О ПЕРМАНЕНТНЫХ ОСЯХ ДВИЖЕНИЯ ТЯЖЕЛОГО ГИРОСТАТА ОКОЛО НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

В. Н. Дрофа (Москва)

Гиростатом называется [1] механическая система S, которая состоит из неизменяемой части S_1 и других тел S_2, изменяемых или твердых, но связанных неизменно с S_1. При этом необходимо, чтобы движение тел S_2 относительно S_1 не изменяло геометрию масс системы S. Перманентные движения уравновешенного гиростата при постоянном гиростатическом моменте подробно исследовал Вольтерра [2]. Н. Е. Жуковский дал [3] геометрическую интерпретацию этого движения.

Ниже определяются перманентные движения тяжелого гиростата около неподвижной точки по схеме, аналогичной той, которой пользовался Б. К. Млодзеевский [4] при определении перманентных движений твердого тела около неподвижной точки.

Пусть неизменяемая часть S_1 гиростата закреплена в одной из своих точек O, которую примем за начало двух координатных систем: неподвижной системы $O\xi\eta\zeta$ с направленной вертикально вверх осью $O\zeta$ и подвижной системы $Oxyz$, оси которой ориентированы по главным осям инерции гиростата для точки O. В силу теоремы о сложении скоростей момент количеств движения гиростата относительно точки O можно разложить на две составляющие: вектор $\mathbf{K}$, относящийся ко всей системе S и происходящий от ее переносного движения, и на вектор $\mathbf{k}$, обусловленный движением части S_2 относительно S_1. Будем предполагать, что гиростатический момент $\mathbf{k}$ является постоянным по величине и направлению относительно S_1. Проекции этого вектора на подвижные оси обозначим через k_x, k_y, k_z, а проекции вектора $\mathbf{K}$ на эти же оси через

$$K_x = Ap, \qquad K_y = Bq, \qquad K_z = Cr$$

Здесь p, q, r обозначают проекции вектора $\boldsymbol{\omega}$ мгновенной угловой скорости гиростата на подвижные оси, а A, B, C — главные моменты инерции гиростата для точки O.

По теореме моментов количеств движения получим следующие уравнения движения тяжелого гиростата около неподвижной точки:

$$\begin{aligned}
&A\frac{dp}{dt} + (C - B)\, qr + qk_z - rk_y = P\,(z_0\gamma_2 - y_0\gamma_3)\\
&B\frac{dq}{dt} + (A - C)\, rp + rk_x - pk_z = P\,(x_0\gamma_3 - z_0\gamma_1)\\
&C\frac{dr}{dt} + (B - A)\, pq + pk_y - qk_x = P\,(y_0\gamma_1 - x_0\gamma_2)
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь x_0, y_0, z_0 означают координаты центра тяжести гиростата в подвижной системе координат, P—вес гиростата, а γ_1, γ_2, γ_3 — направляющие косинусы оси $O\zeta$ относительно подвижных осей, удовлетворяющие кинематическим уравнениям Пуассона

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = r\gamma_2 - q\gamma_3, \qquad \frac{d\gamma_2}{dt} = p\gamma_3 - r\gamma_1, \qquad \frac{d\gamma_3}{dt} = q\gamma_1 - p\gamma_2 \tag{2}$$

Посмотрим, при каких условиях гиростат может совершать перманентные вращения, т. е. вращения вокруг осей, занимающих неизменное положение в гиростате. Пусть такие движения существуют. Тогда

$$p = a\omega, \qquad q = b\omega, \qquad r = c\omega$$

где a, b, c — постоянные направляющие косинусы искомой оси в системе координат xyz. В этом случае уравнения движения гиростата запишутся

$$\begin{aligned}
&Aa\frac{d\omega}{dt} + (C - B)\, bc\omega^2 + (bk_z - ck_y)\,\omega = P\,(z_0\gamma_2 - y_0\gamma_3)\\
&Bb\frac{d\omega}{dt} + (A - C)\, ac\omega^2 + (ck_x - ak_z)\,\omega = P\,(x_0\gamma_3 - z_0\gamma_1)\\
&Cc\frac{d\omega}{dt} + (B - A)\, ab\omega^2 + (ak_y - bk_x)\,\omega = P\,(y_0\gamma_1 - x_0\gamma_2)
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = \omega\,(c\gamma_2 - b\gamma_3), \qquad \frac{d\gamma_2}{dt} = \omega\,(a\gamma_3 - c\gamma_1), \qquad \frac{d\gamma_3}{dt} = \omega\,(b\gamma_1 - a\gamma_2) \tag{4}$$

