ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ В ВИДЕ РЯДОВ ПО ДРОБНЫМ СТЕПЕНЯМ ПАРАМЕТРА

А. П. Проскуряков

(Москва)

Периодические решения квазилинейных систем обычно представляются рядами по целым степеням малого параметра [1,2]. В предлагаемой работе рассматриваются также решения в виде рядов по дробным степеням параметра.

1. Рассмотрим квазилинейную колебательную систему вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = \mu f(x, \dot{x}, \mu) \tag{1.1}$$

Функцию $f(x, \dot{x}, \mu)$ будем считать аналитической от своих аргументов в некоторой области их изменения. Параметр μ предполагается малым.

Так как система автономна, то решение порождающего уравнения ($\mu = 0$) будет

$$x_0(t) = A_0 \cos kt$$

Начальные условия для системы (1.1) примем в виде

$$x(0) = A_0 + \beta, \qquad \dot{x}(0) = 0 \tag{1.2}$$

где β — функция от μ, обращающаяся в нуль при $\mu = 0$.

Предположим, что область аналитичности функции $f(x, \dot{x}, \mu)$ содержит порождающее решение $x_0(t)$. На основании известных теорем [3] решение $x(t, \beta, \mu)$ уравнения (1.1) будет аналитической функцией от t, а при достаточно малых значениях параметра μ также от μ и β. Представим его решение в виде

$$x(t, \beta, \mu) = (A_0+\beta)\cos kt + \sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n(t) + \frac{\partial C_n(t)}{\partial A_0}\beta + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_n(t)}{\partial A_0^2}\beta^2 + \ldots\right]\mu^n \tag{1.3}$$

Введем обозначение

$$H_n(t) = \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{d^{n-1}f}{d\mu^{n-1}}\right)_{\beta=\mu=0}$$

причем $H_1(t) = f(x_0, \dot{x}_0, 0)$. Формулы для последующих трех величин $H_n(t)$ даны в работе [2].

Нетрудно видеть, что коэффициенты $C_n(t)$ определяются равенством

$$C_n(t) = \frac{1}{k}\int^{t} H_n(t_1)\sin k(t - t_1)\,dt_1 \tag{1.4}$$

Период колебаний автономных систем зависит от параметра μ и может быть представлен в виде суммы $T = T_0 + \alpha$, где $T_0 = 2\pi / k$, а α — некоторая функция от μ, обращающаяся в нуль при $\mu = 0$.

Условия периодичности для функции $x(t, \beta, \mu)$ и ее первой производной по t будут

$$x(T_0 + \alpha, \beta, \mu) = A_0 + \beta, \qquad \dot{x}(T_0 + \alpha, \beta, \mu) = 0 \tag{1.5}$$

Второе из этих равенств можно рассматривать как уравнение, определяющее α как неявную функцию β и μ. Так как

$$\ddot{x}(T_0, 0, 0) = -k^2A_0$$

то существует однозначная аналитическая функция $\alpha(\beta, \mu)$, если $A_0 \neq 0$.

Учитывая, что все частные производные от α по β равны нулю при $\mu = 0$, функцию $\alpha(\beta, \mu)$ можно представить в виде

$$\alpha(\beta, \mu) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(N_n + \frac{\partial N_n}{\partial A_0}\beta + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 N_n}{\partial A_0^2}\beta^2 + \ldots\right)\mu^n \tag{1.6}$$

Вычисляя, получаем

$$N_1 = \frac{1}{k^2 A_0} \dot{C}_1(T_0), \quad N_2 = \frac{1}{k^2 A_0} [\dot{C}_2(T_0) + N_1 \ddot{C}_1(T_0)]$$

$$N_3 = \frac{1}{k^2 A_0} \Big\{ \dot{C}_3(T_0) + N_2 \ddot{C}_1(T_0) + N_1 \ddot{C}_2(T_0) + \tag{1.7}$$

$$+ \frac{1}{2} N_1^2 \left[\dddot{C}_1(T_0) + \frac{1}{3} k^2 \dot{C}_1(T_0) \right] \Big\} \text{ и т. д.}$$

