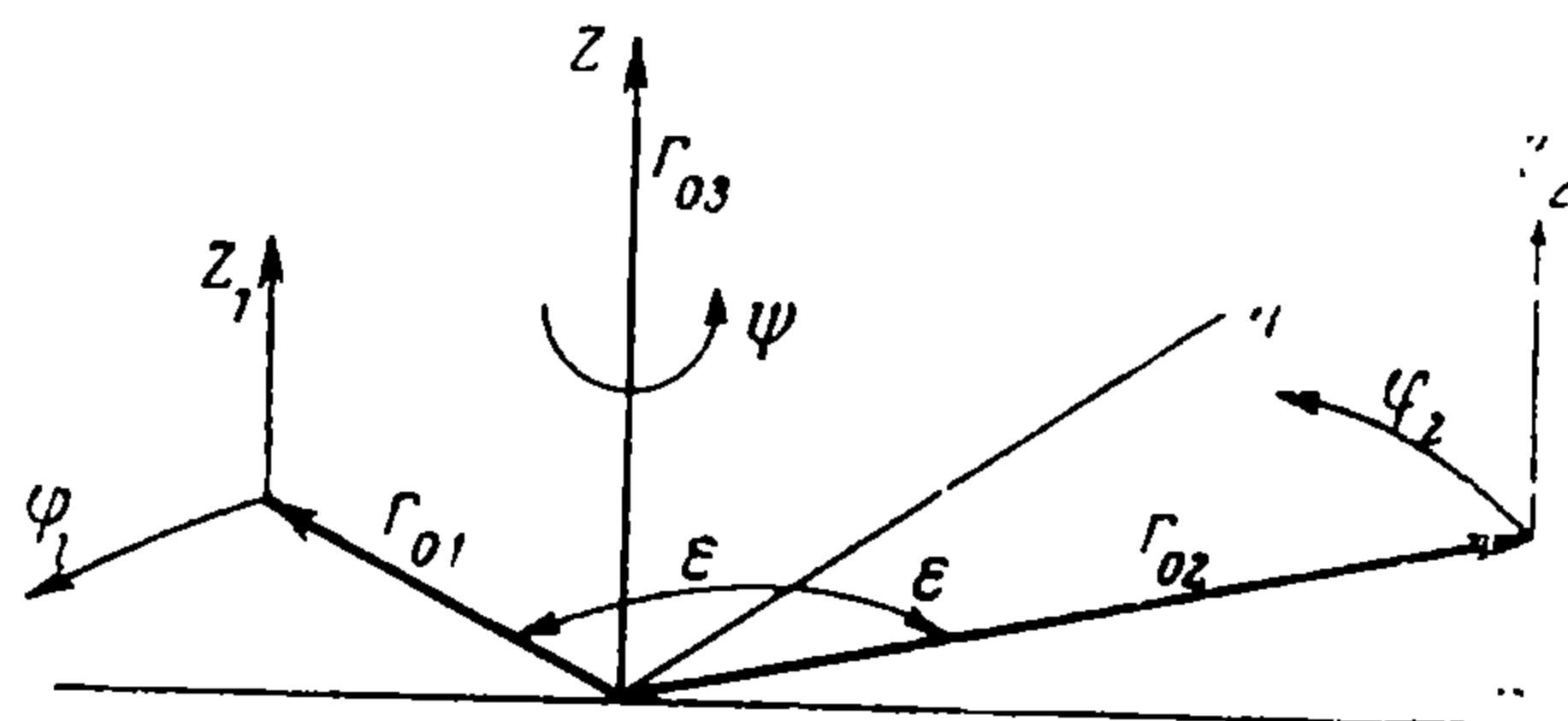


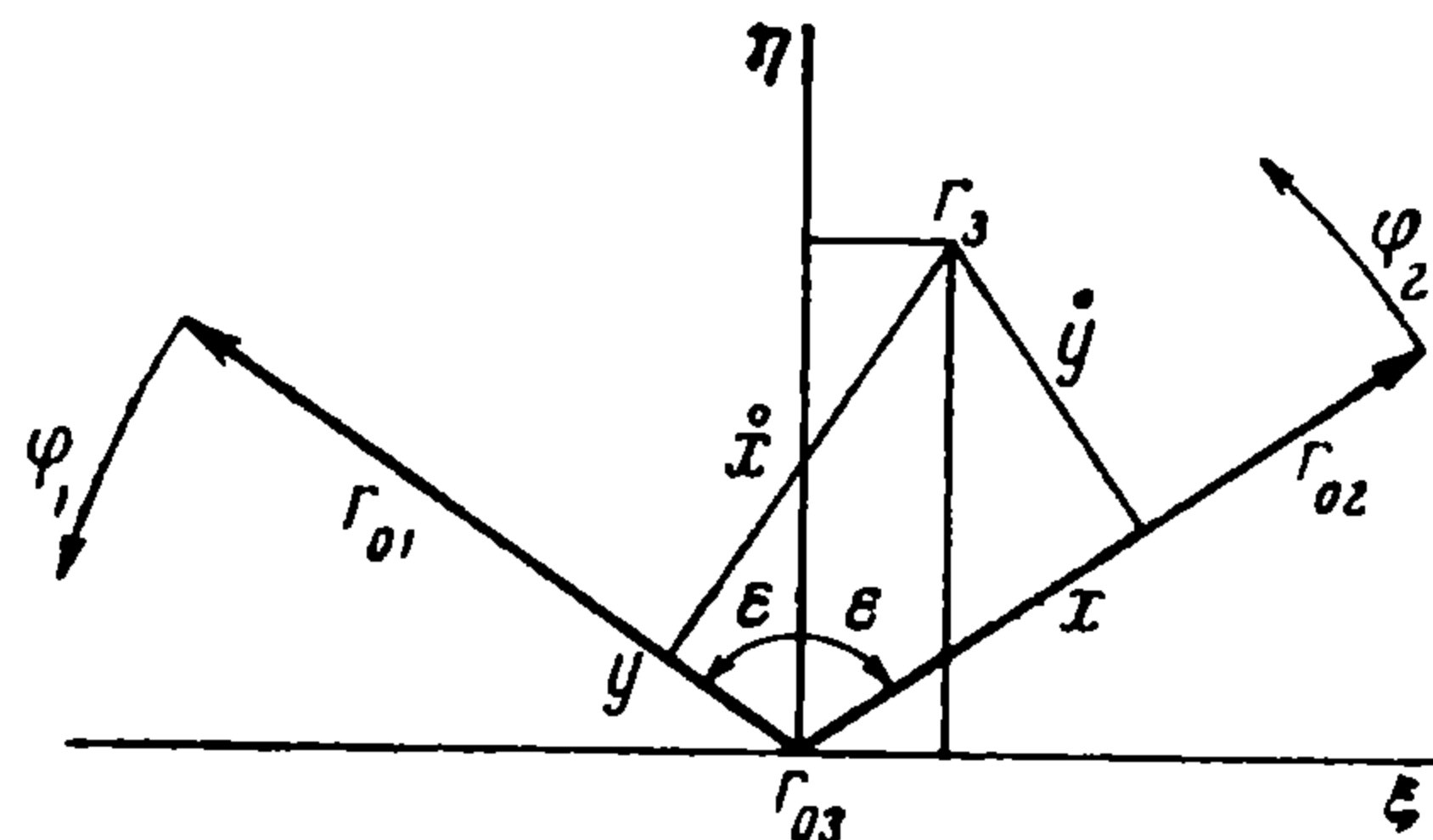
ГИРОГОРИЗОНТКОМПАС НА ВИБРИРУЮЩЕМ ОСНОВАНИИ

Ю. К. Жбанов
(Москва)

Рассматривается влияние горизонтальной вибрации на показания двухроторного гирогоризонткомпаса. Учитывается инерционность элементов компаса и упругость мембран гироскопов. Получены формулы, позволяющие вычислить наиболее опасные (резонансные) частоты вибрации и азимутальные уходы компаса при любой частоте вибрации.



Фиг. 1



Фиг. 2

Действие вибрации сводится к наложению на прибор внешних периодических моментов M_{ξ}^* и M_{η}^* в горизонтальной плоскости соответственно вокруг восточной и северной осей компаса. Эти и прочие моменты могут передаваться на роторы гироскопов лишь через деформирующиеся мембраны. При деформации мембраны ось симметрии ротора r не совпадает с осью кожуха R . Момент упругих сил, действующий на ротор, выражается формулой

$$M = \mu r \times R$$

Здесь r и R — единичные векторы, μ — жесткость мембраны на перекося.

