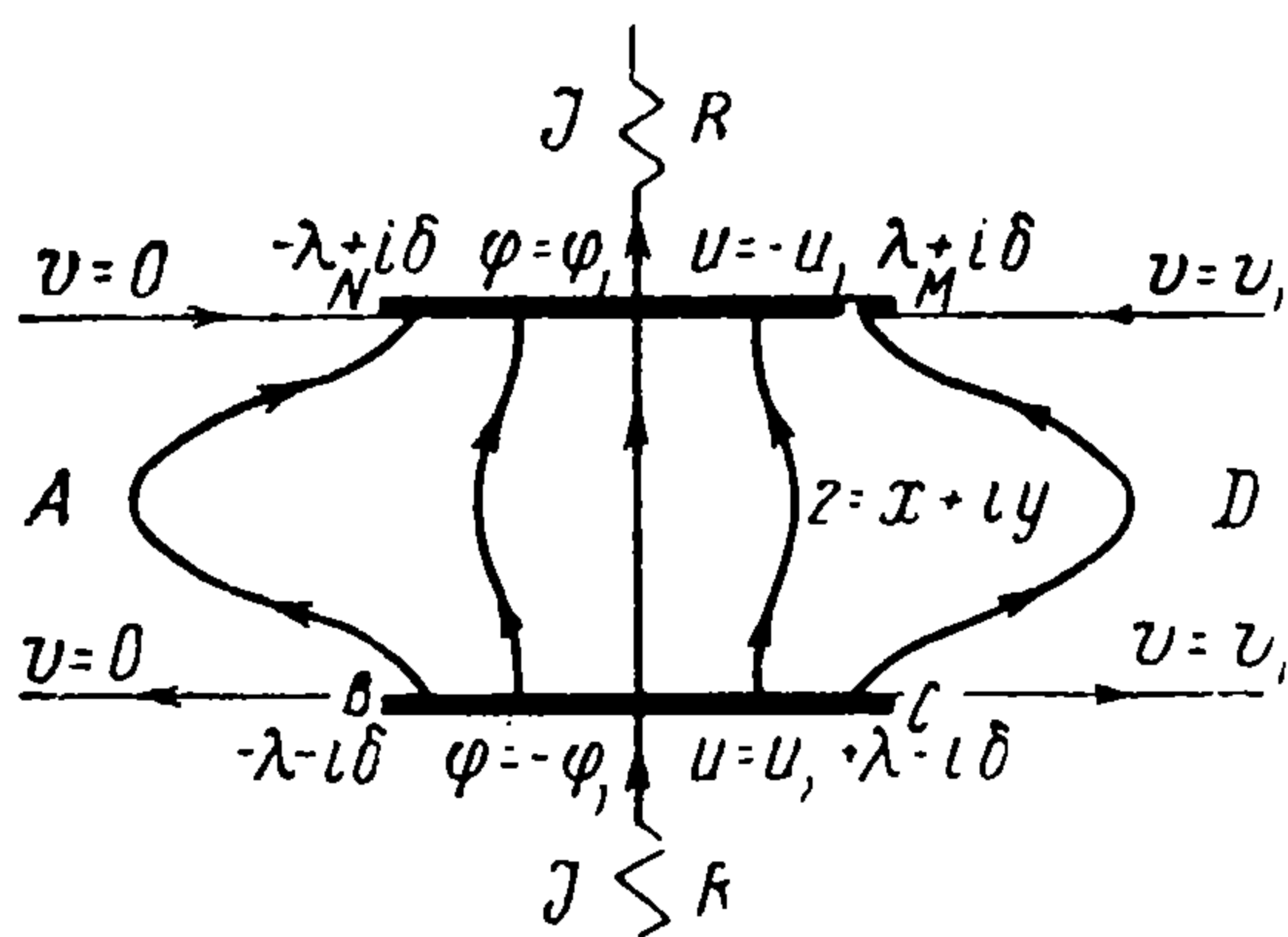
$$\frac{1}{\sigma} j_x = -\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{1}{\sigma} j_y = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \Delta u = 0 \tag{2.1}$$