Подставляя в первое равенство (1.5) величину α из формулы (1.6), можно представить это равенство в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(M_n + \frac{\partial M_n}{\partial A_0} \beta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 M_n}{\partial A_0^2} \beta^2 + \ldots \right) \mu^n = 0 \tag{1.8}$$

Величины M_n при этом равны

$$M_1 = C_1(T_0), \qquad M_2 = C_2(T_0) + \frac{1}{2} N_1 \dot{C}_1(T_0)$$

$$M_3 = C_3(T_0) + N_2 \dot{C}_1(T_0) - \frac{1}{2} N_1^2 \ddot{C}_1(T_0) \tag{1.9}$$

$$M_4 = C_4(T_0) + N_3 \dot{C}_1(T_0) + \frac{1}{2} k^2 A_0 N_2^2 -$$

$$- N_1 \left[N_2 \ddot{C}_1(T_0) + \frac{1}{3} N_1^2 \dddot{C}_1(T_0) + \frac{1}{2} N_1 \ddot{C}_2(T_0) \right] \text{ и т. д.}$$

2. Равенство (1.8) можно рассматривать как уравнение, определяющее неявную функцию $\beta = \beta(\mu)$. Сокращая это уравнение на μ и учитывая, что $\beta(0) = 0$, получаем

$$M_1 = C_1(T_0) = 0 \tag{2.1}$$

Предположим, что $C_1(T_0)$ не равно нулю тождественно. Тогда равенство (2.1) будет уравнением амплитуд A_0, порождающего решения.

Если бы $C_1(T_0) \equiv 0$, то все производные от $C_1(T_0)$ по A_0 также были бы равны нулю. Тогда в качестве амплитудного уравнения служило бы уравнение $M_2 = 0$ при условии, что M_2 не равно нулю тождественно, и т. д.

Напишем уравнение (1.8) в развернутом виде, группируя входящие в него члены в виде однородных многочленов относительно β и μ

$$\Phi(\beta, \mu) = \frac{\partial C_1}{\partial A_0} \beta + M_2 \mu + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_1}{\partial A_0} \beta^2 + \frac{\partial M_2}{\partial A_0} \beta \mu + M_3 \mu^2 +$$

$$+ \frac{1}{6} \frac{\partial^3 C_1}{\partial A_0^3} \beta^3 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 M_2}{\partial A_0^2} \beta^2 \mu + \frac{\partial M_3}{\partial A_0} \beta \mu^2 + M_4 \mu^3 + \ldots = 0 \tag{2.2}$$

Имеем при $\mu = 0$

$$\Phi(\beta, 0) = \frac{\partial C_1}{\partial A_0} \beta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_1}{\partial A_0^2} \beta^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 C_1}{\partial A_0^3} \beta^3 + \ldots$$

Согласно теореме Вейерштрасса о неявных функциях [3,4], число корней уравнения (2.2), т. е. число неявных функций $\beta(\mu)$, определяемых этим уравнением, равно наименьшему показателю в разложении $\Phi(\beta, 0)$ по степеням β.

Следовательно, в данном случае указанное число корней $\beta(\mu)$ равно кратности корня амплитудного уравнения (2.1).

Пусть кратность рассматриваемого корня A_0 равна m. Тогда при принятых допущениях все m корней уравнения (2.2) разлагаются в сходящиеся ряды вида

$$\beta = \sum_{n=1}^{\infty} A_{n/k} \mu^{n/k} \tag{2.3}$$

где k может равняться любому целому числу от 1 до m включительно. При этом могут существовать одновременно разложения $\beta(\mu)$ по различным дробным степеням параметра μ, но сумма различных k не может превышать числа m.

Рассмотрим некоторые наиболее простые случаи.

1°. Величина A_0 является простым корнем уравнения (2.1). В этом случае, как известно, существует единственное разложение вида (2.3) при $k = 1$.