Среднее положение вибрирующих элементов компаса — двух роторов и оболочки — можно охарактеризовать (фиг. 1) тремя единичными векторами:

r_{01} — единичный вектор оси симметрии первого ротора,

r_{02} — единичный вектор оси симметрии второго ротора,

r_{03} — единичный вектор оси z оболочки, параллельной осям вращения кожухов, так называемым, осям прецессии.

Произвольное отклоненное положение характеризуется соответственно единичными векторами r_1, r_2, r_3 и некоторым углом ψ , поворота оболочки вокруг r_3 . При произвольном отклонении оболочки и роторов оси кожухов останутся перпендикулярными к осям прецессии r_3 , повернутся вокруг них относительно оболочки на некоторые углы χ и $-\chi$ равные в силу секторной связи, и займут положения, характеризуемые единичными векторами R_1 и R_2 .

Векторы R_1 и R_2 полностью определяются векторами r_1, r_2, r_3 и углом ψ .

Для вывода уравнений движения воспользуемся координатными осями на фиг. 1, 2, где (r_{01}, r_{02}) — экваториальная плоскость; пусть ϕ_1, ϕ_2 — отклонения r_1 и r_2 от своих средних положений в экваториальной плоскости; z_1, z_2 — отклонения r_1 и r_2 вверх от экваториальной плоскости; x, y — проекции отклоненного вектора r_3 на r_{02} и r_{01} . Обозначим ψ — поворот оболочки вокруг r_3 . Для задания положения, r_3 , кроме употребленных координат x, y , можно использовать координаты ξ, η или x°, y° , смысл которых ясен из фиг. 2.

Уравнения движения, представляющие собой запись закона изменения момента количества движения для каждого из трех тел — двух роторов и оболочки — имеют вид

$$\begin{aligned} H\dot{z}_1 + A\ddot{\phi}_1 &= M_{z_1}, & I\ddot{\xi} &= M_{\eta} + M_{\eta}^* \\ H\dot{z}_2 + A\ddot{\phi}_2 &= M_{z_2}, & I\ddot{\eta} &= -M_{\xi} - M_{\xi}^* \\ H\dot{\phi}_1 - A\ddot{z}_1 &= M_{\phi_1}, & I\ddot{\psi} &= M_{\psi} \\ H\dot{\phi}_2 - A\ddot{z}_2 &= M_{\phi_2} \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь H — собственный кинетический момент каждого из роторов, A — момент инерции ротора вокруг оси прецессии, I — момент инерции оболочки. Правые части представляют собой проекции упругих моментов, создаваемых мембранами, на соответствующие координатные оси. Лишь M_ξ^* и M_η^* , как указывалось выше, будут внешними моментами, связанными с вибрацией основания.

При выводе (2) пренебрегается жесткостью пружинной связи и маятниковостью прибора, так как они соответствуют жесткостям, значительно меньшим μ . Эллипсоид инерции оболочки считается шаровым. Гироскопические эффекты оболочки не учитываются. Ниже, при подсчете упругих моментов, пренебрегается инерцией кожухов.

Упругие моменты мембран M_1 и M_2 , действующие соответственно на первый и второй роторы, выражаются, согласно (1) формулами

$$M_1 = \mu (r_1 \times R_1), \quad M_2 = \mu (r_2 \times R_2) \quad (3)$$

Так как

$$M_1 \cdot (r_2 \times r_1) = \mu (r_1 \cdot R_1) (r_1 \cdot r_3), \quad M_2 \cdot (r_3 \times r_2) = \mu (r_2 \cdot R_2) (r_2 \cdot r_3) \quad (4)$$

то, с достаточной точностью

$$\begin{aligned} M_1 &= \mu (r_1 \cdot R_1) (r_1 \cdot r_3) (r_3 \times r_1) + \mu r_3 \cdot (r_1 \times R_1) r_3 \\ M_2 &= \mu (r_2 \cdot R_2) (r_2 \cdot r_3) (r_3 \times r_2) + \mu r_3 \cdot (r_2 \times R_2) r_3 \end{aligned} \quad (5)$$

