УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

В. А. Табуева (Свердловск)

Рассмотрим дифференциальное уравнение третьего порядка

$$\dddot{x} + \alpha\ddot{x} + \beta\dot{x} + \sin x = e(t) \tag{1}$$

Здесь α, β — положительные постоянные, $e(t)$ — периодическая, с периодом 2π, интегрируемая с квадратом функция. Это уравнение встречается, в частности, при изучении синхронизирующего устройства в телевидении [1].

В предлагаемой заметке, исходя из доказанной Е. А. Барбашиным теоремы [2], указываются условия существования периодического по t решения уравнения (1).

Уравнение (1) эквивалентно системе дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = z, \qquad \dot{z} = -\alpha z - \beta y - \sin x + e(t) \tag{2}$$

Введем обозначение

$$\varphi(x) = x - \sin x$$

Тогда система первого приближения будет иметь вид

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = z, \qquad \dot{z} = -x - \beta y - \alpha z \tag{3}$$

Предположим, что начало координат является устойчивой особой точкой системы (3) типа «обобщенный фокус», т. е. предположим, что характеристическое уравнение

$$r^3 + \alpha r^2 + \beta r + 1 = 0$$

системы (3) имеет один действительный корень $\lambda < 0$ и два комплексных $a \pm bi$, где $a < 0$, $b > 0$ — действительные числа. Из предположения устойчивости начала координат для системы (3) следует также выполнение неравенства $\alpha\beta > 1$.

Обозначим через $\mu = \max(a, \lambda)$, т. е. наибольшее из чисел a и λ. Введем в рассмотрение число

$$B^\circ = \frac{M + (a^2 + b^2 + 1)N}{\Delta}$$

где

$$\Delta = b\,[(a-\lambda)^2 + b^2], \quad M = b\,[(a-1)^2 + b^2] \quad N = \sqrt{\frac{\Delta}{b}}\,(1 + \sqrt{-\lambda} + \sqrt{\lambda^2 + \beta}$$

Пусть в пространстве x, y, z область D задана неравенствами

$$t \geqslant 0, \qquad \max(|x|, |y|, |z|) \leqslant \varepsilon, \qquad \varepsilon = \sqrt{\frac{-2\mu}{B^\circ}}$$

Теорема Е. А. Барбашина [2], устанавливающая существование периодического решения, применима к системе дифференциальных уравнений при выполнении целого ряда ограничений, накладываемых на систему. Для системы (2), помимо уже указанных, одним из таких ограничений является существование фундаментальной матрицы $W(t, \tau) = \| u_{ik}(t, \tau) \|$ $(i, k = 1, 2, 3)$ системы (3), удовлетворяющей условиям

$$W(\tau, \tau) = E, \qquad \| W(t, \tau) \leqslant B e^{\mu(t-\tau)} \tag{4}$$

Здесь E — единичная матрица, B — положительная постоянная, $\mu < 0$.

Вычисление фундаментальной матрицы решений системы (3), обращающейся при $t = \tau$ в единичную матрицу, не представляет трудностей. Очевидно, ее элементы

$$w_{1k} = \frac{1}{\Delta}\{\Delta_{1k} e^{\lambda(t-\tau)} + e^{a(t-\tau)}[\Delta_{2k}\cos b(t-\tau) + \Delta_{3k}\sin b(t-\tau)]\}$$

$$w_{2k} = \frac{dw_{1k}}{dt}, \qquad w_{3k} = \frac{d^2 w_{1k}}{dt^2}$$

где

$$\Delta_{11} = -\frac{b}{\lambda}, \qquad \Delta_{21} = b\lambda(\lambda - 2a), \qquad \Delta_{31} = \lambda(a^2 - b^2) - \lambda^2 a$$

$$\Delta_{12} = -2ab, \qquad \Delta_{22} = 2ab, \qquad \Delta_{32} = -a^2 + b^2 + \lambda^2$$

$$\Delta_{13} = b, \qquad \Delta_{23} = -b, \qquad \Delta_{33} = a - \lambda$$

Для того чтобы найти оценку нормы матрицы $\| W(t, \tau) \|$, определим норму любого вектора $X = (x, y, z)$ и норму матрицы соответственно

$$\| X \| = \max \ (| x |, | y |, | z |) \qquad \| W (t, \tau) \| = \max_{1 \leqslant i \leqslant 3} \sum_{k=1}^{3} | w_{ik} |$$

