ОБ ОДНОМ ДИНАМИЧЕСКОМ МЕТОДЕ ПОВЫШЕНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ БЫСТРОВРАЩАЮЩЕГОСЯ СИММЕТРИЧНОГО ГИРОСКОПА

А. М. Федорченко

(Киев)

В механике известны случаи, когда при воздействии на некоторую механическую систему внешними переменными во времени силами можно значительно повысить устойчивость некоторых видов движения и даже сделать устойчивыми те виды движения, которые являются неустойчивыми при обычных условиях. Наглядным примером может служить маятник с вибрирующей точкой подвеса. В случае вибрирующей точки подвеса устойчивость нижнего положения равновесия по отношению к внешним возмущениям значительно увеличивается, а при некоторых условиях может стать также устойчивым верхнее положение маятника [1]. По существу на этом принципе построены ускорители с жесткой фокусировкой для повышения стабильности орбитального движения заряженных частиц [2].

Ниже будет показано, что аналогичным методом можно повысить устойчивость быстровращающегося симметричного гироскопа.

Вращение симметричного тяжелого гироскопа относительно полюса описывается функцией Гамильтона следующего вида:

$$H_0 = \frac{p_\varphi^2}{2I_3} + \frac{1}{2I}\left[p_\theta^2 + \left(\frac{p_\psi - p_\varphi\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2\right] + Mgl\cos\theta \tag{1}$$

Здесь I_3, I — главные моменты инерции гироскопа относительно полюса, l — расстояние от центра масс до полюса.

Известно, что собственное вращение гироскопа будет устойчивым, если коэффициент гироскопической устойчивости

$$\sigma_0 = \sqrt{1 - \frac{4IMgl}{I_3^2\omega_3^2}} \tag{2}$$

будет заключен в пределах $1 \geqslant \sigma_0 \geqslant 0$ и, кроме того, чем больше σ_0, тем устойчивее будет собственное вращение по отношению к внешним возмущениям [3].

Из формулы (2) видно, что для наибольшей устойчивости гироскопа необходимо сделать величину $IMgl/I_3^2\omega_3^2$ как можно меньшей. Если эта возможность исчерпана, дальнейшее повышение устойчивости может быть достигнуто при помощи вибраций полюса.

Итак, пусть полюс вибрирует вертикально по заданному закону $z_0 = F(t)$, причем будем считать функцию $F(t)$ почти периодической, которую можно представить в виде конечной суммы периодических функций с несоизмеримыми периодами

$$z_0 = \sum_\nu \sum_{n\neq 0} a_{\nu n} \exp(i\omega_\nu nt)$$

Будем рассматривать движение гироскопа относительно системы координат, связанной с полюсом, но, так как из-за наличия вибраций эта система будет неинерциальной, необходимо к функции Гамильтона прибавить потенциал сил инерции, тогда функция Гамильтона примет вид

$$H = H_0 - M\cos\theta \sum_{\nu, n\neq 0} \omega_\nu^2 a_{\nu n} n^2 \exp(i\omega_\nu nt) \tag{3}$$

Пусть ω наибольшая из набора частот ω_ν. Введем безразмерное время $\tau = \omega t$ при этом функция Гамильтона будет иметь вид

$$H' = \varepsilon\,[H_0 - Ml\omega^2\cos\theta \sum_\nu \sum_{n\neq 0} \varkappa_\nu^2 a_{\nu n} n^2 \exp(i\varkappa_\nu n\tau) \qquad \left(\varepsilon = \frac{1}{\omega},\quad \varkappa_\nu = \frac{\omega_\nu}{\omega} \leqslant 1\right) \tag{4}$$

Получить точное решение уравнений Гамильтона, вытекающих из (4), невозможно. Приходится применять приближенный метод, который заключается в следующем [4, 5].