В принятой системе координат

$$\begin{aligned} r_1 \cdot r_3 &= z_1 + y, & r_3 \cdot (r_1 \times R_1) &= \psi - \chi - \varphi_1 \\ r_2 \cdot r_3 &= z_2 + x, & r_3 \cdot (r_2 \times R_2) &= \psi + \chi - \varphi_2 \end{aligned} \quad (6)$$

Условие равновесия кожухов, без учета их инерции, требует выполнения условия $M_1 \cdot r_3 = M_2 \cdot r_3$; откуда

$$\chi = \frac{1}{2} (\varphi_2 - \varphi_1) \quad (7)$$

Ввиду малости деформаций можно положить

$$R_1 \cdot r_1 = 1, \quad R_2 \cdot r_2 = 1 \quad (8)$$

Учитывая (6), (7) и (8), согласно (5) имеем

$$\begin{aligned} M_1 &= \mu (z_1 + y) (r_1 \times r_3) + \mu \left(\psi - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right) r_3 \\ M_2 &= \mu (z_2 + x) (r_2 \times r_3) + \mu \left(\psi - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right) r_3 \end{aligned} \quad (9)$$

Проектируя векторное равенство (9) на соответствующие координатные линии и опуская члены третьего порядка малости, получаем

$$\begin{aligned} M_{\varphi_1} &= \mu (z_1 + y) + x^0 \mu \left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} - \psi \right) \\ M_{\varphi_2} &= \mu (z_2 + x) - y^0 \mu \left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} - \psi \right) \\ M_{z_1} &= \mu \left(\psi - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right) + x^0 \mu (z_1 + y) \\ M_{z_2} &= \mu \left(\psi - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right) - y^0 \mu (z_2 + x) \end{aligned} \quad (10)$$

Упругий момент, действующий на оболочку, обозначим M_0 . Очевидно

$$M_0 = -M_1 - M_2.$$

Проектируя это равенство на соответствующие оси, опуская члены второго порядка малости, получаем

$$\begin{aligned} M_\xi &= \mu (z_1 + y + z_2 + x) \cos \varepsilon \\ M_\eta &= \mu (z_1 + y - z_2 - x) \sin \varepsilon \\ M_\psi &= 2\mu \left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} - \psi \right) \end{aligned} \quad (11)$$

Согласно фиг. 2

$$\begin{aligned} x &= \eta \cos \varepsilon + \xi \sin \varepsilon, & x^0 &= \eta \sin \varepsilon + \xi \cos \varepsilon \\ y &= \eta \cos \varepsilon - \xi \sin \varepsilon, & y^0 &= \eta \sin \varepsilon - \xi \cos \varepsilon \end{aligned} \quad (12)$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x-y}{2 \sin \varepsilon}, & x^o &= \frac{x+y}{2} \operatorname{tg} \varepsilon + \frac{x-y}{2} \operatorname{ctg} \varepsilon \\ \eta &= \frac{x-y}{2 \cos \varepsilon}, & y^o &= \frac{x+y}{2} \operatorname{tg} \varepsilon - \frac{x-y}{2} \operatorname{ctg} \varepsilon \end{aligned} \quad (13)$$

Соотношения (13) позволяют выразить через координаты $\varphi_1, \varphi_2, z_1, z_2, x, y, \psi$ все величины, входящие в формулы (2), (10) и (11). Линейная часть системы (2) примет вид

$$\begin{aligned} H\dot{z}_1 + A\ddot{\varphi}_1 &= \mu \left(\psi - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right), & H\dot{\varphi}_1 - A\ddot{z}_1 &= \mu (z_1 + y) \\ H\dot{z}_2 + A\ddot{\varphi}_2 &= \mu \left(\psi - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right), & H\dot{\varphi}_2 - A\ddot{z}_2 &= \mu (z_2 + x) \\ I \frac{\ddot{x} - \ddot{y}}{2 \sin \varepsilon} &= \mu \sin \varepsilon (z_1 + y - z_2 - x) + M_{\eta}^*, & I\dot{\psi} &= 2\mu \left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} - \psi \right) \\ I \frac{\ddot{x} + \ddot{y}}{2 \cos \varepsilon} &= -\mu \cos \varepsilon (z_1 + y + z_2 + x) - M_{\xi}^* \end{aligned} \quad (14)$$

