ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ОПТИМИЗАЦИИ СЛЕДЯЩИХ СИСТЕМ

Л. С. Гноенский

(Москва)

1. Рассматривается следящая система, описываемая линейным дифференциальным уравнением $L_n(y) = f(t)$ порядка n. Относительно задающего воздействия $f(t)$, которое должна отрабатывать следящая система, известно лишь, что оно принадлежит к классу F p-раз дифференцируемых функций таких, что $|f^{(p)}(t)| \leqslant M_p$. Ограничения по модулю могут накладываться и на другие производные от $f(t)$ и на функцию $f(t)$.

Показателем качества следящей системы будет величина модуля рассогласования $y(t) - f(t)$ на интересующем интервале времени $[0, T]$.

Иногда имеется возможность для измерения текущих значений первых k производных от $f(t)$.

Предполагается, что поступающая на вход следящей системы функция $f(t)$ отфильтрована от высокочастотных шумов и помех. В этом случае для улучшения качества работы следящей системы можно на вход системы вместе с $f(t)$ подавать и линейную комбинацию

$$c_1(t) f'(t) + c_2(t) f''(t) + \ldots + c_k(t) f^{(k)}(t)$$

где $c_i(t)$ принадлежит классу A_i-функций. Классы A_i-функций определяются возможностью и простотой их технической реализации.

Таким образом, описываемая система имеет вид

$$L_n(y) \equiv a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(t) +$$

$$+ c_1(t) f'(t) + c_2(t) f''(t) + c_k(t) f^{(k)}(t) \qquad (1.1)$$

$$f(t) \in F, \qquad c_i(t) \in A_i \ (i = 1, \ldots, k), \qquad t \in [0, T] \qquad (1.2)$$

$$y(0) = y'(0) = \ldots = y^{(n-1)}(0) = 0, \qquad f(0) = f'(0) = \ldots f^{(p-1)}(0) = 0 \qquad (1.3)$$

Ее решение

$$y(t) = Y(t, f(\tau), c(\tau)) \qquad (1.4)$$

где $c(t)$ — вектор-функция с координатами $c_1(t), \ldots, c_k(t)$ можно рассматривать как функционал.

Сформулируем теперь рассматриваемую задачу. Требуется найти такие функции $c_i(t)$ $(i = 1, \ldots, k)$, на которых реализуется величина

$$E = \min_c \max_{t,f} |Y(t, f, c) - f(t)| \qquad (1.5)$$

или

$$I = \min_c \max_f |Y(T, f, c) - f(T)| \qquad (1.6)$$

Здесь t, $c(t)$, $f(t)$ выбираются из (1.2); имеются в виду абсолютные максимумы и минимумы. Вообще говоря I меньше E, поэтому иногда возникает необходимость в создании систем, которые реализуют (1.6), а не (1.5). Заметим, что измерение производных от функции $f(t)$ связано с техническими трудностями и эти трудности увеличиваются с ростом порядка измеряемых производных. Желательно поэтому получить приемлемые значения величин E или I, используя наименьшее число производных от $f(t)$. В определенной степени этого можно добиться путем расширения классов A_i, в пределах, конечно, возможности их технической осуществимости.

Подобные задачи возникают и при создании систем, инвариантных по отношению к возмущениям на конечном интервале времени или в фиксированный момент времени.

В последующих пунктах для некоторых классов A_i и F рассматриваются поставленные выше и некоторые другие задачи.

2. В этом пункте предполагается, что

$$c_i(t) = c_i, \qquad |c_i| \leqslant m_i, \qquad (i = 1 \ldots, k), \qquad |f^{(p)}(t)| \leqslant M_p, \qquad t \in [0, T] \qquad (2.1)$$

Учитывая первое из равенств (1.3), решение уравнения (1.1) можно представить в виде

$$y(t) \equiv Y(t, f, c) = \int_0^t K(t-\tau)\left(f(\tau) + \sum_{i=1}^k c_i f^{(i)}(\tau)\right) d\tau \tag{2.2}$$