Предположим сначала, что верхняя и нижняя стенки — изоляторы. Система (2.1)

имеет решение

$$u \equiv 0, \quad \mathbf{j} \equiv 0, \quad \varphi = \frac{1}{c} B \int_0^y V dy \quad (2.2)$$

В этом случае в канале происходит разделение электрического заряда, в результате чего между верхней и нижней стенками создается разность потенциала



$$\varphi(x, +\delta) - \varphi(x, -\delta) = \frac{1}{c} B \int_{-\delta}^{+\delta} V dy = \mathcal{E}$$

Пусть теперь одни участки стенок  $y = \pm\delta$ ,  $a_v \leq x \leq b_v$  — электроды. Так как на бесконечности стенки канала — изоляторы, можно воспользоваться предыдущим решением. Тогда

$$\varphi(x, \pm\delta) = \pm^{1/2} \mathcal{E}, \quad u(x, \pm\delta) = 0 \quad \text{при } x \rightarrow \pm\infty$$

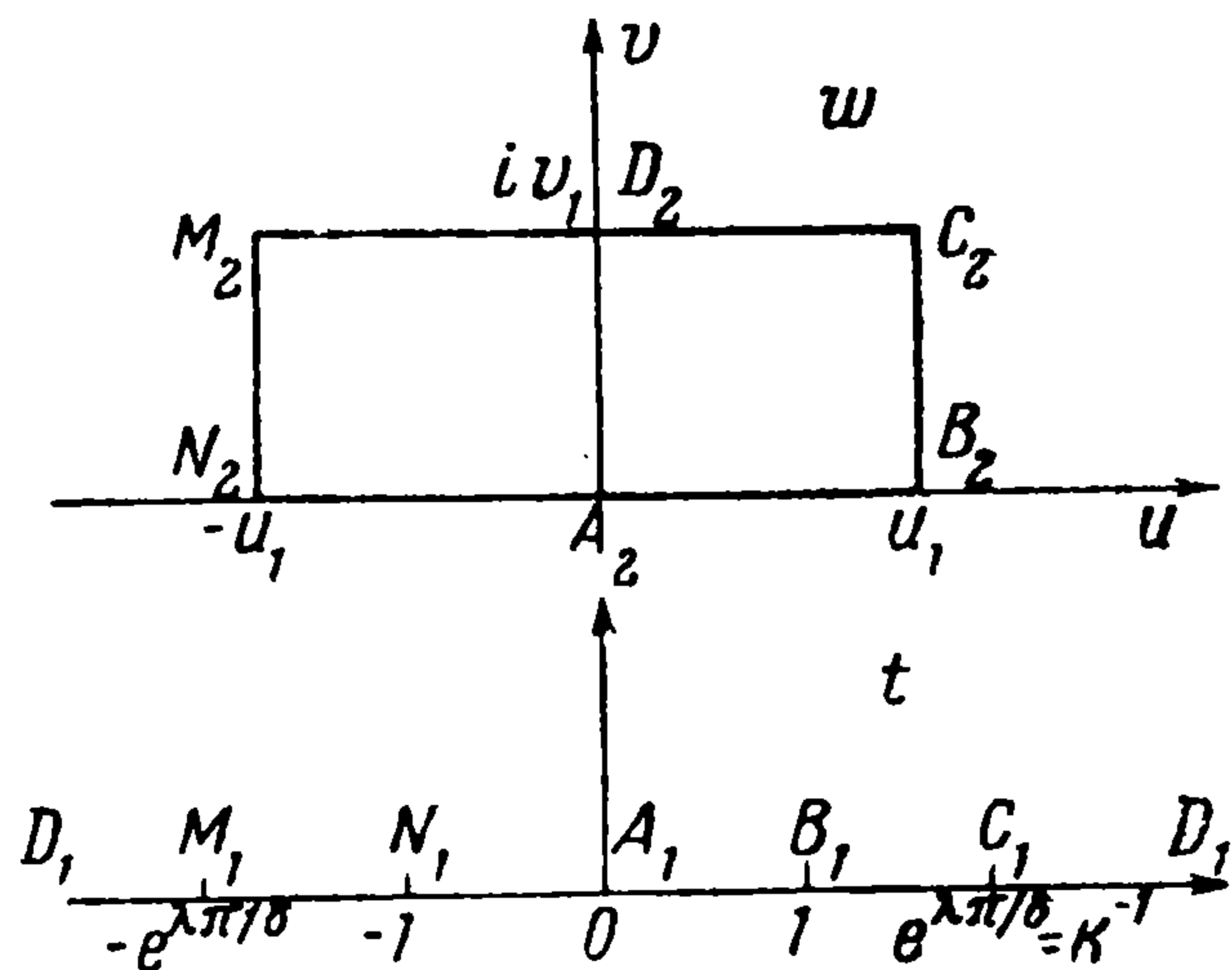
Фиг. 2

Введем аналитическую функцию  $w(z) = u + iv$ . На электродах постоянна действительная часть этой функции  $u(x, \pm\delta) = \mp (1/2 \mathcal{E} - \varphi_v) = \mp u_v$  ( $u_v \geq 0$ , так как потенциал частично падает на внутренней нагрузке). На изоляторах постоянна мнимая часть  $v(x, y)$ . Изменение  $v_v = v(b_v, \delta) - v(a_v, \delta)$  функции  $v(x, y)$  на электродах связано с величиной  $u_v$  соотношениями, следующими из выражений (1.5)

$$R_v \sigma v_v = \mathcal{E} - 2u_v \quad (2.3)$$