Нелинейные части моментов (10) (обозначим их $\delta M_{\varphi_1}, \delta M_{\varphi_2}, \delta M_{z_1}, \delta M_{z_2}$) могут иметь постоянные составляющие $\Delta M_{\varphi_1}, \Delta M_{\varphi_2}, \Delta M_{z_1}, \Delta M_{z_2}$, действие которых эквивалентно наложению на прибор внешних моментов $\Delta M_{\xi}, \Delta M_{\eta}, \Delta M_z$ и помехи ΔN к моменту N (ε) пружины. При этом

$$\begin{aligned} \Delta M_{\xi} &= -\cos \varepsilon (\Delta M_{\varphi_1} + \Delta M_{\varphi_2}), & \Delta M_z &= \Delta M_{z_1} + \Delta M_{z_2} \\ \Delta M_{\eta} &= -\sin \varepsilon (\Delta M_{\varphi_1} - \Delta M_{\varphi_2}), & \Delta N &= \Delta M_{z_1} - \Delta M_{z_2} \end{aligned} \quad (15)$$

Наиболее важной помехой является ΔM_z . Учитывая (13), для M_z имеем выражение

$$\delta M_z = \frac{\mu}{\sin 2\varepsilon} \{ \sin^2 \varepsilon (x+y)(z_1+y-z_2-x) + \cos^2 \varepsilon (x-y)(z_1+y+z_2+x) \} \quad (16)$$

Для исследования системы (14) введем переменные

$$\begin{aligned} \alpha &= \varphi_1 + \varphi_2, & \beta &= z_1 + z_2, & \gamma &= z_1 - z_2, & \delta &= \varphi_1 - \varphi_2 \\ \alpha_1 &= \psi, & \beta_1 &= x + y, & \gamma_1 &= x - y \end{aligned} \quad (17)$$

Система (14) попарным сложением и вычитанием уравнений преобразуется в разделяющуюся систему

$$\begin{aligned} \frac{I}{\mu} \ddot{\gamma}_1 + 2 \sin^2 \varepsilon \gamma_1 - 2 \sin^2 \varepsilon \gamma &= \frac{2}{\mu} \sin \varepsilon M_{\eta}^* \\ \frac{H}{\mu} \dot{\delta} - \frac{A}{\mu} \ddot{\gamma} &= \gamma - \gamma_1, & H\dot{\gamma} + A\dot{\delta} &= 0 \\ \frac{I}{\mu} \ddot{\beta}_1 + 2 \cos^2 \varepsilon \beta_1 + 2 \cos^2 \varepsilon \beta &= -\frac{2}{\mu} \cos \varepsilon M_{\xi}^* \\ \frac{H}{\mu} \dot{\alpha} - \frac{A}{\mu} \ddot{\beta} &= \beta + \beta_1, & \frac{H}{\mu} \dot{\beta} + \frac{A}{\mu} \dot{\alpha} &= 2\alpha_1 - \alpha \\ \frac{I}{\mu} \ddot{\alpha}_1 + 2\alpha_1 - \alpha &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

В матричном виде, после исключения δ , имеем

$$\begin{aligned} \left\| \begin{array}{cc} 2 \sin^2 \varepsilon + \frac{I}{\mu} D^2 & -2 \sin^2 \varepsilon \\ -1 & 1 + \frac{H^2}{\mu A} + \frac{A}{\mu} D^2 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \gamma_1 \\ \gamma \end{array} \right\| &= \left\| \begin{array}{c} \frac{2 \sin \varepsilon}{\mu} M_{\eta}^* \\ 0 \end{array} \right\| \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{vmatrix} 2 \cos^2 \varepsilon + \frac{I}{\mu} D^2 & 2 \cos^2 \varepsilon & 0 & 0 \\ 1 & 1 + \frac{A}{\mu} D^2 & -\frac{H}{\mu} D & 0 \\ 0 & \frac{H}{\mu} D & 1 + \frac{A}{\mu} D^2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 + \frac{I}{\mu} D^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \beta_1 \\ \beta \\ \alpha \\ \alpha_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{2 \cos \varepsilon}{\mu} M_{\xi}^* \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad (20)$$

