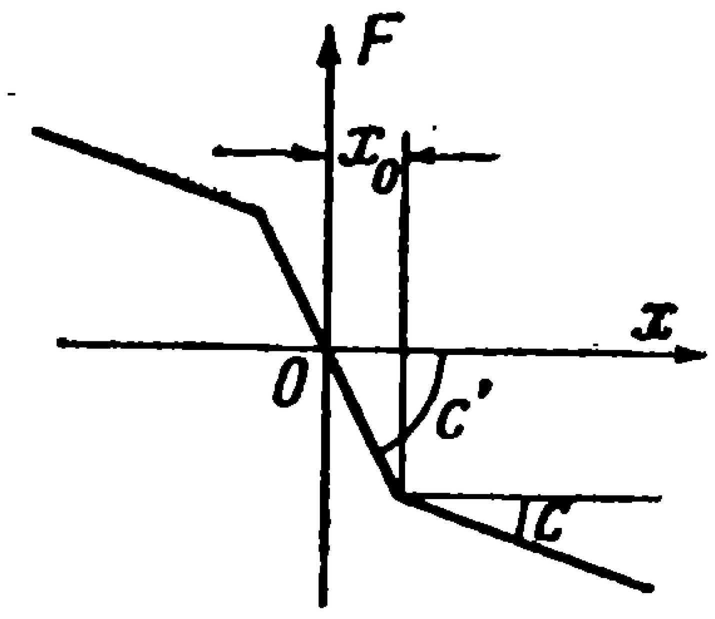
ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Г. Н. Пученкин (Ленинград)

1. Уравнение колебания вещественной точки под действием синусоидальной возмущающей силы и нелинейной восстанавливающей силы имеет следующий вид:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + cx = \varepsilon f(x) + \varepsilon E \sin \nu t \qquad (1.1)$$



Здесь $f(x)$ — нелинейная или кусочно-линейная функция x, а ε — малый параметр.

В книге [1] уравнение (1.1) интегрируется асимптотическими методами, причем решение в первом приближении получено в виде

$$x = a\cos\psi, \qquad \psi = \nu t + \theta \qquad (1.2)$$

Значения величин a и θ определяются из следующей системы уравнений

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\omega_1(a)}{2\pi\omega m} - \frac{\varepsilon E}{m(\omega+\nu)}\cos\theta, \qquad \frac{d\theta}{dt} = \omega - \nu - \frac{\omega_2(a)}{2\pi a m\omega} + \frac{\varepsilon E}{ma(\omega+\nu)}\sin\theta \qquad (1.3)$$

где

$$\omega_1(a) = \varepsilon\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi)\sin\psi\, d\psi, \qquad \omega_2(a) = \varepsilon\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi)\cos\psi\, d\psi, \qquad \omega = \sqrt{\frac{c}{m}} \qquad (1.4)$$

Если $f(x)$ — полином или кусочно-линейная функция с симметричным графиком относительно начала координат, то $\omega_1(a) = 0$. Уравнения (1.3) в этом случае будут

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\varepsilon E}{m(\omega+\nu)}\cos\theta, \qquad \frac{d\theta}{dt} = \omega - \nu - \frac{\omega_2(a)}{2\pi\omega a m} + \frac{\varepsilon E}{ma(\omega+\nu)}\sin\theta \qquad (1.5)$$

Система уравнений (1.5) решается в книге [1] для стационарного синхронного режима с постоянной амплитудой a и частотой колебаний, равной частоте возмущающей силы. В этом случае производные $da\,/\,dt$ и $d\theta\,/\,dt$ приравниваются нулю и, таким образом, из (1.5) определяется амплитуда стационарных синхронных колебаний. Покажем, что уравнения (1.5) позволяют решить задачу в общем случае, найдя в виде квадратур зависимости $a = a(t)$ и $\theta = \theta(t)$. Из уравнений (1.5) имеем

$$\frac{da}{d\theta}\left[\omega - \nu - \frac{\omega_2(a)}{2\pi\omega a m} + \frac{\varepsilon E}{ma(\omega+\nu)}\sin\theta\right] = -\frac{\varepsilon E}{m(\omega+\nu)}\cos\theta$$

Отсюда, интегрируя, получим

$$\frac{1}{2}(\omega - \nu)a^2 - \frac{1}{2\pi\omega m}\int\omega_2(a)\,da + \frac{\varepsilon E}{m(\omega+\nu)}a\sin\theta = C \qquad (1.6)$$

В этом уравнении, а также во всех последующих берется только одно значение неопределенного интеграла без произвольной постоянной.

Исключив θ из первого уравнения (1.5) при помощи (1.6), имеем

$$a\left\{\left[\frac{\varepsilon E}{m(\omega+\nu)}\right]^2 a^2 - \left[\frac{1}{2}(\omega-\nu)a^2 - \frac{1}{2\pi\omega m}\int\omega_2(a)\,da - C\right]^2\right\}^{-\frac{1}{2}} da = dt \qquad (1.7)$$

Проинтегрировав последнее уравнение, получим зависимость $a = a(t)$, после чего из уравнения (1.6) найдем зависимость $\theta = \theta(t)$. Уравнение (1.7) показывает, что в общем случае амплитуда не стремится к постоянному значению при $t \to \infty$.