В силу второй группы равенств (1.3) выполняется соотношение

$$f^{(i)}(\tau) = \int_0^\tau f^{(p)}(u) \frac{(\tau-u)^{p-i-1}}{(p-i-1)!} du \qquad (i = 0, 1, \ldots, l), \quad l = \min(k, p-1) \tag{2.3}$$

Подставив (2.3) в (2.2) и поменяв пределы интегрирования в полученных повторных интегралах, имеем

$$y(t) - f(t) = \int_0^t \left[K_0(t-\tau) + \sum_{i=1}^k c_i K_i(t-\tau)\right] f^{(p)}(\tau)\, d\tau$$

Здесь

$$K_0(t-\tau) = \int_\tau^t \frac{K(t-u)(u-\tau)^{p-1}}{(p-1)!} du - \frac{(t-\tau)^{p-1}}{(p-1)!}$$

$$K_i(t-\tau) = \int_\tau^t \frac{K(t-u)(u-\tau)^{p-i-1}}{(p-i-1)!} du \qquad (i = 1, \ldots, l)$$

Если $k = p$, то $K_p(t-\tau) = K(t-\tau)$. Так как $f^{(p)}(\tau)$ удовлетворяет (2.1), то [1]

$$A(c, t) = \max_f |Y(t, f, c) - f(t)| = M_p \int_0^t \left| K_0(t-\tau) + \sum_{i=1}^k c_i K_i(t-\tau) \right| d\tau \tag{2.4}$$

Отсюда следует, что $A(c, t_2) > A(c, t_1)$ при $t_2 > t_1$ и, следовательно,

$$A^*(c) = \max_t A(c, t) = M_p \int_0^T \left| K_0(T-\tau) + \sum_{i=1}^k c_i K_i(T-\tau) \right| d\tau$$

Таким образом, в данном случае $E = I$, и для того, чтобы найти $c_1, \ldots, c_k$, на которых достигается E, нужно минимизировать выражение

$$\int_0^T \left| K(T-\tau) + \sum_{i=1}^k c_i K_i(T-\tau) \right| d\tau \equiv \int_0^T |\varphi(\tau)|\, d\tau$$

Величина E может достигаться либо на внутренних точках k-мерного параллелепипеда V в пространстве с координатами $c_1, \ldots, c_k$ определяемого соотношениями (2.1), либо на точках, принадлежащих его границам. Необходимым условием существования минимума во внутренней точке V являются равенства

$$\frac{\partial A^*}{\partial c_1} = \frac{\partial A^*}{\partial c_2} = \ldots = \frac{\partial A^*}{\partial c_k} = 0 \tag{2.5}$$

Можно показать, что

$$\frac{\partial A^*}{\partial c_i} = M_p \int_0^T K_i(T-\tau) \operatorname{sign}\left[K_0(T-\tau) + \sum_{j=1}^k c_j K_j(T-\tau)\right] d\tau \tag{2.6}$$

Таким образом, для того чтобы во внутренней точке $c\,(c_1, \ldots, c_k)$ параллелепипеда V реализовалась (1.5), необходимо, чтобы в этой точке удовлетворялась система уравнений относительно $c_1, \ldots, c_k$

$$\int_0^T K_i(T-\tau) \operatorname{sign}\left[K_0(T-\tau) + \sum_{j=1}^k c_j K_j(T-\tau)\right] d\tau = 0 \qquad (i = 1, \ldots, k) \tag{2.7}$$

Если точка c расположена на грани V_t параллелепипеда V, на которой координаты с индексами $i_1, \ldots, i_d$ принимают свои предельные значения, то надо из системы (2.7) вычеркнуть уравнения с соответствующими индексами, а в оставшихся вместо c_{i_1}, $c_{i_2}, \ldots, c_{i_d}$ подставить их значение на этой грани. Условие (1.5) может реализоваться на какой-либо из вершин V. Так как в рассматриваемой задаче k не может быть велико, то просчет 2^k значений $A^*(c)$ может быть проведен с помощью цифровых вычислительных машин.