Введем обозначения

$$P_n(A_1) = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n C_1}{\partial A_0^n} A_1^n + \frac{1}{(n-1)!}\frac{\partial^{n-1} M_2}{\partial A_0^{n-1}} A_1^{n-1} + \ldots + M_{n+1}$$

$$Q_n(A_2) = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n P_2}{\partial A_1^n} A_2^n + \frac{1}{(n-1)!}\frac{\partial^{n-1} P_3}{\partial A_1^{n-1}} A_2^{n-1} + \ldots + P_{n+2} \tag{2.4}$$

Коэффициенты A_n определяются из бесконечной системы линейных уравнений

$$P_1(A_1) = \frac{\partial C_1}{\partial A_0} A_1 + M_2 = 0, \qquad \frac{\partial C_1}{\partial A_0} A_2 + P_2 = 0$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial A_0} A_3 + \frac{\partial P_2}{\partial A_1} A_2 + P_3 = 0 \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial A_0} A_4 + \frac{\partial P_2}{\partial A_1} A_3 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_1}{\partial A_0^2} A_2^2 + \frac{\partial P_3}{\partial A_1} A_2 + P_4 = 0 \qquad \text{и т. д.}$$

2°. Величина A_0 является двукратным корнем уравнения (2.1). Тогда

$$\frac{\partial C_1}{\partial A_0} = 0, \qquad \frac{\partial^2 C_1}{\partial A_0^2} \neq 0$$

Уравнение (2.2) имеет в этом случае два корня $\beta = \beta(\mu)$. При этом сумма знаменателей в показателях у μ в различного вида разложениях в каждом рассматриваемом случае не должна превышать двух. Поэтому возможны два вида разложений: или по целым степеням μ, или по степеням $\mu^{1/2}$.

2°. 1. Если $M_2 \neq 0$, то разложение β будет иметь вид (2.3) при $k = 2$. Введем обозначение

$$S_n(A_{1/2}) = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n C_1}{\partial A_0^n} A_{1/2}^n + \frac{1}{(n-2)!}\frac{\partial^{n-2} M_2}{\partial A_0^{n-2}} A_{1/2}^{n-2} + \ldots \tag{2.6}$$

Имеем уравнения для определения коэффициентов $A_{n/2}$

$$S_2(A_{1/2}) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_1}{\partial A_0^2} A_{1/2}^2 + M_2 = 0, \qquad \frac{\partial S_2}{\partial A_{1/2}} A_1 + S_3 = 0$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial A_{1/2}} A_{3/2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 S_2}{\partial A_{1/2}^2} A_1^2 + \frac{\partial S_3}{\partial A_{1/2}} A_1 + S_4 = 0$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial A_{1/2}} A_2 + \left(\frac{\partial^2 S_2}{\partial A_{1/2}^2} A_1 + \frac{\partial S_3}{\partial A_{1/2}}\right) A_{3/2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 S_3}{\partial A_{1/2}^2} A_1^2 + \frac{\partial S_4}{\partial A_{1/2}} A_1 + S_5 = 0 \qquad \text{и т. д.}$$

Если корни первого из этих уравнений вещественны, то имеем два разложения для β, причем остальные коэффициенты $A_{n/2}$ последовательно определяются из бесконечной системы линейных уравнений.

2°. 2. Если $M_2 = 0$, то $A_{1/2} = 0$, а коэффициент A_1 определяется из квадратного уравнения

$$P_2(A_1) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_1}{\partial A_0^2} A_1^2 + \frac{\partial M_2}{\partial A_0} A_1 + M_3 = 0 \tag{2.7}$$

Для дальнейшего анализа преобразуем равенство (2.2), используя подстановку

$$\beta = (\gamma + A_1)\mu \tag{2.8}$$

Учитывая (2.7), получим после сокращения на μ^2

$$\frac{\partial P_2}{\partial A_1}\gamma + P_3\mu + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_1}{\partial A_0^2}\gamma^2 + \frac{\partial P_3}{\partial A_1}\gamma\mu + P_4\mu^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P_3}{\partial A_1^2}\gamma^2\mu + \frac{\partial P_4}{\partial A_1}\gamma\mu^2 + P_5\mu^3 + \ldots = 0 \tag{2.9}$$

а) Корни уравнения (2.7) простые. Тогда имеет место разложение (2.3) при $k = 1$. Коэффициенты A_n находятся из системы уравнений (2.5).