При синусоидальных, частоты ω , моментах M_{ξ}^* и M_{η}^* решение систем (19) и (20) дает

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{\Delta_{\gamma_1}}{\Delta_1} 2 \sin \varepsilon M_{\eta}^*, & \beta_1 &= -\frac{\Delta_{\beta_1}}{\Delta_2} 2 \cos \varepsilon M_{\xi}^* \\ \gamma &= \frac{\Delta_{\gamma}}{\Delta_1} 2 \sin \varepsilon M_{\eta}^*, & \beta &= -\frac{\Delta_{\beta_2}}{\Delta_2} 2 \cos \varepsilon M_{\xi}^* \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь Δ — соответствующие миноры и определители при $D = i\omega$. Подставляя (17) и (21) в (16), для δM_z получим выражение

$$\delta M_z = -\frac{2M_{\xi}^* M_{\eta}^*}{\mu \Delta_1 \Delta_2} \{ \cos 2\varepsilon \Delta_{\beta_1} \Delta_{\gamma_1} + \cos^2 \varepsilon \Delta_{\beta} \Delta_{\gamma_1} + \sin^2 \varepsilon \Delta_{\beta} \Delta_{\gamma} \} \quad (22)$$

Если

$$M_{\xi}^* = M \sin \theta \sin \omega t \quad M_{\eta}^* = M \cos \theta \sin (\omega t + \vartheta) \quad (23)$$

то ΔM_z имеет наибольшую величину при $\theta = 1/4 \pi$, $\vartheta = 0$ и

$$M_z^* = \max \Delta M_z = -\frac{M^2}{2\mu \Delta_1 \Delta_2} \{ \cos 2\varepsilon \Delta_{\beta_1} \Delta_{\gamma_1} + \cos^2 \varepsilon \Delta_{\beta} \Delta_{\gamma_1} + \sin^2 \varepsilon \Delta_{\beta_1} \Delta_{\gamma} \} \quad (24)$$

Вычисления дают

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= 2 \sin^2 \varepsilon - \lambda \{ 1 + s\kappa (1 + 2\kappa \sin^2 \varepsilon) \} + s\kappa^2 \lambda^2 \\ \Delta_{\gamma_1} &= (1 + s\kappa) - s\kappa^2 \lambda, & \Delta_{\gamma} &= s\kappa 2 \sin^2 \varepsilon \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= 4 \cos^2 \varepsilon - \lambda \{ 2 (1 + \cos^2 \varepsilon) + s [1 - 2\kappa (1 + \cos^2 \varepsilon) + 4\kappa^2 \cos^2 \varepsilon] \} + \\ &+ \lambda^2 \{ 1 + 2s\kappa [1 + \kappa (1 + \cos^2 \varepsilon)] \} - s\kappa^2 \lambda^3 \end{aligned} \quad (26)$$

$$\Delta_{\beta_1} = 2 + s (1 + 2\kappa) - \lambda \{ 1 + 2s\kappa (1 + \kappa) \} + s\kappa^2 \lambda^2$$

$$\Delta_{\beta} = s (1 + 2\kappa) - s\kappa \lambda$$

Здесь

$$s = \frac{I\mu}{H^2}, \quad \kappa = \frac{A}{I}, \quad \lambda = \frac{I\omega^2}{\mu} \quad (27)$$

Корни уравнения

$$\Delta_1(\lambda) \Delta_2(\lambda) = 0 \quad (28)$$

дают резонансные частоты. По формулам (24) — (28) можно вычислить и резонансные частоты, и величину M_z^* при любой частоте вибрации ω .

Уравнение (28) имеет пять корней. Три меньших корня определяются, в основном, упругостью мембран. Два больших корня связаны со старшими членами полиномов $\Delta_1(\lambda)$ и $\Delta_2(\lambda)$. Весьма приближенно они могут быть выражены формулой

$$\lambda_4 \approx \lambda_5 \approx 1/s\kappa$$

и соответствуют частоте

$$\omega_{4,5} = \frac{H}{A}$$

представляющей собой частоту нутации. Частоты нутации достаточно высоки, поэтому при исследовании низкочастотной части спектра вибрации старшие члены полиномов $\Delta_1(\lambda)$ и $\Delta_2(\lambda)$, по-видимому, могут быть отброшены. Однако надо иметь в виду, что их учет в формулах (25), (26) не вызывает трудностей.