Таким образом, задача может быть решена конформным отображением полосы  $-\delta < \text{Im}z < \delta$  на внутренность многоугольника в плоскости  $w$ , стороны которого параллельны координатным осям, а длины сторон связаны соотношениями (2.3); при  $v \geq 2$  такое отображение, вообще говоря, задает определенную зависимость между нагрузками  $R_v$ .

В качестве примера рассмотрена задача о течении в канале с двумя центральными электродами<sup>1</sup> длиной  $2\lambda$ , соединенными нагрузкой  $R$ . Соответствующие области в плоскостях  $z$ ,  $w$  и  $t$  изображены на фиг. 2 и 3. Решение задачи дается формулами



Фиг. 3

$$w = \frac{\mathcal{E}}{(2 + R\sigma\alpha) K(k)} \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \quad (2.4)$$

$$t = i \exp \frac{\pi(z + \lambda)}{2\delta}, \quad k = \exp -\frac{\lambda\pi}{\delta}, \quad k' = \sqrt{1-k^2}, \quad \alpha^{-1} = \frac{K(k)}{K(k')}$$

Потенциал верхнего электрода  $\varphi_1$  и полный ток на нагрузке  $J$  равны

$$\varphi_1 = \frac{\mathcal{E} R \sigma \alpha}{2(2 + R \sigma \alpha)}, \quad J = \frac{\mathcal{E} \sigma \alpha}{2 + R \sigma \alpha} \quad (2.5)$$

Плотность тока в канале и джоулева диссипация  $q(x, y)$  в единице объема выражаются

$$\frac{1}{\sigma} i_x = -f(x, y) \sin \left[ \frac{1}{2} (\beta_1 + \beta_2 - \pi \delta^{-1} y) \right], \quad \frac{1}{\sigma} i_y = f(x, y) \cos \left[ \frac{1}{2} (\beta_1 + \beta_2 - \pi \delta^{-1} y) \right]$$

<sup>1</sup> Задача о растекании тока в таком канале за счет приложенной извне разности потенциала в отсутствие магнитного поля рассмотрена в работе [1].