б) Корни уравнения (2.7) кратные, но $P_3 \neq 0$. Имеем разложения вида (2.3) при $k = 2$. Уравнения для коэффициентов $A_{n/2}$ будут

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_1}{\partial A_0^2}A_{3/2}^2 + P_3 = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 C_1}{\partial A_0^2}A_2 + \frac{\partial P_3}{\partial A_1}\right)A_{3/2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 C_1}{\partial A_0^2}A_{3/2}A_{5/2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P_3}{\partial A_1^2}A_{3/2}^2 + Q_2 = 0 \qquad \text{и т. д.}$$

в) Корни уравнения (2.7) кратные и $P_3 = 0$. Тогда $A_{3/2} = 0$, а коэффициент A_2 определяется из квадратного уравнения

$$Q_2(A_2) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_1}{\partial A_0^2}A_2^2 + \frac{\partial P_3}{\partial A_1}A_2 + P_4 = 0 \qquad (2.10)$$

Последующий анализ связан с кратностью корней уравнения (2.10) и совершенно аналогичен предыдущему. Если корни простые, то имеет место разложение (2.3) при $k = 1$. Если же корни кратные, но $Q_3 \neq 0$, то получим разложение вида (2.3) при $k = 2$. В случае кратных корней и $Q_3 = 0$ анализ сведется к рассмотрению корней квадратного уравнения для A_3 и т. д.

Формулы значительно упрощаются, если некоторые члены в уравнении (2.2) окажутся равными нулю. Например, при $M_3 = 0$ один из корней уравнения (2.7) обратится в нуль. При $M_3 = 0$ и $\partial M_2 / \partial A_0 = 0$ уравнение (2.7) имеет двойной корень $A_1 = 0$ и т. д.

3°. Величина A_0 является трехкратным корнем уравнения (2.1)

$$\frac{\partial C_1}{\partial A_0} = \frac{\partial^2 C_1}{\partial A_0^2} = 0, \qquad \frac{\partial^3 C_1}{\partial A_0^3} \neq 0$$

В этом случае уравнение (2.2) имеет три корня $\beta = \beta(\mu)$. Возможны разложения β по степеням μ, $\mu^{1/2}$ и $\mu^{1/3}$. Учитывая, что сумма знаменателей в показателях у μ не должна превышать трех в каждом рассматриваемом случае, возможно одновременное существование разложений по μ и $\mu^{1/2}$.

3°. 1. Если $M_2 \neq 0$, то разложение для β будет иметь вид (2.3) при $k = 3$ Введем обозначение

$$U_n(A_{1/3}) = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n C_1}{\partial A_0^n}A_{1/3}^n + \frac{1}{(n-3)!}\frac{\partial^{n-3} M_2}{\partial A_0^{n-3}}A_{1/3}^{n-3} + \ldots \qquad (2.11)$$

Имеем уравнения для коэффициентов $A_{n/3}$

$$U_3(A_{1/3}) = \frac{1}{6}\frac{\partial^3 C_1}{\partial A_0^3}A_{1/3}^3 + M_2 = 0$$

$$\frac{\partial U_3}{\partial A_{1/3}}A_{2/3} + U_4 = 0$$

$$\frac{\partial U_3}{\partial A_{1/3}}A_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U_3}{\partial A_{1/3}^2}A_{2/3}^3 + \frac{\partial U_4}{\partial A_{1/3}}A_{2/3} + U_5 = 0$$

$$\frac{\partial U_3}{\partial A_{1/3}}A_{4/3} + \frac{\partial U_4}{\partial A_{1/3}}A_1 + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 U_3}{\partial A_{1/3}^3}A_{2/3}^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U_4}{\partial A_{1/3}^2}A_{2/3}^2 + \frac{\partial U_5}{\partial A_{1/3}}A_{2/3} + U_6 = 0 \quad \text{и т. д.}$$

Так как первое из этих уравнений определяет только одно вещественное значение $A_{1/3}$, а уравнения для последующих коэффициентов являются линейными, то существует только одно разложение для β с вещественными коэффициентами. В дальнейшем это будет всякий раз, когда один из коэффициентов $A_{n/3}$ определяется из двучленного кубического уравнения.