Легко показать, что в области D имеют место неравенства

$$\sum_{k=1}^{3} | w_{1k}(t, \tau) e^{-\mu (t-\tau)} | \leqslant \frac{M+N}{\Delta}$$

$$\sum_{k=1}^{3} | w_{2k} (t, \tau) e^{-\mu (t-\tau)} | \leqslant \frac{M+\sqrt{a^2+b^2}N}{\Delta} \tag{5}$$

$$\sum_{k=1}^{3} | w_{3k} (t, \tau) e^{-\mu (t-\tau)} | \leqslant \frac{M+(a^2+b^2)N}{\Delta}$$

Поэтому в качестве постоянной B, которая оценивает норму $\| W (t, \tau) e^{-\mu (t-\tau)} \|$ и фигурирует в условиях (4), следует взять число, определяемое равенством

$$B = \frac{M+N}{\Delta} \quad \text{при } a^2 + b^2 \leqslant 1, \qquad \frac{M+(a^2+b^2)N}{\Delta} \quad \text{при } a^2 + b^2 > 1$$

Следующим ограничением на систему (2), которое требуется для выполнения теоремы Е. А. Барбашина, является существование для функции $\varphi(x)$ постоянной Липшица L, удовлетворяющей соотношению $(-\mu - LB) > 0$.

В рассматриваемой области D для функции $\varphi (x) = x - \sin x$ постоянной Липшица, очевидно, является число

$$L = \frac{\varepsilon^2}{2} = \frac{-\mu}{B^\circ}$$

Легко видеть, что оно удовлетворяет неравенству (5). Для дальнейшего левую часть неравенства (5) обозначим через γ, тогда будем иметь

$$\gamma = -\mu \frac{B^\circ - B}{B^\circ} > 0$$

Изложенное позволяет заключить о выполнении условий теоремы Е.А.Барбашина [2]. Итак, для уравнения (1) может быть сформулирована следующая теорема.

Теорема. Предположим, что для системы (2) выполнены условия (4) и (5), а также одно из условий

$$(A) \qquad \sup_{0 \leqslant t \leqslant 2\pi} | e (t) | < \frac{\varepsilon\gamma}{2B^2}$$

$$(B) \qquad \int_0^{2\pi} | e (t) | \, dt < \frac{\varepsilon}{2B^2} e^{-2\pi\gamma}(1 - e^{-2\pi\gamma})$$

$$(C) \qquad \left(\int_0^{2\pi} e^2 (t) \, dt\right)^{\frac{1}{2}} < \frac{\varepsilon}{2B^2} \left(\frac{2\gamma}{e^{4\pi\gamma} - 1}\right)^{\frac{1}{2}} (1 - e^{-2\pi\gamma})$$

Пусть $\delta = \varepsilon / 2B$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1) Всякое решение $X(t)$ системы (2) такое, что $\| X (t_0) \| \leqslant \delta$ не выходит при $t \geqslant t_0$ из области D.

2) Существует число $T > t_0$ такое, что при $\| X (t_0) \| \leqslant \delta$ и $t > T$ имеет место неравенство $\| X (t) \| \leqslant \delta$.

3) В области D существует асимптотически устойчивая периодическая траектория, к которой притягиваются все другие траектории, выходящие при $t = t_0$ из области $\| X \| \leqslant \delta$.

Числа ε, B, γ указаны выше.

Поступила 5 VI 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Бакаев Ю. Н. Построение рабочих зон систем автоматического регулирования фазы. Изв. АН СССР, ОТН, Энергетика и автоматика, 1960, вып. 2.
2. Барбашин Е. А. О построении периодических движений. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 2.