3. Рассмотрим уравнение

$$L(y) = f(t) + c(t) f'(t), \quad |f'(t)| \leqslant M_1, \quad |c(t)| \leqslant m \tag{3.1}$$

Требуется найти $c(t)$, на которой реализуется (1.6). Представив решение уравнения (3.1) винтегральной форме и проделав преобразования, аналогичные проведенным в п. 2, получаем

$$\mathrm{Y}(T, f, c) - f(T) = \int_0^T [K_0(T-\tau) + c(\tau) K(T-\tau)] f'(\tau)\, d\tau$$

$$K_0(T-\tau) = \int_\tau^T K(T-\tau)\, d\tau - 1$$

Отсюда сразу следует, что

$$A(c) = \max_f |\mathrm{Y}(T, f, c) - f(T)| = M_1 \int_0^T |K_0(T-\tau) + c(\tau) K(T-\tau)|\, d\tau$$

Очевидно, что для того чтобы минимизировать $A(c)$, необходимо и достаточно минимизировать значение подынтегральной функции при любом значении τ из $[0, T]$. Поэтому $c(t)$, на которой реализуется I, имеет вид

$$c(\tau) = -\frac{K_0(T-\tau)}{K(T-\tau)} \quad \text{при} \quad \left|\frac{K_0(T-\tau)}{K(T-\tau)}\right| \leqslant m$$

$$c(\tau) = -m \operatorname{sign} \frac{K_0(T-\tau)}{K(T-\tau)} \quad \text{при} \quad \left|\frac{K_0(T-\tau)}{K(T-\tau)}\right| > m$$

Если для всех $\tau \subset [0, T]$ выполняется первое из приведенных равенств, то $I = 0$, т. е. для всех $f(t)$, удовлетворяющих (3.1), в момент времени T рассогласование $Y(T, f, c) - f(T) = 0$

4. Пусть

$$L(y) = f(t) + \sum_{i=1}^k c_i(t) f^{(i)}(t), \qquad |f^{(p)}(t)| \leqslant M_p \tag{4.1}$$

$$c_i(t) = c_{ij} \quad \text{при} \quad t \in [t_j, t_{j+1}), \qquad (j = 0, \ldots, r), \qquad t_0 = 0,\ t_{r+1} = T, |c_{ij}| \leqslant m_j \tag{4.2}$$

Требуется найти $ci(t)$, на которых реализуется I. Покажем, что эта задача сводится к задаче, рассмотренной в п. 2. Учитывая (4.1) и (4.2), можно получить

$$Y(T, f, c) - f(T) = \sum_{j=0}^r \Big\{ \int_{t_j}^{t_{j+1}} K(T-\tau) \Big[f(\tau) + {} $$

$$+ \sum_{i=1}^k c_{ij} f^{(i)}(\tau) \Big] - \frac{(T-\tau)^{p-1}}{(p-1)!} f^{(p)}(\tau)\, d\tau \Big\}$$

Заметим, что

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} K(T-\tau) f^{(i)}(\tau)\, d\tau = \int_0^T K_{ij}(u) f^{(p)}(u)\, du, \qquad (i = 1, \ldots, l), \qquad l = \min(k.\, p-1)$$

Здесь

$$K_{ij}(u) = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{K(T-\tau)(\tau-u)^{p-i-1}}{(p-i-1)!}\, d\tau \quad \text{при } u \in [0, t_j]$$

$$K_{ij}(u) = \int_{u}^{t_{j+1}} \frac{K(T-\tau)(\tau-u)^{p-i-1}}{(p-i-1)!}\, d\tau \quad \text{при } u \in (t_j, t_{j+1}]$$

$$K_{ij}(u) = 0 \text{ при } u \in (t_{j+1}, T]$$

Положим

$$K_0(u) = \int_0^T \frac{K(T-\tau)(\tau-u)^{p-1}}{(p-1)!}\, d\tau - \frac{(T-u)^{p-1}}{(p-1)!}$$

и если $k = p$, то

$$K_{pj}(u) = K(T-u) \quad \text{при } u \in [t_j, t_{j+1}]$$

$$K_{pj}(u) = 0 \quad \text{при } u \notin [0, T] \setminus [t_j, t_{j+1}]$$

Тогда

$$Y(T, f, c) - f(T) = \int_0^T \left[K_0(u) + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{r} c_{ij} K_{ij}(u) \right] f^{(p)}(u)\, du$$

$$A(c) = \max_f |Y(T, f, c) - f(T)| = M_p \int_0^T \left| K_0(u) + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{r} c_{ij} K_{ij}(u) \right| du$$

