О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Чжан Сы-ин

(Шэньян — Китай)

В этой заметке в одном частном случае установлены достаточные условия оптимальности. Показано, что частью этих условий является условие в принципе максимума Л. С. Понтрягина [1].

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = f_i\,(x_1, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_r; t) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

которая описывает управляемый процесс системы автоматического регулирования. Здесь $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ — параметры объекта, $u_1(t), \ldots, u_r(t)$ — положения регулирующих органов.

Предполагается, что функции f_i непрерывны и ограничены для всех их аргументов и имеют непрерывные частные производные первого и второго порядка по $x_1, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_r$. Предполагается также, что $u_1, \ldots, u_r$ непрерывны и должны удовлетворять неравенствам

$$g_j\,(u_1, \ldots, u_r) \leqslant 0 \qquad (j = 1, \ldots, m) \tag{2}$$

В дальнейшем их будем называть «допустимые управления». Пусть система (1) имеет начальные условия

$$x_i\,(t_0) = x_i^\circ \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{3}$$

где x_i° — заданные величины.

В работе [2] показано, что задачу оптимального регулирования можно свести к рассмотрению системы (1) (считаем, что в (1) уже введена новая переменная), относительно которой требуется выбрать $u_1, \ldots, u_r$ из допустимых управлений, переводящих систему (1) из точки $x\,(t_0) = x^\circ$ в фазовом пространстве, чтобы сумма

$$S = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i\,(T) \qquad (c_i = \text{const}) \tag{4}$$

в заданный момент $t = T$ принимала максимальное (или минимальное) значение.

Рассмотрим случай, когда на $x_1, \ldots, x_n$ при $t = T$ ограничений не наложено. В работе [3] выведена формула приращения значения функционала S при изменении управления

$$\Delta S\,(T) = \sum_{i=1}^{n} c_i \delta x_i\,(T) =$$

$$= -\int_{t_0}^{T} \left\{\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\dot{\lambda}_i + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)\delta x_i + \sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial u_k}\delta u_k\right] + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varepsilon_i\right\} dt \tag{5}$$

Здесь $\lambda_i\,(t)$ — множители, ε_i — члены выше первого порядка малости. При данных условиях для рассматриваемой системы имеем

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varepsilon_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{n} \delta x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{r} \delta u_k \frac{\partial}{\partial u_k}\right)^2 f_i + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \eta_i \tag{6}$$

где η_i — члены порядка малости выше первого.

Введем функцию H переменных $x_1, \ldots, x_n; \lambda_1, \ldots, \lambda_n; u_1, \ldots, u_r; t$

$$H = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i \tag{7}$$

тогда выражение (6) имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varepsilon_i = L_2 H + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \eta_i \tag{8}$$

где L_2 — оператор.

Видно, что L_2H будет квадратичной формой относительно вариаций δx_j ($j = 1, \ldots, n$) и δu_k ($k = 1, \ldots, r$).

Теперь переходим к рассмотрению условий оптимальности управления $u_1, \ldots, u_r$.

Пусть для определенности оптимальное управление $u_1, \ldots, u_r$ дает функционалу $S(T)$ максимальное значение, тогда при любом изменении δu_k ($k = 1, \ldots, r$) должно иметь место

$$\Delta S(T) \leqslant 0$$

Обозначим линейную часть приращения $\Delta S(T)$ через $\delta S(T)$.

Так как $\delta S(T) = 0$, то согласно работе [3] необходимыми условиями оптимальности будут

$$\frac{\partial H}{\partial u_k} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, r) \tag{9}$$

при условиях

$$\lambda_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad \lambda_i(T) = -c_i \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{10}$$

При условиях (9) и (10) из (5) и (8) видно, что знак $\Delta S(T)$ полностью определяется знаком квадратичной формы L_2H. Поэтому, если $L_2H > 0$, то условие $\Delta S(T) \leqslant 0$ выполняется. Нетрудно написать необходимые и достаточные условия положительной определенности квадратичной формы L_2H при $t_0 \leqslant t \leqslant T$ в виде

$$D_1 = \frac{\partial^2 H}{\partial u_1^2} > 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial u_1^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial u_1 \partial u_2} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial u_2 \partial u_1} & \frac{\partial^2 H}{\partial u_2^2} \end{vmatrix} > 0, \quad D_r = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial u_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 H}{\partial u_1 \partial u_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 H}{\partial u_r \partial u_1} & \cdots & \frac{\partial^2 H}{\partial u_r^2} \end{vmatrix} > 0$$

$$D_{r+1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial u_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 H}{\partial u_1 \partial u_r} & \frac{\partial^2 H}{\partial u_1 \partial x_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial u_1} & \cdots & \frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial u_r} & \frac{\partial^2 H}{\partial x_1^2} \end{vmatrix} > 0, \ldots, \quad D_{r+n} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial u_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 H}{\partial u_1 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 H}{\partial x_n \partial u_1} & \cdots & \frac{\partial^2 H}{\partial x_n^2} \end{vmatrix} > 0 \tag{11}$$

Это — достаточные условия оптимальности при условиях (9) и (10).

Если в (11) первые r условия выполняются, тогда имеет место

$$\delta^2 H = \sum_{s=1}^{r} \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial^2 H}{\partial u_k \partial u_s} \delta u_k \delta u_s > 0$$

С другой стороны, приращение ΔH функции H при изменении управления имеет вид

$$H = \delta H + \delta^2 H + \eta, \quad \delta H = \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial u_k} \delta u_k = \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial H}{\partial u_k} \delta u_k = 0$$

Здесь η — член высшего порядка малости. Отсюда видно, что знак ΔH полностью определяется знаком $\delta^2 H$. Здесь $\delta^2 H > 0$, поэтому $\Delta H > 0$. Это значит, что оптимальное управление, соответствующее максимальному значению функционала $S(T)$, дает функции H минимальное значение. Этот факт — принцип Л. С. Понтрягина.

Таким образом, в данном случае, если управление целиком происходит внутри области (2), то условие принципа Л. С. Понтрягина будет частью условий (9) и (11).

Поступила 22 IV 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л. С. Оптимальные процессы регулирования. Успехи математических наук, 1959, т. XIV, вып. 1(85).
2. Розоноэр Л. И. Принцип максимума Л. С. Понтрягина в теории оптимальных систем. I, II, III. Автоматика и телемеханика. 1959, т. XX, № 10, 11, № 12.
3. Чжан Сы-ин. К теории оптимального регулирования ПММ. 1961, т. XXV, вып. 3.