$$\beta_{1,2} = \arg \{1 + \cos(\pi\delta^{-1}y) \exp \pi\delta^{-1}(x \pm \lambda), \quad \sin(\pi\delta^{-1}y) \exp \pi\delta^{-1}(x \pm \lambda)\} \quad (2.6)$$

$$f(x, y) = \frac{\pi\mathcal{E}}{2\sqrt{2}\delta(2 + R\sigma\alpha)K(k)} \exp \frac{\lambda\pi}{2\delta} \cdot \{[\operatorname{ch} \pi\delta^{-1}(x + \lambda) + \cos \pi\delta^{-1}y] \times \\ \times [\operatorname{ch} \pi\delta^{-1}(x - \lambda) + \cos \pi\delta^{-1}y]\}^{-0.25}, \quad q(x, y) = \sigma f^2(x, y)$$

В формулах (2.4) — (2.6) величина  $K(k)$  представляет полный эллиптический интеграл первого рода. Функция  $\alpha(\lambda)$  монотонно возрастает с ростом аргумента, причем  $\alpha(0) = 0, \alpha(\infty) = \infty$ . Легко показать следующее.

1°. Функция  $j_x(x, y)$  нечетная, а функция  $j_y(x, y)$  четная по своим аргументам.

$$2^\circ. \quad \begin{array}{llll} j_x = 0, & j_y = \sigma f(x, 0) & \text{при } y = 0, & 0 \leq x < \infty \\ j_x = 0, & j_y = \sigma f(x, \delta) & \text{при } y = \delta, & 0 \leq x < \lambda \\ j_x = -\sigma f(x, \delta), & j_y = 0 & \text{при } y = \delta, & x > \lambda \\ j_x = 0, & j_y = \sigma f(0, y) & \text{при } x = 0, & 0 \leq y \leq \delta \end{array}$$

3°. В области  $x \geq 0, 0 \leq y \leq \delta$  токи  $j_y \geq 0, j_x \leq 0$ .

Некоторые линии тока схематично изображены на фиг. 2.

4°. В точках  $y = \pm \delta, x = \pm \lambda$  функция  $w(z)$  теряет аналитичность. Поэтому, например, диссипация  $q(x, y)$  в этих точках бесконечно велика. Однако интегральные характеристики: ток, выходящий через участок электрода, примыкающий к одной из точек, и диссипация в окрестности этих точек при уменьшении соответственно размера участка электрода и радиуса области стремятся к нулю. Полная диссипация в канале конечна.

Как видно из формул (2.5), величина тока  $J$  возрастает с увеличением размера электродов, электропроводности и уменьшается с ростом внешнего сопротивления (фиг. 4).

В случае  $\lambda \rightarrow \infty$ , т. е. когда стенки канала по всей длине будут электродами, потенциал на верхнем (нижнем) электроде и ток соответственно равны

$$\varphi(x, \pm \delta) = \pm \frac{1}{2} \mathcal{E}, \quad J = \mathcal{E}R^{-1}$$

При этом джоулевы потери в канале отсутствуют.

В случае  $\lambda \rightarrow 0$ , т. е. когда стенки по всей длине будут изоляторами с точечными электропроводящими выводами при  $x = 0, y = \pm \delta$ , потенциал в точках вывода и снимаемый ток равны нулю. На остальной поверхности стенок потенциал равен