3°. 2. Пусть $M_2 = 0$, но $\partial M_2 / \partial A_0 \neq 0$. Будем искать разложение β в виде (2.3) при $k = 2$. Получим систему уравнений для коэффициентов $A_{n/2}$

$$S_3(A_{1/2}) = \left(\frac{1}{6}\frac{\partial^3 C_1}{\partial A_0^3}A_{1/2}^2 + \frac{\partial M_2}{\partial A_0}\right)A_{1/2} = 0, \qquad \frac{\partial S_3}{\partial A_{1/2}}A_1 + S_4 = 0$$

$$\frac{\partial S_3}{\partial A_{1/2}}A_{3/2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 S_3}{\partial A_{1/2}^2}A_1^2 + \frac{\partial S_4}{\partial A_{1/2}}A_1 + S_5 = 0 \qquad \text{и т. д.}$$

Первое уравнение имеет два неравных нулю корня и один нулевой корень. Первым корням соответствует разложение β вида (2.3) при $k = 2$. Корню $A_{1/2} = 0$ отвечает разложение вида (2.3) при $k = 1$, а коэффициенты A_n определяются из системы уравнений (2.5).

3°. 3. Пусть $M_2 = 0$, $\partial M_2 / \partial A_0 = 0$, но $M_3 \neq 0$. В этом случае разложение β будет иметь вид (2.3) при $k = 3$, но начинаться с члена, содержащего $\mu^{2/3}$. Уравнения для коэффициентов $A_{n/3}$ будут

$$\frac{1}{6}\frac{\partial^3 C_1}{\partial A_0^3}A_{2/3}^3 + M_3 = 0, \qquad \left(\frac{\partial^3 C_1}{\partial A_0^3}A_1 + \frac{\partial^2 M_2}{\partial A_0^2}\right)A_{2/3} = 0$$

$$\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^3 C_1}{\partial A_0^3}A_{2/3}A_{4/3} + \frac{\partial P_3}{\partial A_1} + \frac{1}{24}\frac{\partial^4 C_1}{\partial A_0^4}A_{2/3}^3\right)A_{2/3} = 0 \qquad \text{и т. д.}$$

3°. 4. Пусть $M_2 = 0$, $\partial M_2 / \partial A_0 = 0$, $M_3 = 0$. В этом случае коэффициент A_1 определяется из кубического уравнения

$$P_3(A_1) = \frac{1}{6}\frac{\partial^3 C_1}{\partial A_0^3}A_1^3 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 M_2}{\partial A_0^2}A_1^2 + \frac{\partial M_3}{\partial A_0}A_1 + M_4 = 0 \tag{2.12}$$

Преобразуем равенство (2.2), используя подстановку (2.8). После сокращения на μ^3 получим

$$\begin{aligned}&\frac{\partial P_3}{\partial A_1}\gamma + P_4\mu + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P_3}{\partial A_1^2}\gamma^2 + \frac{\partial P_4}{\partial A_1}\gamma\mu + P_5\mu^2 + \\ &+ \frac{1}{6}\frac{\partial^3 P_3}{\partial A_1^3}\gamma^3 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P_4}{\partial A_1^2}\gamma^2\mu + \frac{\partial P_5}{\partial A_1}\gamma\mu^2 + P_6\mu^3 + \ldots = 0\end{aligned} \tag{2.13}$$

Если корни уравнения (2.12) простые, то разложение для β будет иметь вид (2.3) при $k = 1$. Уравнения для последующих коэффициентов A_n будут

$$\frac{\partial P_3}{\partial A_1}A_2 + P_4 = 0, \qquad \frac{\partial P_3}{\partial A_1}A_3 + Q_3 = 0 \qquad \text{и т. д.}$$

В зависимости от числа вещественных корней уравнения (2.12) в данном случае существуют или одно, или три разложения для β с вещественными коэффициентами.