При учете упругости секторной связи между кожухами гироскопов соотношения (9) несколько изменяются и принимают вид

$$\begin{aligned} M_1 &= \mu (z_1 + y) r_1 \times r_3 + \mu_0 \left(\psi - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right) r_3 \\ M_2 &= \mu (z_2 + x) r_2 \times r_3 + \mu_0 \left(\psi - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right) r_3 \end{aligned} \quad (29)$$

Если μ_1 — жесткость упругой связи между биссектрисой осей кожухов и северной осью оболочки, то

$$\mu_0 = \frac{1}{\frac{1}{\mu} + \frac{2}{\mu_1}}, \quad \text{или} \quad \frac{\mu}{\mu_0} = K = 1 + \frac{2\mu}{\mu_1} \quad (30)$$

Формула (24) для помехи M_z^* и выражения (25) остаются в силе, и лишь вместо (26) необходимо пользоваться соотношениями

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= 4 \cos^2 \varepsilon - \lambda \{ 2 (1 + K \cos^2 \varepsilon) + s [1 + 2\kappa (1 + \cos^2 \varepsilon) + 4\kappa^2 \cos^2 \varepsilon] \} + \\ &\quad + \lambda^2 \{ K + s\kappa [(1 + 2\kappa) + K (1 + 2\kappa \cos^2 \varepsilon)] \} - Ks\kappa^2 \lambda^3 \\ \Delta_{\beta_1} &= 2 + s (1 + 2\kappa) - \lambda \{ K + s\kappa (1 + K + 2\kappa) \} + Ks\kappa^2 \lambda^2 \\ \Delta_\beta &= (1 + 2\kappa) - K\kappa\lambda \end{aligned} \quad (31)$$

При $K = 1$, что соответствует $\mu_1 = \infty$, соотношение (31) превращается, как и следовало ожидать, в (26).

В заключение приведем численный пример. Для параметров компаса примем следующие значения:

$$\begin{aligned} H &= 10^5 \text{ г}\cdot\text{см}\cdot\text{сек}, & I &= 500 \text{ г}\cdot\text{см}\cdot\text{сек}^2, & A &= 30 \text{ г}\cdot\text{см}\cdot\text{сек}^2 \\ \mu &= 6 \cdot 10^6 \text{ г}\cdot\text{см} & Pl &= 4500 \text{ г}\cdot\text{см} \end{aligned}$$

Угол разведения гироскопов $\varepsilon = 60^\circ$; амплитудное ускорение вибрации $w = 0.1 \text{ г}$; широта $\varphi = 60^\circ$.

Этому соответствует

$$M = \frac{Pl}{g} w = 450 \text{ г}\cdot\text{см}$$

Согласно (27)

$$s = 0.3 \quad \kappa = 0.06, \quad \lambda = \frac{\omega^2}{1.2 \cdot 10^4}$$

По формулам (25), (26) находим

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= 1.5 - 1.02 \lambda + 0.0011 \lambda^2 \\ \Delta_{\gamma_1} &= 1.018 - 0.0011 \lambda \\ \Delta_\gamma &= 0.027 \end{aligned}$$

$$\Delta_2 = 1 - 2.85 \lambda + 1.04 \lambda^2 - 0.0011 \lambda$$

$$\Delta_{\beta_1} = 2.336 - 1.04 \lambda + 0.0011 \lambda^2$$

$$\Delta_\beta = 0.336 - 0.018 \lambda$$

Из (24) с достаточной точностью, для не слишком больших λ , имеем формулу

$$M_z^* = 0.087 \frac{M^2}{\mu} \frac{2.1 - \lambda}{(1.47 - \lambda)(0.35 - \lambda + 0.37\lambda^2)}$$