Уравнения (4) допускают два интеграла

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 \tag{5}$$

$$a\gamma_1 + b\gamma_2 + c\gamma_3 = \nu \tag{6}$$

Умножая уравнения (3) на $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$; x_0, y_0, z_0 и k_x, k_y, k_z, соответственно, и складывая, получим

$$(Aa\gamma_1 + Bb\gamma_2 + Cc\gamma_3)\frac{d\omega}{dt} + [(C - B)\,bc\gamma_1 + (A - C)\,ac\gamma_2 + (B - A)\,ab\gamma_3]\,\omega^2 + \\ + [(bk_z - ck_y)\,\gamma_1 + (ck_x - ak_z)\,\gamma_2 + (ak_y - bk_x)\,\gamma_3]\,\omega = 0 \tag{7}$$

$$(Aax_0 + Bby_0 + Ccz_0)\frac{d\omega}{dt} + [(C - B)\,bcx_0 + (A - C)\,acy_0 + (B - A)\,abz_0]\,\omega^2 + \\ + [(bk_z - ck_y)\,x_0 + (ck_x - ak_z)\,y_0 + (ak_y - bk_x)\,z_0]\,\omega = 0 \tag{8}$$

$$(Aak_x + Bbk_y + Cck_z)\frac{d\omega}{dt} + [(C - B)\,bck_x + (A - C)\,ack_y + (B - A)\,abk_z]\,\omega^2 - \\ - P\,[(z_0\gamma_2 - y_0\gamma_3)\,k_x + (x_0\gamma_3 - z_0\gamma_1)\,k_y + (y_0\gamma_1 - x_0\gamma_2)\,k_z] = 0 \tag{9}$$

Для ω имеется два однотипных уравнения (7) и (8). Коэффициенты в этих уравнениях должны быть пропорциональными. Если обозначить постоянные коэффициенты уравнения (8) через L, M, N, то получим

$$\frac{Aa\gamma_1 + Bb\gamma_2 + Cc\gamma_3}{L} = \frac{(C - B)\,bc\gamma_1 + (A - C)\,ac\gamma_2 + (B - A)\,ab\gamma_3}{M} = \\ = \frac{(bk_z - ck_y)\,\gamma_1 + (ck_x - ak_z)\,\gamma_2 + (ak_y - bk_x)\,\gamma_3}{N}$$

Отсюда можно получить два независимых уравнения (10)

$$M\,[Aa\gamma_1 + Bb\gamma_2 + Cc\gamma_3] = L\,[(C - B)\,bc\gamma_1 + (A - C)\,ac\gamma_2 + (B - A)\,ab\gamma_3]$$

$$N\,[(C - B)\,bc\gamma_1 + (A - C)\,ac\gamma_2 + (B - A)\,ab\gamma_3] = \\ = M\,[(bk_z - ck_y)\,\gamma_1 + (ck_x - ak_z)\gamma_2 + (ak_y - bk_x)\,\gamma_3] \tag{11}$$

Дифференцируя (10) по t, учитывая уравнения (4) и интеграл (6), получим

$$-M\,[(C - B)\,bc\gamma_1 + (A - C)\,ac\gamma_2 + (B - A)\,ab\gamma_3] = \\ = L\,(Aa\gamma_1 + Bb\gamma_2 + Cc\gamma_3) - L\nu\,(Aa^2 + Bb^2 + Cc^2) \tag{12}$$

Решая систему уравнений (10), (11), (12), находим

$$Aa\gamma_1 + Bb\gamma_2 + Cc\gamma_3 = \frac{L^2\nu\,(Aa^2 + Bb^2 + Cc^2)}{L^2 + M^2}$$

$$(C - B)\,bc\gamma_1 + (A - C)\,ac\gamma_2 + (B - A)\,ab\gamma_3 = \frac{LM\nu\,(Aa^2 + Bb^2 + Cc^2)}{L^2 + M^2}$$

$$(bk_z - ck_y)\,\gamma_1 + (ck_x - ak_z)\,\gamma_2 + (ak_y - bk_x)\,\gamma_3 = \frac{LN\nu\,(Aa^2 + Bb^2 + Cc^2)}{L^2 + M^2} \tag{13}$$