3°. 5. а) Пусть среди корней уравнения (2.12) имеется двукратный корень

$$\frac{\partial P_3}{\partial A_1} = 0, \qquad P_4 \neq 0$$

Для этого корня разложение β будет иметь вид (2.3) при $k = 2$. Уравнения для коэффициентов $A_{n/2}$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 P_3}{\partial A_1^2}A_{3/2}^2 + P_4 = 0, \qquad \left(\frac{\partial^2 P_3}{\partial A_1^2}A_2 + \frac{\partial P_4}{\partial A_1} + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 C_1}{\partial A_0^3}A_{3/2}^2\right)A_{3/2} = 0 \qquad \text{и т. д.}$$

Если первое из этих уравнений имеет вещественные корни, то для β в этом случае будут существовать три разложения вида (2.3): одно при $k = 1$ и два при $k = 2$.

б) Если в предыдущем случае $P_4 = 0$, то коэффициент A_2 определяется из квадратного уравнения

$$Q_3(A_2) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P_3}{\partial A_1^2}A_2^2 + \frac{\partial P_4}{\partial A_1}A_2 + P_5 = 0 \tag{2.14}$$

Вид разложений для β зависит от кратности корней этого уравнения. Анализ возможных случаев аналогичен такому же анализу в случае 2°.

3°. 6. а) Пусть, наконец, корни уравнения (2.12) трехкратные

$$\frac{\partial P_3}{\partial A_1} = \frac{\partial^2 P_3}{\partial A_1^2} = 0, \qquad P_4 \neq 0$$

Разложение для β имеет вид (2.3) при $k = 3$. Уравнения для коэффициентов A_n,

$$\frac{1}{6}\frac{\partial^3 C_1}{\partial A_0^3} A_{4/3}^3 + P_4 = 0$$

$$\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^3 C_1}{\partial A_0^3} A_{4/3} A_{5/3} + \frac{\partial P_4}{\partial A_1}\right) A_{4/3} = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^3 C_1}{\partial A_0^3}(A_{4/3}^2 A_2 + A_{5/3}^2 A_{4/3}) + \frac{\partial P_4}{\partial A_1} A_{5/3} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P_4}{\partial A_1^2} A_{4/3}^2 = 0 \qquad \text{и т. д.}$$

б) Если в предыдущем случае $P_4 = 0$, но $\partial P / \partial A_1 \neq 0$, то имеем разложение для β вида (2.3) при $k = 2$. Уравнение для коэффициента $A_{3/2}$

$$\left(\frac{1}{6}\frac{\partial^3 C_1}{\partial A_0^3} A_{3/2}^2 + \frac{\partial P_4}{\partial A_1}\right) A_{3/2} = 0$$

Для неравных нулю вещественных корней этого уравнения имеем

$$\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^3 C_1}{\partial A_0^3} A_{3/2}^2 + \frac{\partial P_4}{\partial A_1}\right) A_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P_4}{\partial A_1^2} A_{3/2}^2 + P_5 = 0 \text{ и т. д.}$$

Для нулевого корня $A_{3/2} = 0$ получаем разложение вида (2.3) при $k = 1$. Уравнения для коэффициентов A_n будут

$$\frac{\partial P_4}{\partial A_1} A_2 + P_5 = 0, \qquad \frac{\partial P_4}{\partial A_1} A_3 + Q_4 = 0$$

$$\frac{\partial P_4}{\partial A_1} A_4 + \frac{\partial Q_4}{\partial A_2} A_3 + Q_5 = 0 \text{ и т. д.}$$

в) Корни трехкратные, а $P_4 = 0$, $\partial P_4 / \partial A_1 = 0$, $P_5 \neq 0$. Имеем разложение для β вида (2.3) при $k = 3$. При этом $A_{4/3} = 0$. Дальнейшие уравнения для коэффициентов $A_{n/3}$.