При помощи функции $S\ (q,\ P;\ \tau)$ перейдем от переменных p, q к новым переменным P, Q, полагая

$$p = \partial S / \partial q, \qquad Q = \partial S / \partial P$$

Функция Гамильтона H^* в новых переменных будет связана с функцией Гамильтона H в первоначальных переменных равенством

$$\varepsilon H^* = \varepsilon H + \partial S / \partial \tau \tag{5}$$

Будем искать такую функцию S, чтобы функция Гамильтона в новых переменных явно не зависела от времени, тогда равенство (5) превратится в уравнения для определения функции S. Имеем

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} + \varepsilon H\left(\frac{\partial S}{\partial q},\ q;\ \tau\right) = \varepsilon H^*\left(P,\ \frac{\partial S}{\partial P};\ \varepsilon\right) = \varepsilon H_1^*\left(P,\ \frac{\partial S}{\partial P}\right) + \varepsilon^2 H_2^*\left(P,\ \frac{\partial S}{\partial P}\right) + \cdots \tag{6}$$

Решение уравнения (6) ищем в виде ряда

$$S = S_0 + \varepsilon S_1 + \varepsilon^2 S_2 \tag{7}$$

Здесь $S_0 = Pq$ — тождественное преобразование. Подставляя (7) в (6), раскладывая в ряд по ε и приравнивая одинаковые степени при ε, получаем следующую цепочку уравнений последовательных приближений:

$$\frac{\partial S_1}{\partial \tau} + H\ (P,\ q;\ \tau) = H_1^*\ (P,\ q)\ , \qquad \frac{\partial S_2}{\partial \tau} + \frac{\partial H}{\partial P}\frac{\partial S_1}{\partial q} = \frac{\partial H_1^*}{\partial q}\frac{\partial S_1}{\partial P} + H_2^*\ (P,\ q) \tag{8}$$

Так как H почти периодическая функция τ, т. е.

$$H\ (P,\ q;\ \tau) = \sum_{n,\ \nu}{}' H_{n\nu} \exp\ (in\varkappa_\nu \tau) \tag{9}$$

то решением (8) будет

$$H_1^* = \sum_{\nu}{}' H_{\nu_0}, \qquad S_1 = i \sum_{\nu,\ n \neq 0}{}' \frac{H_{n\nu}}{n\varkappa_\nu} \exp in\varkappa_\nu \tau$$

Подставляя результат первого приближения в уравнение второго приближения (9), аналогичным путем можно найти S_2 и H_2^* и т. д. в виде рядов по степеням ε.

Применяя этот метод к функции Гамильтона (4), в третьем приближении получим

$$H = H_0 + G \sin^2 Q \qquad \left(G = \frac{M^2 l^2}{2I} \sum_{\nu,\ n}{}' a_{n\nu}\, a_{n\nu}\, \omega_\nu^{\ 2}\right) \tag{10}$$

$$\begin{aligned} S = P_\varphi \varphi + P_\psi \psi + P_\theta \theta - iMl \cos\theta \sum_{\nu,\ n\neq 0}{}' a_{\nu n}\omega_\nu n \exp^{in\omega_\nu t} + \\ + \frac{Ml}{I} P_\theta \cos\theta \sum_{\nu,\ n\neq 0}{}' a_{\nu n} \exp^{in\omega_\nu t} + \cdots \end{aligned} \tag{11}$$

Первоначальные переменные p_ψ, p_φ, p_θ; ψ, φ, θ связаны с новыми следующими формулами

$$p_\psi = \frac{\partial S}{\partial \psi} = P_\psi, \qquad p_\varphi = \frac{\partial S}{\partial \varphi} = P_\varphi, \qquad p_\theta = \frac{\partial S}{\partial \theta} = P_\theta + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial \theta} + \cdots$$

$$\Psi = \frac{\partial S}{\partial P_\psi} = \psi, \qquad \Phi = \frac{\partial S}{\partial P_\varphi} = \varphi, \qquad Q = \frac{\partial S}{\partial P_\theta} = \theta + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial P_\theta} + \cdots$$

Для дальнейших исследований удобно перейти от гамильтоновой формы уравнений к лагранжевой, так как начальные условия формулируются для координат и скоростей. Функции Гамильтона (10) соответствует функция Лагранжа

$$L = \frac{1}{2} I_3 [\dot{\Psi} \cos Q + \dot{\Phi}]^2 + \frac{1}{2} I\ [\dot{\Psi}^2 \sin^2 Q + \dot{Q}^2] - Mgl \cos Q - G \sin^2 Q$$

Исследуем устойчивость движения гироскопа при начальных условиях:

$$\begin{aligned} \Phi_0 = \varphi_0 = 0, \qquad \Psi_0 = \psi_0 = 0, \qquad Q_0 = \theta_0 = 0 \\ \dot{\Phi}_0 = \dot{\varphi}_0 = \omega_3, \qquad \dot{\Psi}_0 = \dot{\psi}_0 = 0, \qquad \dot{Q}_0 = \dot{\theta}_0 = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь ω_3 — частота собственного вращения; при этом равенства $Q_0 = \theta_0 = 0$, $\dot{Q}_0 = \dot{\theta}_0 = 0$ справедливы во всяком случае в принятом приближении.