2. Рассмотрим пример. Пусть дана система с характеристикой восстанавливающей силы, составленной из прямолинейных отрезков (фигура). Для такой системы

$$\varepsilon f(x) = \begin{cases} -(c'-c)\,x & \text{для } -x_0 \leqslant x \leqslant x_0 \\ -(c'-c)\,x_0 & \text{для } x_0 \leqslant x \leqslant \infty \\ (c'-c)\,x_0 & \text{для } -\infty \leqslant x \leqslant -x_0 \end{cases}$$

Вычисляя $\omega_2(a)$ по второй формуле (1.4), разобьем промежуток интегрирования на три участка. Пределы интегрирования на каждом участке берутся в соответствии с первым уравнением (1.2). Пользуясь известным результатом [1]

$$\omega_2(a) = -2(c'-c)\left[a \arcsin\frac{x_0}{a} + x_0\sqrt{1-\left(\frac{x_0}{a}\right)^2}\right] \tag{2.1}$$

имеем

$$\int \omega_2(a)\,da = -2(c'-c)\left[\left(x_0^2+\frac{1}{2}a^2\right)\arcsin\frac{x_0}{a}+\frac{3}{2}x_0\sqrt{a^2-x_0^2}\right] \tag{2.2}$$

В частном случае, когда $x_0 = 0$, $c' = \infty$, а $c'x_0 = F_0$, имеем

$$\int \omega_2(a)\,da = -4F_0 a \tag{2.3}$$

Интегрируя уравнение (1.7) для этого частного случая, получим эллиптические интегралы в левой части. Согласно существующим решениям [1,2], резонанс ($\omega = \nu$) в рассматриваемой системе приводит к неограниченному возрастанию амплитуды колебаний. Однако это бывает не всегда. В самом деле при резонансе уравнение (1.7) в соответствии с выражением (2.2) приобретает вид

$$a\left\{\left(\frac{\varepsilon E}{2m\nu}\right)^2 a^2 - \left[\frac{c'-c}{\pi m\nu}\left(\frac{3}{2}x_0\sqrt{a^2-x_0^2}+\left(x_0^2+\frac{1}{2}a^2\right)\arcsin\frac{x_0}{a}\right)-C\right]^2\right\}^{-\frac{1}{2}}d\dot{a}=dt \tag{2.4}$$

Если выполняется условие

$$\left(\frac{\varepsilon E}{2m\nu}\right)^2-\left(2\frac{c'-c}{\pi m\nu}x_0\right)^2>0, \quad \text{или} \quad \varepsilon E>4\frac{|c'-c|}{\pi}x_0 \tag{2.5}$$

то выражение в фигурных скобках (2.4) положительно при $a \to \pm\infty$ и резонанс в системе приводит к неограниченному возрастанию амплитуды колебаний. Если выполняются неравенства, обратные (2.5), то выражение в фигурных скобках (2.4) отрицательно при $a \to \pm\infty$ и резонанс в рассматриваемой системе не приводит к неограниченному возрастанию амплитуды колебаний.

Наибольшее по модулю значение амплитуды в этом случае найдется как наибольший по модулю вещественный корень уравнения

$$\left(\frac{\varepsilon E}{2m\nu}\right)^2 a^2-\left\{\frac{c'-c}{\pi m\nu}\left[\frac{3}{2}x_0\sqrt{a^2-x_0^2}+\left(x_0^2+\frac{1}{2}a^2\right)\arcsin\frac{x_0}{a}\right]-C\right\}^2=0 \tag{2.6}$$

Для системы с предварительным натягом ($x_0 = 0$, $c' = \infty$, $c'x_0 = F_0$) уравнение (2.4) интегрируется в элементарных функциях, а условие ограниченности амплитуды колебаний при резонансе будет

$$\varepsilon E < 4F_0/\pi \tag{2.7}$$

Уравнение (2.6) в этом случае приобретает вид

$$\left(\frac{\varepsilon E}{2m\nu}\right)^2 a^2-\left(\frac{2F_0}{\pi m\nu}a-C\right)^2=0$$

Отсюда имеем экстремальные значения амплитуды колебаний при резонансе для системы с предварительным натягом, подчиняющейся условию (2.7)

$$a_1=\frac{2Cm\nu}{4F_0/\pi-\varepsilon E}, \qquad a_2=\frac{2Cm\nu}{4F_0/\pi+\varepsilon E}, \quad C=\frac{2F_0}{\pi m\nu}a+\frac{\varepsilon E}{2m\nu}a\sin\theta \tag{2.8}$$

(здесь C согласно (1.6) и (2.3)); амплитуда колебаний изменяется от a_1 до a_2 и обратно.

Пользуясь вторым уравнением (1.5) с учетом (2.1) и (2.8), получим циклическую частоту колебаний в данном случае

$$\frac{d\psi}{dt}=\nu+\frac{d\theta}{dt}=\nu+\frac{C}{a^2}$$

Поступила 18 IV 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н. и Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Физматгиз., 1958.
2. Лурье А. И. и Чекмарев А. И. Вынужденные колебания в нелинейной системе с характеристикой из прямолинейных отрезков. ПММ, 1938, т. 1., вып. 3.