$$\frac{1}{6}\frac{\partial^3 C_1}{\partial A_0^3} A_{5/3}^3 + P_5 = 0, \qquad \left(\frac{\partial^3 C_1}{\partial A_0^3} A_2 + \frac{\partial^2 P_4}{\partial A_1^2}\right) A_{5/3}^2 = 0 \quad \text{и т. д.}$$

г) Корни трехкратные, а $P_4 = 0$, $\partial P_4 / \partial A_1 = 0$, $P_5 = 0$. В этом случае коэффициент A_2 определяется из кубического уравнения

$$Q_4(A_2) = \frac{1}{6}\frac{\partial^3 P_3}{\partial A_1^3} A_2^3 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P_4}{\partial A_1^2} A_2^2 + \frac{\partial P_5}{\partial A_1} A_2 + P_6 = 0 \tag{2.15}$$

Дальнейший анализ связан с кратностью корней этого уравнения и совершенно аналогичен предыдущему.

Случаи, когда величина A_0 является кратным корнем уравнения (2.1) с кратностью выше третьей, в работе не рассматриваются.

Из предыдущего следует, что кратность корня амплитудного уравнения (2.1) отвечает явлению бифуркации порождающего решения. Эта бифуркация не будет существовать в действительности, если только один корень $\beta = \beta(\mu)$ является вещественным или если все корни равные. В последнем случае разложение β (μ) будет иметь вид (2.3) при $k = 1$.

3. Легко видеть, что вид разложения периода решения уравнения (1.1), а также самого решения соответствует виду разложения β (μ).

Рассмотрим сначала случай, когда разложение для β имеет вид (2.3) при $k = 2$. Тогда

$$\alpha = T_0 \sum_{n=1}^{\infty} h_{n/2} \mu^{n/2} \tag{3.1}$$

Имеем формулы для коэффициентов $h_{n/2}$

$$h_{1/2} = 0, \qquad h_1 = \frac{1}{T_0} N_1, \qquad h_{3/2} = \frac{1}{T_0}\frac{\partial N_1}{\partial A_0} A_{1/2}$$

$$h_2 = \frac{1}{T_0}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 N_1}{\partial A_0^2} A_{1/2}^2 + \frac{\partial N_1}{\partial A_0} A_1 + N_2\right) \quad \text{и т. д.} \tag{3.2}$$

Для построения периодического решения уравнения (1,1) с постоянным периодом сделаем замену переменного

$$t = \frac{\tau}{k}\,(1 + h_1\mu + h_{3/2}\mu^{3/2} + h_2\mu^2 + \ldots)$$

Тогда получим решение в виде ряда по степеням $\mu^{1/2}$

$$x(\tau) = x_0(\tau) + \mu^{1/2}x_{1/2}(\tau) + \mu x_1(\tau) + \mu^{3/2}x_{3/2}(\tau) + \ldots \tag{3.3}$$

коэффициенты которого имеют постоянный период, равный 2π. Эти коэффициенты равны

$$x_0(\tau) = A_0\cos\tau, \qquad x_{1/2}(\tau) = A_{1/2}\cos\tau, \qquad x_1(\tau) = A_1\cos\tau + C_1(\tau) - h_1A_0\tau\sin\tau \tag{3.4}$$

$$x_{3/2}(\tau) = A_{3/2}\cos\tau + A_{1/2}\frac{\partial C_1(\tau)}{\partial A_0} - (h_{3/2}A_0 + h_1A_{1/2})\,\tau\sin\tau$$

$$x_2(\tau) = A_2\cos\tau + C_2(\tau) + A_1\frac{\partial C_1(\tau)}{\partial A_0} + \frac{1}{2}A_{1/2}{}^2\frac{\partial^2 C_1(\tau)}{\partial A_0{}^2} + - h_1\tau\frac{\partial C_1(\tau)}{\partial\tau} -$$
$$- (h_2A_0 + h_{3/2}A_{1/2} + h_1A_1)\,\tau\sin\tau - \frac{1}{2}h_1{}^2A_0\tau^2\cos\tau \quad \text{и т. д.}$$