Момент M_z^* вызывает уход компаса в азимуте на угол $\Delta\alpha$

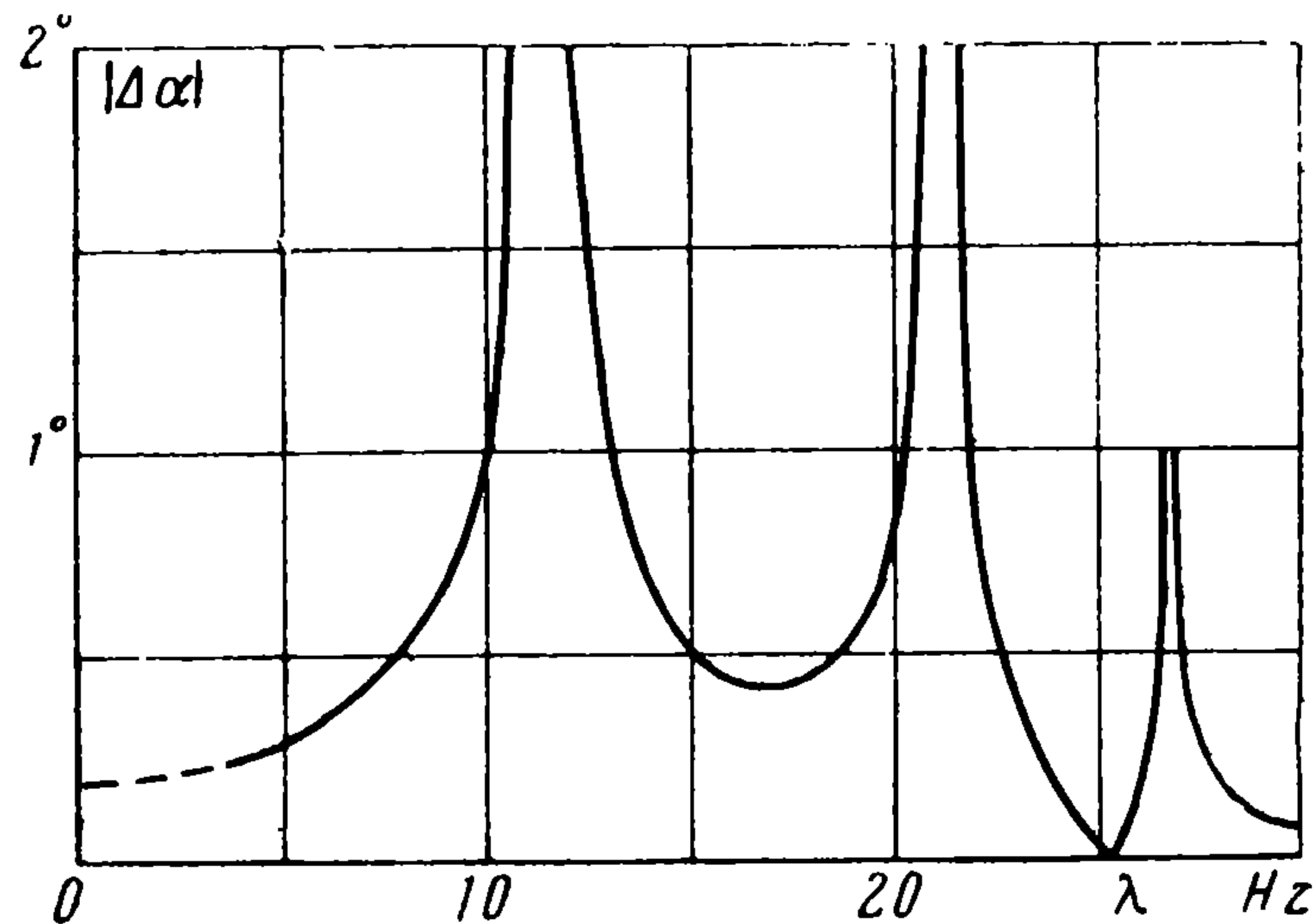
$$\Delta\alpha = \frac{M_z^*}{2H \cos \varepsilon U \cos \varphi} = \frac{M_z^*}{3.6 \text{ г}\cdot\text{см}}$$

Выписанные формулы позволяют выразить величину ухода $|\Delta\alpha|$ как функцию частоты вибрации f . Эта зависимость изображена на фиг. 3. Резонансные частоты соответствуют корням

$$\lambda_1 = 0.430, \quad \lambda_2 = 1.470, \quad \lambda^3 = 2.416$$

или в герцах

$$f_1 = 11.4, \quad f_2 = 20.6, \quad f_3 = 26.2$$



Фиг. 3