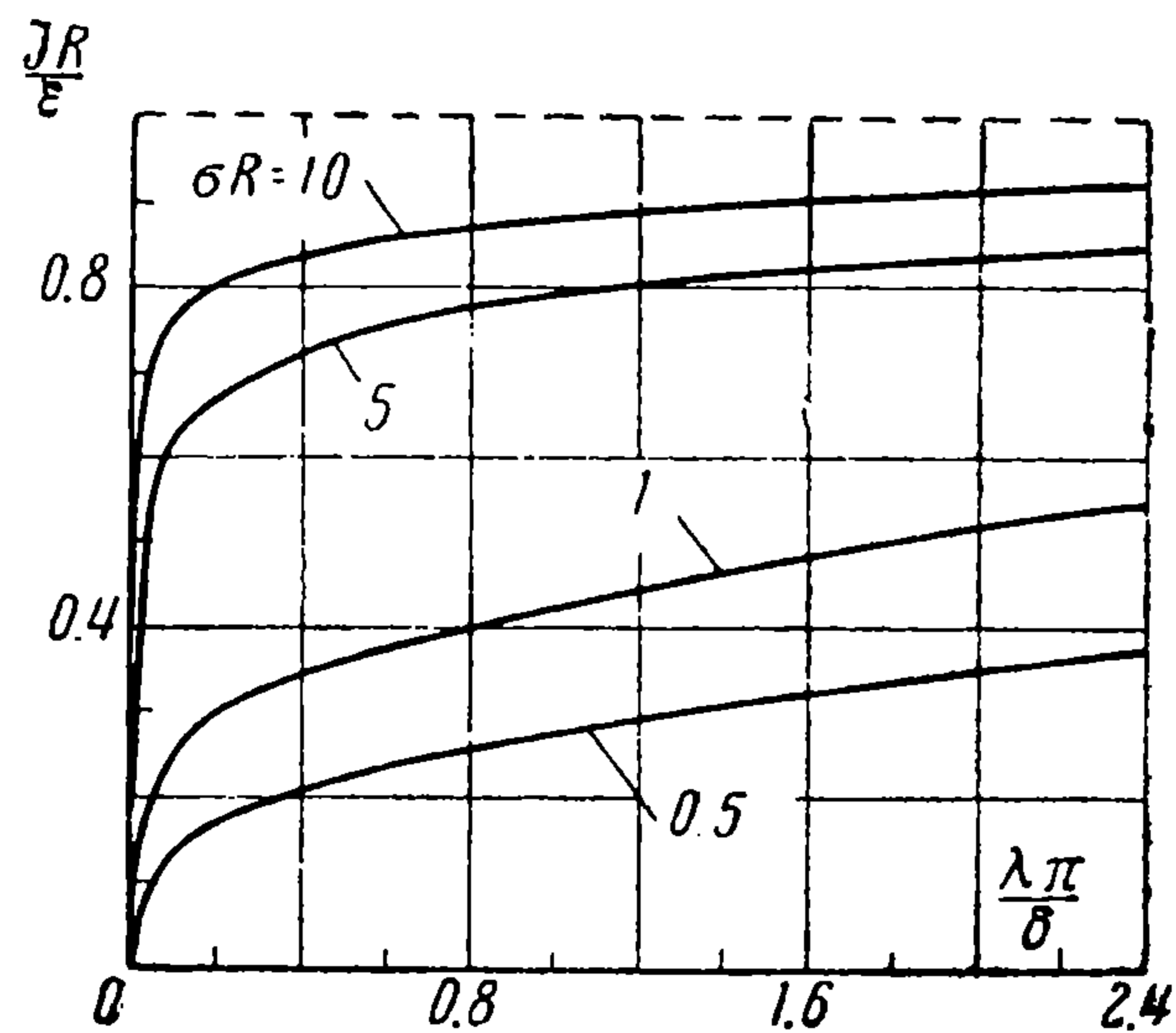
$$\varphi(x, \pm \delta) = \pm \frac{1}{2} \mathcal{E}$$

Ток в канале равен нулю: происходит разделение электрического заряда.

3. Пусть магнитное поле при  $a_\nu \leq x \leq b_\nu, \nu = 1, \dots, n$  выражается произвольной функцией  $B = B_\nu(x), B_\nu(a_\nu) = B_\nu(b_\nu) = 0$  и равно нулю вне электродов. Предположим, что скорость среды всюду постоянна. Тогда функция  $\varphi(x, y)$  будет гармонической и можно построить аналитическую функцию  $w = \varphi + i\psi$ . Так как на электродах постоянен потенциал ( $\varphi(x, \pm \delta) = \pm \varphi_\nu$ ), а на изоляторах вследствие условия  $B \equiv 0$  постоянна мнимая часть функции  $w$ , задача также, как в § 2, может быть решена конформным отображением полосы на внутренность многоугольника в плоскости  $w$  со сторонами, параллельными координатным осям. Изменение  $\psi_\nu = \psi(a_\nu, \delta) - \psi(b_\nu, \delta)$  функции  $\psi(x, y)$  на электродах связано с величиной  $\varphi_\nu$  условием (1.5)

$$G_\nu - \psi_\nu = 2\varphi_\nu / R_\nu\sigma, \quad G_\nu = \frac{1}{c} V \int_{a_\nu}^{b_\nu} B_\nu(x) dx$$

На бесконечности потенциал обращается в нуль.