Таким образом для $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ будет пять алгебраических уравнений (5), (6), (13) с постоянными коэффициентами, из них четыре линейные. Линейные уравнения (6), (13) можно рассматривать как систему однородных уравнений относительно $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \nu$. Определитель этой системы должен равняться нулю; составляя его, имеем

$$D = (Aa^2 + Bb^2 + Cc^2)\,[(C - B)\,bck_x + (A - C)\,ack_y + (B - A)\,abk_z] \times \\ \times \left[1 - \frac{L}{L^2 + M^2}(Aa^2 + Bb^2 + Cc^2)\,(ax_0 + by_0 + cz_0)\right] = 0 \tag{14}$$

Одним из условий существования нетривиального решения будет условие

$$(C - B)\,k_x bc + (A - C)\,k_y ac + (B - A)\,k_z ab = 0 \tag{15}$$

Заметим, что другое условие

$$1 - \frac{L}{L^2 + M^2}\,(Aa^2 + Bb^2 + Cc^2)\,(ax_0 + by_0 + cz_0) = 0$$

нового по сравнению с (15) для решения не дает, и рассматриваться не будет.

При выполнении условия (15) среди определителей третьего порядка найдутся отличные от нуля, например, таким будет определитель, стоящий в левом верхнем углу определителя D. Следовательно, можно определить γ_1, γ_2, γ_3 из системы неоднородных линейных уравнений с постоянными коэффициентами, т. е. найти постоянные γ_1, γ_2, γ_3. В таком случае уравнения (4) дают

$$\frac{a}{\gamma_1} = \frac{b}{\gamma_2} = \frac{c}{\gamma_3} \tag{16}$$

Это говорит о том, что рассматриваемая перманентная ось будет вертикальной.

В силу (16) коэффициенты при ω и ω^2 в уравнении (7) равны нулю, а так как, вообще говоря, угловая скорость ω конечна, то

$$d\omega \,/\, dt = 0 \tag{17}$$

т. е. гиростат вращается вокруг вертикальной перманентной оси равномерно.

Учитывая этот факт и условие (15), из уравнения (9) получаем

$$(y_0k_z - z_0k_y)\, a + (z_0k_x - x_0k_z)\, b + (x_0k_y - y_0k_x)\, c = 0 \tag{18}$$

Но тогда уравнение (8) дает еще одно условие для направляющих косинусов

$$(C - B)\, x_0bc + (A - C)\, y_0ac + (B - A)\, z_0ab = 0 \tag{19}$$

Уравнение (19) представляет собой уравнение конуса Млодзеевского — Штауде перманентных осей твердого тела. Уравнение (15) будет уравнением конуса перманентных осей уравновешенного гиростата. Уравнение (18) — это уравнение плоскости векторов $\mathbf{k}$ (k_x, k_y, k_z) и $\mathbf{r}_0$ (x_0, y_0, z_0).

Вертикальная перманентная ось должна лежать одновременно на этих трех поверхностях. В общем случае поверхности (15), (18), (19) имеют единственную общую прямую, уравнение которой в подвижной системе координат следующее:

$$\frac{x}{(C-B)\, R_yR_z} = \frac{y}{(A-C)\, R_zR_x} = \frac{z}{(B-A)\, R_xR_y} \tag{20}$$

Здесь R_x, R_y, R_z проекции вектора $\mathbf{R} = \mathbf{k} \times \mathbf{r}_0$ на подвижные оси.

Угловая скорость перманентного движения гиростата определится любым из уравнений движения, которому можно придать следующий вид:

$$\begin{aligned}(A - C)\,(B - A)\,(C - B)\, R_xR_yR_z\omega^2 - n\,(AR_xk_x + BR_yk_y + CR_zk_z)\,\omega\, + \\ + nP\,(AR_xx_0 + BR_yy_0 + CR_zz_0) = 0\end{aligned} \tag{21}$$

Здесь

$$n = \sqrt{(C - B)^2\, R_y^2R_z^2 + (A - C)^2\, R_z^2R_x^2 + (B - A)^2\, R_x^2R_y^2}$$

Отсюда ясно, что из двух полупрямых, определяемых (20), осью перманентного вращения в общем случае может служить только одна, а именно та, для которой дискриминант уравнения (21) всегда положительный. (Замена одной полупрямой на другую означает замену векторов $\mathbf{k}$ и $\mathbf{r}_0$ на обратные, что приводит к изменению знака свободного члена). Гиростат может вращаться около такой полупрямой в ту и в другую стороны, но угловые скорости этих вращений будут разные. Дадим объяснение этим фактам, предполагая, что вертикальная ось вращения задана, и определим условия, при которых возможно перманентное вращение вокруг этой оси.