Уравнения Лагранжа для трех эйлеровых координат имеют вид

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}} = \mathrm{const}, \qquad \dot{\Psi}\cos Q + \dot{\Phi} = \omega_3 = \mathrm{const} \tag{13}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}} = \mathrm{const}, \qquad I_3\omega_3 \cos Q + I\dot{\Psi}\sin^2 Q = aI = \mathrm{const} \tag{14}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{dL}{d\dot{Q}} - \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}} = 0, \qquad \ddot{Q} + \frac{I_3\omega_3}{I}\dot{\Psi}\sin Q - \dot{\Psi}^2 \sin Q\cos Q - \frac{Mgl}{I}\sin Q + \frac{2G}{I}\sin Q\cos Q = 0 \tag{15}$$

При этом

$$a = \frac{I_3\omega_3}{I}\cos Q_0 + \dot{\Psi}_0^2 \sin^2 Q_0 = \frac{I_3\omega_3}{I}$$

Вводя обозначения

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}\frac{I_3\omega_3}{I}, \qquad \beta = \frac{Mgl}{I}$$

и исключая $\dot{\Psi}$ из уравнения (15), получаем

$$\dot{Q}^2 + 4\alpha_0^2 \frac{(1-\cos Q)^2}{\sin^2 Q} + 2\beta\cos Q + \frac{2G}{I}\sin^2 Q = 2\beta \tag{16}$$

Введем переменную $u = \cos Q$; тогда уравнение (16) примет вид

$$\dot{u}^2 = 2\beta(1-u^2)(1-u) - 4\alpha_0^2(1-u)^2 - \frac{2G}{I}(1-u^2)^2 = P_4(u) \tag{17}$$

Так же, как и в случае отсутствия вибраций, уравнение Лагранжа (16) имеет следующее решение:

$$\varphi = \omega_3 t, \qquad \Psi = 0, \qquad Q = 0 \qquad \text{или } u = 1$$

Это решение соответствует собственному вращению гироскопа без нутации и прецессии, т. е. с сохранением заданного направления вращения; а именно, этот вид вращения гироскопов широко используется в технике. Это движение должно обладать устойчивостью по отношению к внешним возмущениям.

Решение $u = 1$, $\dot{u} = 0$ будет устойчивым, если

$$\frac{\partial^2 P_4(u)}{\partial u^2} < 0 \qquad \text{при } u = 1 \tag{18}$$

Величина второй производной может быть принята за меру устойчивости. Уравнение (18) дает

$$\sigma = \sqrt{1 - \frac{\beta}{\alpha_0^2 + 2G/I}} = \sqrt{1 - \frac{4MglI}{I_3^2\omega_3^2 + 8G}}$$

или, если ввести так называемый коэффициент гироскопической устойчивости (см. [3], стр. 152) и сравнить его с коэффициентом гироскопической устойчивости для гироскопа без вибраций (2), то станет ясно, что $\sigma > \sigma_0$ при любых условиях, т. е. вибрации неподвижной точки гироскопа (полюса) повышают его сопротивляемость внешним возмущениям.

Отметим без доказательства, что эффективность этого метода повышения стабильности тем больше, чем меньше амплитуда вибраций, но больше их частота.

Поступила 6 IV 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н. и Метропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. ГТТИ, 1955.
2. Федорченко А. М. О радиальных и вертикальных колебаниях в ускорителях с жесткой фокусировкой. Укр. матем. журн., 1959, т. XI, № 2.
3. Окунев Б. И. Свободное движение гироскопа. ГТТИ, 1961.
4. Федорченко А. М. Метод канонического усреднения в теории нелинейных колебаний. Укр. матем. журн., 1957, т. IX, № 2.
5. Федорченко А. М. О движении тяжелого несимметричного волчка с вибрирующей точкой опоры. Укр. матем. журн., 1958, т. X, № 2.