Фиг. 4

Рассмотрим канал с центральными электродами длиной  $2\lambda$  (фиг. 5). Соответствующая область в плоскости  $w$  изображена на фиг. 6. Решение дается формулами

$$w = - \frac{R\sigma G}{(2 + R\sigma\alpha) K(k)} \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \quad G = \frac{1}{c} V \int_{-\lambda}^{+\lambda} B dx \quad (3.1)$$

Потенциал верхнего электрода  $\varphi_1$  и снимаемый ток  $J$  равны

$$\varphi_1 = \frac{R\sigma G}{2 + R\sigma\alpha}, \quad J = \frac{2\sigma G}{2 + R\sigma\alpha} \quad (3.2)$$

а токи  $i_x$  и  $i_y$  выражаются

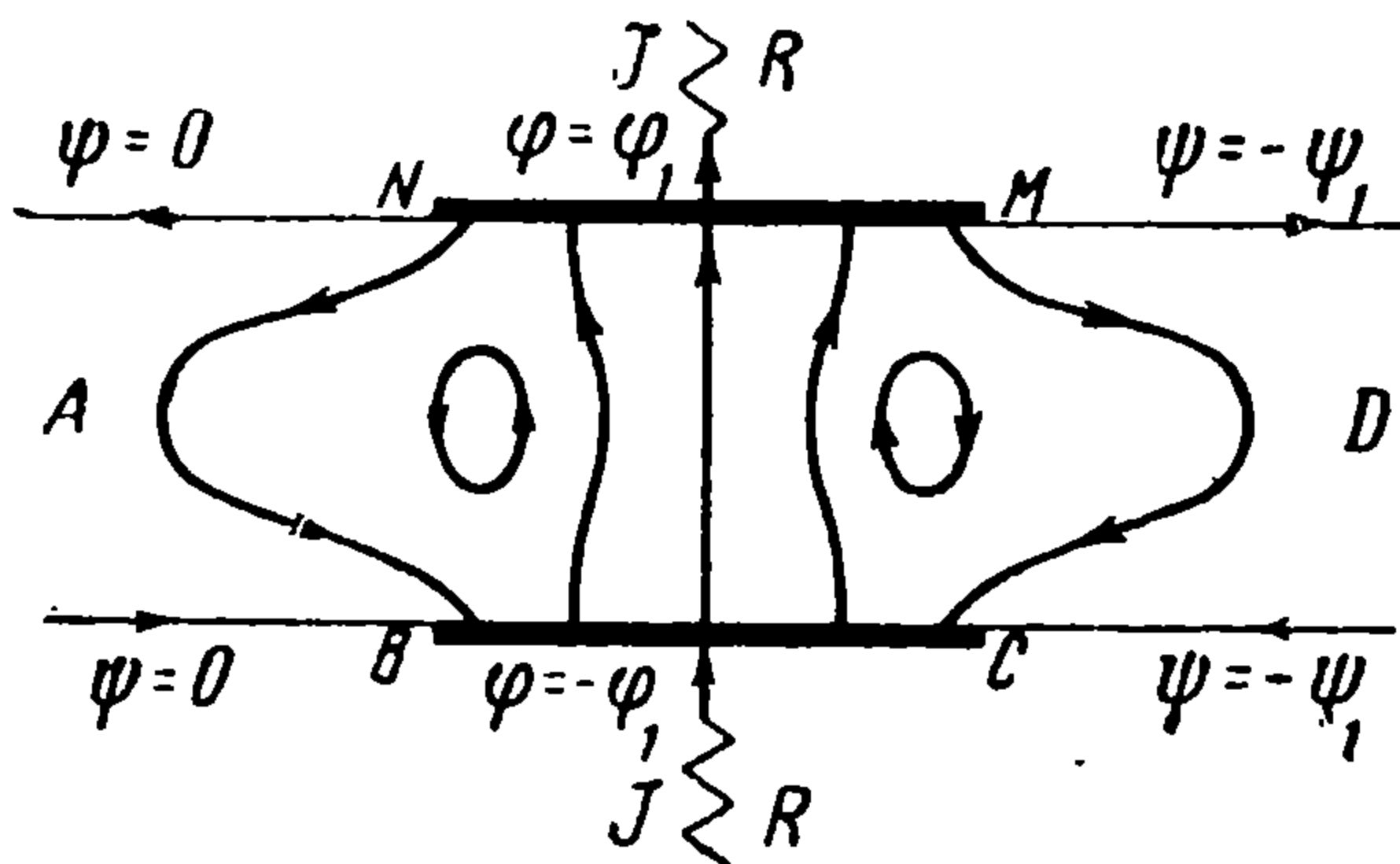
$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma} i_x &= \tau(x, y) \sin \left[ \frac{1}{2} (\beta_1 + \beta_2 - \pi\delta^{-1}y) \right] \\ \frac{1}{\sigma} i_y &= -\tau(x, y) \cos \left[ \frac{1}{2} (\beta_1 + \beta_2 - \pi\delta^{-1}y) \right] + \frac{1}{c} VB(x). \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \tau(x, y) &= \frac{\pi R\sigma G}{2\sqrt{2}\delta(2 + R\sigma\alpha)K(k)} \exp \frac{\lambda\pi}{2\delta} \times \\ &\times \{ [\operatorname{ch} \pi\delta^{-1}(x + \lambda) + \cos \pi\delta^{-1}y] [\operatorname{ch} \pi\delta^{-1}(x - \lambda) + \cos \pi\delta^{-1}y] \}^{-0.25} \end{aligned}$$