В этих формулах принято, что $C_n(\tau / k) = C^*{}_n(\tau)$, а затем значок* опущен. Для случая, когда разложение $\beta(\mu)$ имеет вид (2.3) при $k = 3$, получим

$$h_{1/3} = 0, \qquad h_{2/3} = 0, \qquad h_1 = \frac{1}{T_0}N_1$$

$$h_{4/3} = \frac{1}{T_0}\frac{\partial N_1}{\partial A_0}A_{1/3}, \qquad h_{5/3} = \frac{1}{T_0}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 N_1}{\partial A_0^2}A_{1/3}{}^2 + \frac{\partial N_1}{\partial A_0}A_{2/3}\right) \tag{3.5}$$

$$h_2 = \frac{1}{T_0}\left(\frac{1}{6}\frac{\partial^3 N_1}{\partial A_0^3}A_{1/3}{}^3 + \frac{\partial^2 N_1}{\partial A_0^2}A_{1/3}A_{2/3} + \frac{\partial N_1}{\partial A_0}A_1 + N_2\right) \quad \text{и т. д.}$$

В этом случае разложение решения (1.1) после соответствующей замены переменного имеет вид

$$x(\tau) = x_0(\tau) + \mu^{1/3}x_{1/3}(\tau) + \mu^{2/3}x_{2/3}(\tau) + \mu x_1(\tau) + \ldots \tag{3.6}$$

Первые коэффициенты этого разложения равны

$$x_0(\tau) = A_0\cos\tau, \qquad x_{1/3}(\tau) = A_{1/3}\cos\tau, \qquad x_{2/3}(\tau) = A_{2/3}\cos\tau$$

$$x_1(\tau) = A_1\cos\tau + C_1(\tau) - h_1A_0\,\tau\sin\tau$$

$$x_{4/3}(\tau) = A_{4/3}\cos\tau + A_{1/3}\frac{\partial C_1(\tau)}{\partial A_0} - (h_{4/3}A_0 + h_1A_{1/3})\,\tau\sin\tau$$

$$x_{5/3}(\tau) = A_{5/3}\cos\tau + A_{2/3}\frac{\partial C_1(\tau)}{\partial A_0} + \frac{1}{2}A_{1/3}{}^2\frac{\partial^2 C_1(\tau)}{\partial A_0{}^2} -$$
$$- (h_{5/3}A_0 + h_{4/3}A_{1/3} + h_1A_{2/3})\,\tau\sin\tau$$

$$x_2(\tau) = A_2\cos\tau + C_2(\tau) + A_1\frac{\partial C_1(\tau)}{\partial A_0} + A_{1/3}A_{2/3}\frac{\partial^2 C_1(\tau)}{\partial A_0{}^2} + h_1\tau\frac{\partial C_1(\tau)}{\partial\tau} -$$
$$- (h_2A_0 + h_{5/3}A_{1/3} + h_{4/3}A_{2/3} + h_1A_1)\,\tau\sin\tau - \frac{1}{2}h_1{}^2A_0\tau^2\cos\tau \tag{3.7}$$

Для случая разложения β по целым степеням параметра μ соответствующие формулы получатся, если в формулах одного из предшествующих случаев приравнять нулю все коэффициенты $A_{n/k}$ и $h_{n/k}$, у которых индексы не равны целому числу.

Вопрос о радиусе сходимости полученных рядов в работе не рассматривается.

Поступила 8 VI 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. Гостехиздат, 1956.
2. Проскуряков А. П. Построение периодических решений автономных систем с одной степенью свободы в случае произвольных вещественных корней уравнения основных амплитуд. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 4.
3. Гурса Э. Курс математического анализа. т. I, II, III, ОНТИ, 1936.
4. Еругин Н. П. Неявные функции. Изд-во ЛГУ, 1956.