Ось перманентного вращения тяжелого гиростата расположена в вертикальной плоскости (18), проходящей через точку опоры и занимающей неизменное положение в гиростате. В этой же плоскости расположен и постоянный относительно гиростата вектор $\mathbf{K}$. В таком случае момент $\mathbf{M}_з$ силы тяжести может быть уравновешен гироскопическим моментом $\mathbf{M} = -\,[\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{K} + \mathbf{k})]$, так как оба момента при этом направлены по прямой, перпендикулярной к плоскости (18), которую будем называть, как и в случае твердого тела [5], центральной вертикальной плоскостью.

Вертикальная ось перманентного вращения делит центральную вертикальную плоскость на две полуплоскости. Тогда можно сказать: для того, чтобы имело место равенство $\mathbf{M}_з = -\,\mathbf{M}$, центр тяжести гиростата должен лежать в правой центральной полуплоскости, если смотреть из конца вектора $\mathbf{M}_1 = -\,[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K}]$. Так как положение центра тяжести гиростата задано, то это означает следующее.

Из двух полупрямых, образующих ось перманентного вращения, вверх должна быть направлена та полупрямая, относительно которой центр тяжести гиростата, если смотреть на него из конца вектора $\mathbf{M}_1$, лежит в правой центральной полуплоскости.

Изменение направления вращения около данной полупрямой на обратное меняет только знак гироскопического момента $\mathbf{M}_2 = -[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}]$. Вращение по-прежнему возможно, но угловая скорость вращения будет уже другой.

Рассмотрим ряд частных случаев.

а) Пусть эллипсоид инерции гиростата представляет собой эллипсоид вращения, например, $A = B$. При этом прямая (20) располагается в главной плоскости инерции, сопряженной той главной оси инерции, для которой момент инерции не равен двум остальным. В данном случае уравнение этой прямой представится в виде

$$R_x x + R_y y = 0, \qquad z = 0 \tag{22}$$

Угловая скорость гиростата для этой оси равна

$$\omega = P \frac{z_0}{k_z} \tag{23}$$

В случае шарового эллипсоида инерции уравнения (15) и (19) превращаются в тождества и получится плоскость (18) перманентных осей гиростата. Угловая скорость определится, например, таким уравнением

$$\omega = P \frac{bz_0 - cy_0}{bk_z - ck_y} \tag{24}$$

Перманентной осью вращения может служить любая из полупрямых плоскости (18), но вращение может происходить только в одном направлении. Для оси, совпадающей с вектором $\mathbf{k}$, угловая скорость вращения $\omega = \infty$. Для оси, проходящей через центр тяжести гиростата, $\omega = 0$, что соответствует равновесию гиростата, когда центр тяжести его занимает наивысшее или наинизшее положения.

б) Пусть проекции $\mathbf{k}$ и $\mathbf{r}_0$ на две оси пропорциональны между собой, например,

$$\frac{x_0}{k_x} = \frac{y_0}{k_y}$$

В этом случае конусы (15) и (19) пересекаются по этим осям и касаются вдоль третьей главной оси, которая и служит осью перманентного вращения. При этом угловая скорость гиростата

$$\omega = P \frac{x_0}{k_x} = P \frac{y_0}{k_y}$$

Если вектор $\mathbf{k}$ гиростатического момента проходит через центр тяжести гиростата:

$$\frac{x_0}{k_x} = \frac{y_0}{k_y} = \frac{z_0}{k_z}$$

то конусы (15) и (19) совпадают между собой, а плоскость (18) перестает существовать. Итак, в этом случае геометрическим местом перманентных осей тяжелого гиростата является конус (19) Млодзеевского — Штауде.

Угловая скорость определится одним из следующих уравнений:

$$\begin{aligned}
(C - B)\, x_0\, bc\, \omega^2 + k_x (bz_0 - cy_0)\, \omega &= P (bz_0 - cy_0)\, x_0 \\
(A - C)\, y_0\, ac\, \omega^2 + k_y (cx_0 - az_0)\, \omega &= P (cx_0 - az_0)\, y_0 \\
(B - A)\, z_0\, ab\, \omega^2 + k_z (ay_0 - bx_0)\, \omega &= P (ay_0 - bx_0)\, z_0
\end{aligned} \tag{25}$$

В отличие от твердого тела угловая скорость тяжелого гиростата для главных осей инерции есть величина конечная и равна

$$\omega = P \frac{x_0}{k_x} = P \frac{y_0}{k_y} = P \frac{z_0}{k_z}$$

Следуя Штауде [6], будем называть полуобразующие конуса (19), для которых уравнения (25) дают вещественные значения ω, допускаемыми условиями задачи, а остальные — недопускаемыми. При произвольной величине гиростатического момента допускаемые условия для тяжелого гиростата будут те же, что и для твердого тела. Однако, если гиростатический момент достаточно большой, то перманентной осью вращения может служить любая из полуобразующих конуса (19).