Задача, таким образом, сведена к случаю, рассмотренному в п. 2. При расчете следящих систем часто встречается случай, когда $k = p = 1$. Тогда

$$A(c) = M_1 \int_0^T \left| K_0(u) + \sum_{j=0}^{r} c_{1j} K_{1j}(u) \right| du = M_1 \sum_{j=0}^{r} \int_{t_j}^{t_{j+1}} |K_0(u) + c_{1j} K(T-u)|\, du$$

Здесь c_{1j} надо выбирать так, чтобы минимизировать

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} |K_0(u) + c_{1j} K(T-u)|\, du$$

Когда интервал $[t_j, t_{j+1}]$ таков, что на нем $K_0(u)$ и $K(T-u)$ изменяются монотонно, то эта задача решается совсем просто.

5. Реальное получение производных от функции $f(t)$ связано с довольно большими техническими трудностями. Обычно, если дифференцирование осуществляется при помощи электрических систем, на выходе этих систем получаем функцию $m(t)$, удовлетворяющую уравнению

$$T_{\text{э}} \frac{dm}{dt} + m = \frac{df}{dt} \tag{5.1}$$

При малых значениях постоянной времени $T_{\text{э}}$ считают, что $m(t) \approx f'(t)$. Из (5.1) следует

$$m(t) = \int_0^t \mu(t-\tau) f'(\tau)\, d\tau \tag{5.2}$$

Учтем, что вместо $f'(t)$ получаем выражение (5.2) для задачи, рассмотренной в конце п. 4. Имеем уравнение

$$L(y) = f(t) + c(t) \int_0^t \mu(t-\tau) f'(\tau)\, d\tau$$

тогда

$$Y(T,f,c)-f(T)=\sum_{j=0}^{r}\int_{t_j}^{t_{j+1}}\left\{K(T-\tau)\left[f(\tau)+c_j\int_0^T\mu(\tau-u)f'(u)\,du\right]-f'(\tau)\right\}d\tau$$

Меняя пределы интегрирования в соответствующих повторных интегралах, получаем

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}}K(T-\tau)\int_0^{\tau}\mu(\tau-u)f'(u)\,du\,d\tau=\int_0^T K_j(u)\,f'(u)\,du$$

Здесь

$$K_j(u)=\int_{t_j}^{t_{j+1}}K(T-\tau)\,\mu(\tau-u)\,d\tau\quad\text{при } u\in[0,t_j]$$

$$K_j(u)=\int_{u}^{t_{j+1}}K(T-\tau)\,\mu(\tau-u)\,d\tau\quad\text{при } u\in[t_j,t_{j+1}]$$

$$K_j(u)=0\quad\text{при } u\in(t_{j+1},T]$$

Поэтому

$$A(c)=\max_f|Y(T,f,c)-f(T)|=M_1\int_0^T\left|K_0(u)+\sum_{j=0}^{r}c_jK_j(u)\right|du$$

$$K_0(u)=\int_u^T K(T-u)\,du-1$$

Отсюда следует, что можно ставить задачу о минимизации $|Y(T,f,c)-f(T)|$ и при помощи сигналов, неточно воспроизводящих производные от $f(T)$.

6. Рассмотрим следующую задачу. Найти функцию $c(t)$, на которой реализуется I для случая, когда

$$L(y)=c(t)\,f(t),\qquad |c(t)|\leqslant M,\quad |f'(t)|\leqslant m_1,\qquad t\in[0,T]$$

Как и в предыдущих пунктах, запишем

$$|Y(T,f,c)-f(T)|=\left|\int_0^T[K_1(\tau)-1]\,f'(\tau)\,d\tau\right|,\qquad K_1(\tau)=\int_{\tau}^{T}K(T-u)\,c(u)\,du$$