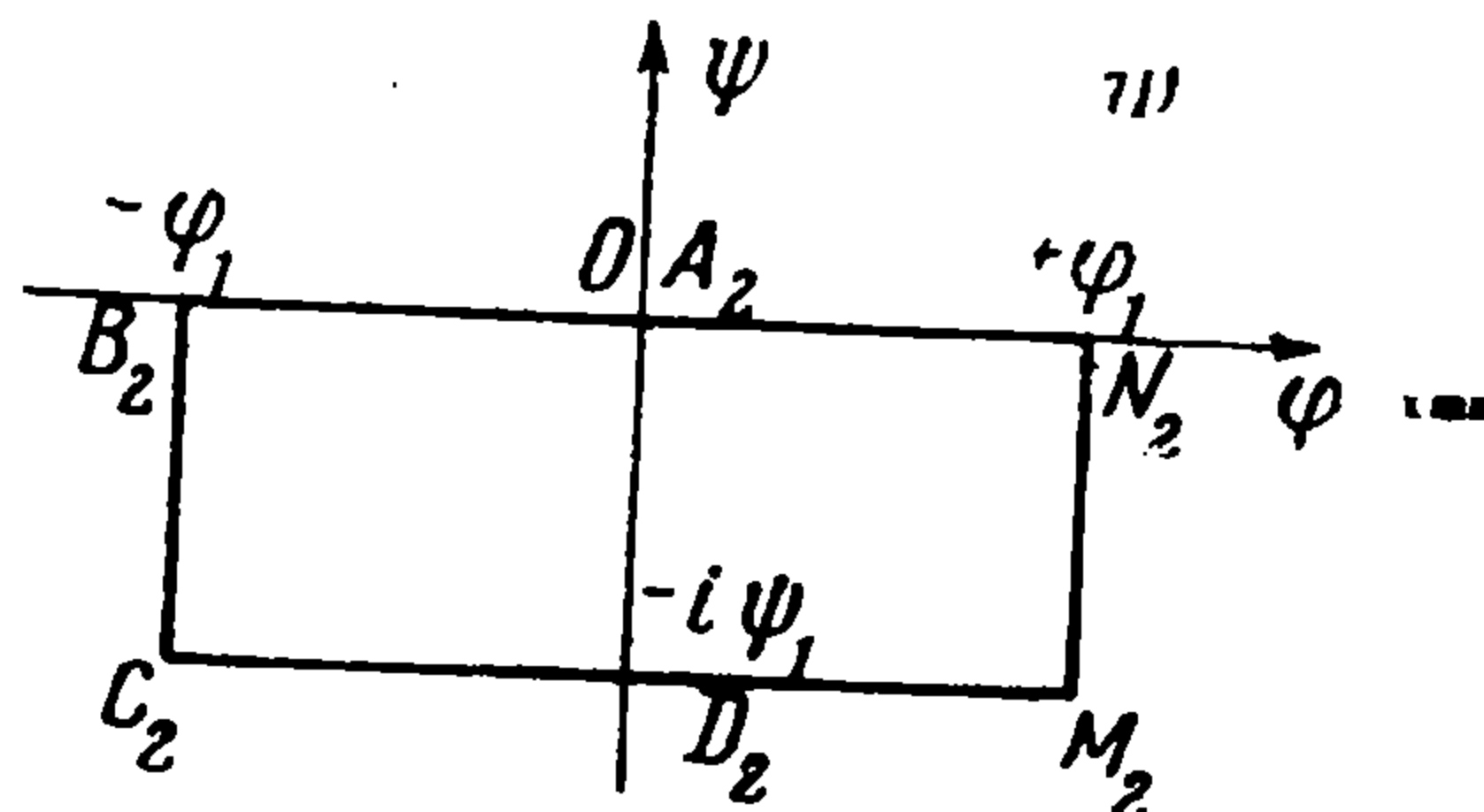
В формулах (3.1) — (3.3) величины  $\beta_1, \beta_2, \alpha, k, K(k)$  и  $t$  выражаются так же, как в § 2. Предположим, что функция  $B(x)$  четная и  $B(x) \leq B(0)$ ; легко проверить, что:

- 1) функция  $i_x(x, y)$  нечетная, а  $i_y(x, y)$  — четная по своим аргументам;
- 2) при  $x > \lambda, 0 \leq y \leq \delta$  ток  $i_y \leq 0$ ; при  $x \geq 0, 0 \leq y \leq \delta$  ток  $i_x \geq 0$
- 3) на оси  $x = 0$  ток  $i_y > 0$

Следовательно, для любого  $0 \leq y_1 \leq \delta$  должна найтись точка  $P(x_1, y_1)$ ,  $x_1 < \lambda$ , в которой  $i_y = 0$  и линии тока имеют горизонтальную касательную. Вид некоторых линий тока представлен на фиг. 5.



Фиг. 5



Фиг. 6

Как видно из формулы (3.2), ток на внешней нагрузке возрастает с увеличением электропроводности среды и величины поля и убывает при увеличении сопротивления внешней нагрузки. При увеличении длины электродов с сохранением величин  $\sigma, G, R$  снимаемый ток убывает и, наконец, при  $\lambda \rightarrow \infty$  ток во внешней цепи вообще отсутствует. При больших  $\lambda$  из (3.3) приближенно имеем

$$i_x \equiv 0, \quad \frac{1}{\sigma} i_y = \frac{1}{c} VB(x) - \frac{1}{2c\lambda} V \int_{-\lambda}^{+\lambda} B dx$$

Там, где магнитное поле не мало, токи текут от нижнего электрода к верхнему, затем перетекают по электродам и замыкаются через остальную часть канала, где магнитное поле близко к нулю.

В другом предельном случае  $\lambda \rightarrow 0$  ток и потенциал в точках вывода равны

$$J = G\sigma, \quad \varphi_1 = \frac{1}{2} R\sigma G$$

На остальной части стенок потенциал равен нулю. В этом случае магнитное поле  $B(x) = G\delta(x)$  ( $\delta(x)$  — дельта-функция).

Поступила 32 IV 1961

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Табас К. К. Расчет электрического поля электромагнитного насоса постоянного тока. Уч. зап. Латв. гос. ун-та, 1958, вып. XXI.