Может случиться, что все определители третьего порядка системы линейных уравнений (6), (13) равны нулю, а среди определителей второго порядка найдутся отличные от нуля. Это возможно при различных частных допущениях, рассмотренных выше. Если воспользоваться уравнением (5), то снова можно найти постоянное решение для γ_1, γ_2, γ_3, т. е. перманентная ось по-прежнему будет вертикальной.

Остается последняя возможность, а именно: среди линейных уравнений (6), (13) имеется только одно независимое. Перманентная ось при этом не будет вертикальной.

Пусть уравнения системы (13) суть следствия уравнения (6); тогда коэффициенты в этих уравнениях должны быть пропорциональными

$$\frac{Aa}{a} = \frac{Bb}{b} = \frac{Cc}{c} = \frac{L^2(Aa^2 + Bb^2 + Cc^2)}{L^2 + M^2} \tag{26}$$

$$\frac{(C-B)\,bc}{a} = \frac{(A-C)\,ac}{b} = \frac{(B-A)\,ab}{c} = \frac{LM\,(Aa^2 + bB^2 + Cc^2)}{L^2 + M^2} \tag{27}$$

$$\frac{bk_z - ck_y}{a} = \frac{ck_x - ak_z}{b} = \frac{ak_y - bk_x}{c} = \frac{LN\,(Aa^2 + bB^2 + Cc^2)}{L^2 + M^2} \tag{28}$$

Уравнениям (26), (27) можно удовлетворить, или положив два из косинусов a, b, c равными нулю, или приравняв между собой два момента инерции A, B, C и приравняв нулю косинус при третьем моменте инерции, или приравняв между собой все три момента инерции A, B, C.

Но, если два момента инерции равны между собой, например $A = B$, то подвижные оси x и y всегда можно выбрать так, чтобы a или b равнялось нулю. Аналогично можно поступить и при $A = B = C$, т. е. все три случая можно свести к одному: один из косинусов равен единице, а два других нулю, например,

$$a = 1, \qquad b = 0, \qquad c = 0 \tag{29}$$

Если еще потребовать, чтобы вектор $\mathbf{k}$ гиростатического момента был направлен по той из главных осей инерции, для которой косинус равен единице, т. е.

$$k_y = k_z = 0, \qquad k_x = k \tag{30}$$

то уравнение (28) также будет удовлетворено.

В силу (29) и (30) имеем $L = Ax_0$, $M = N = 0$. Так как теперь $d\omega\,/\,dt \neq 0$, то из уравнения (8) вытекает $L = 0$, т. е. $x_0 = 0$ Далее, уравнение (7) принимает вид

$$A\gamma_1 \frac{d\omega}{dt} = 0, \quad \text{т. е. } \gamma_1 = 0$$

Тогда угловая скорость гиростата определится уравнением

$$A\frac{d\omega}{dt} = P\,(z_0\gamma_2 - y_0\gamma_3) \tag{31}$$

Следовательно, так как $b = c = 0$, то в данном случае гиростат вращается около одной из главных осей инерции (в рассматриваемом случае около оси Ox), расположенной горизонтально; причем центр тяжести гиростата при этом должен располагаться в главной плоскости инерции, сопряженной той главной оси инерции, около которой гиростат вращается, а гиростатический момент должен быть направленным по оси вращения. Таким образом, это — случай обыкновенного физического маятника.

Поступила 28 IV 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Леви-Чивита Т., Амальди У. Курс теоретической механики. Т. II, ч. II, ИИЛ, 1951.
2. Volterra V. Sur la theorie des variations des latitudes. Acta math. 1899, vol. 22.
3. Жуковский Н. Е. Геометрическая интерпретация теории движения полюсов вращения Земли по ее поверхности. Полное соб. соч., Т. I, ОНТИ, 1937.
4. Млодзеевский Б. К. О перманентных осях в движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки. Тр. Отд. физических наук Общества любителей естествознания, 1894, т. VII.
5. Граммель Р. Гироскоп, его теория и применения. Т. 1, ИИЛ, 1952.
6. Staude O. Über permanente Rotationsachsen bei der Bewegung eines schweren Körpers um einen festen Punkt. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1894, Bd. 113.