Поэтому

$$I=\min_c A(c)=\min_c m_1\int_0^T|K_1(\tau)-1|\,d\tau$$

Заметим, что $K_1(T)=0$ при любой ограниченной функции $c(u)$. Из вида функции $K_1(\tau)$ сразу следует, что для того чтобы достигался $\min A(c)$, необходимо и достаточно, чтобы $|K_1(\tau)-1|$ было минимально возможным при любом τ из $[0,T]$. Поэтому I реализуется на следующей функции:

$$c_0(u)=M\operatorname{sign}K(T-u)\quad\text{при } u\in[t_0,T],\qquad c_0(u)=0\quad\text{при } u\in[0,t_0]$$

где t_0 — ближайший к T корень уравнения относительно τ

$$M\int_{\tau}^{T}|K(T-u)|\,du=1$$

Выше рассмотрены задачи для наиболее простых, хотя и важных для приложений классов A_i и F. Более сложными являются задачи о нахождении (1.5) для п. п. 3 и 6. Заметим, что не указан и общий алгоритм для решения системы (2.7), хотя во многих частных случаях решение находится сравнительно просто.

7. В качестве примера рассмотрим уравнение

$$\ddot{y} + y = F(t)$$

Как известно, для этого уравнения $K(T-\tau) = \sin(T-\tau)$

1°. Пусть

$$F(t) = f'(t) + cf(t), \qquad |f'(t)| \leqslant m_1$$

В этом случае

$$A(c, t) = \max_f |Y(T, f, c) - f(T)| = m_1 \int_0^T |-\cos(T-\tau) + c\sin(T-\tau)|\, d\tau$$

$$A'(c, t) = \int_0^T \sin(T-\tau)\,\mathrm{sign}\,(-\cos(T-\tau) + c\sin(T-\tau))\, d\tau$$

Пусть $T = \pi/2$. Нетрудно вычислить, что $A'(c, \pi/2) = 0$ только при $c = \sqrt{3}/3$, и в этой точке достигается минимум $A(c, \pi/2)$

$$E = I = m_1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|-\cos\left(\frac{\pi}{2} - \tau\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \tau\right)\right| d\tau = 0.73\, m_1$$

Если не вводить сигнал, пропорциональный $f'(t)$, т. е., если $c = 0$, то

$$\max_f \left|y\left(\frac{\pi}{2}\right) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| = m_1 \int_0^{\pi/2} |\cos\tau|\, d\tau = m_1$$

2°. Пусть

$$F(t) = f(t) + c(t) f'(t)$$

где

$$c(t) = c_1 \quad \text{при } t \in [0, t_1], \qquad c(t) = c_2 \quad \text{при } t \in [t_1, T] \qquad |f'(t)| \leqslant m_1$$

Из соотношений, полученных в п. 4, следует

$$A(c, t) = m_1 \left[\int_0^{t_1} |-\cos(T-\tau) + c_1\sin(T-\tau)|\, d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_{t_1}^T |-\cos(T-\tau) + c_2\sin(T-\tau)|\, d\tau = A_1(c_1, T) + A_2(c_2, T)\right.$$

Пусть $t_1 = \pi/4$, $T = \pi/2$. Для того чтобы найти c_1 и c_2, на которых реализуется I, приравняем нулю производные функций $A_1(c_1, \pi/2)$ и $A_2(c_2, \pi/2)$. Нетрудно вычислить, что

$$A_1'\left(c_1, \frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{при } c_1 = 0{,}377, \quad A_2'\left(c_2, \frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ при } c_2 = 1.64$$

Других экстремальных точек эти функции не имеют, и на них реализуется $I = 0.49\, m_1$.

Замечание 7.1. Отметим, что все рассмотренные в предыдущих пунктах способы нахождения I полностью пригодны и для случая, когда $L(y)$ имеет переменные коэффициенты.

Замечание 7.2. Используя преобразование, описанное в [2], можно полученные результаты распространить на случай, когда $L(y)$ — линейный разностный оператор.

Поступила 25 V 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Булгаков Б. В., Кузовков Н. Т. О накоплении возмущений в линейных системах с переменными параметрами. ПММ, 1950, т. XIV, вып. 1.
2. Гноенский Л. С. О накоплении возмущений в нестационарных линейных импульсных системах. ПММ, т.1959, т. XXIII, вып. 6.