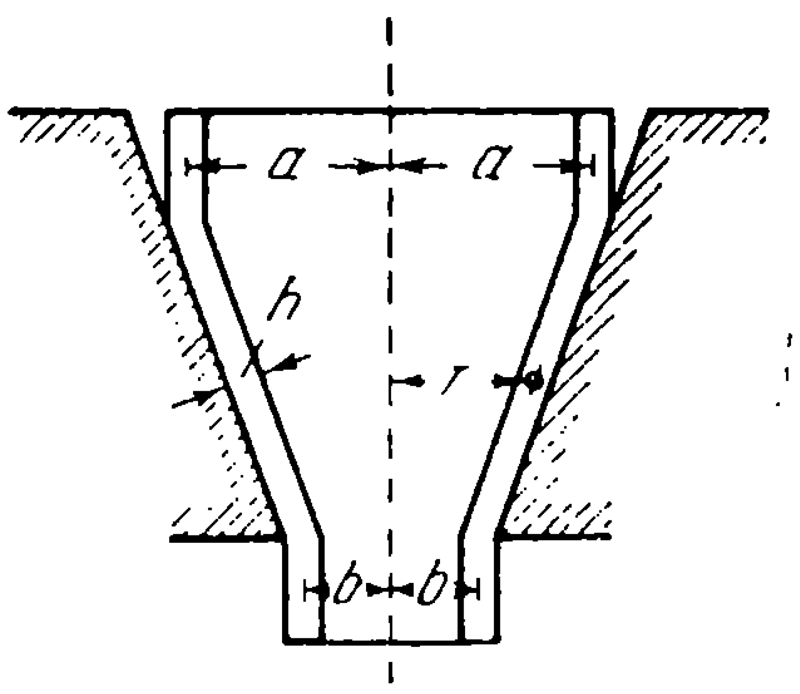
НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О ЛИНЕАРИЗАЦИИ УРАВНЕНИЙ ПЛАСТИЧНОСТИ

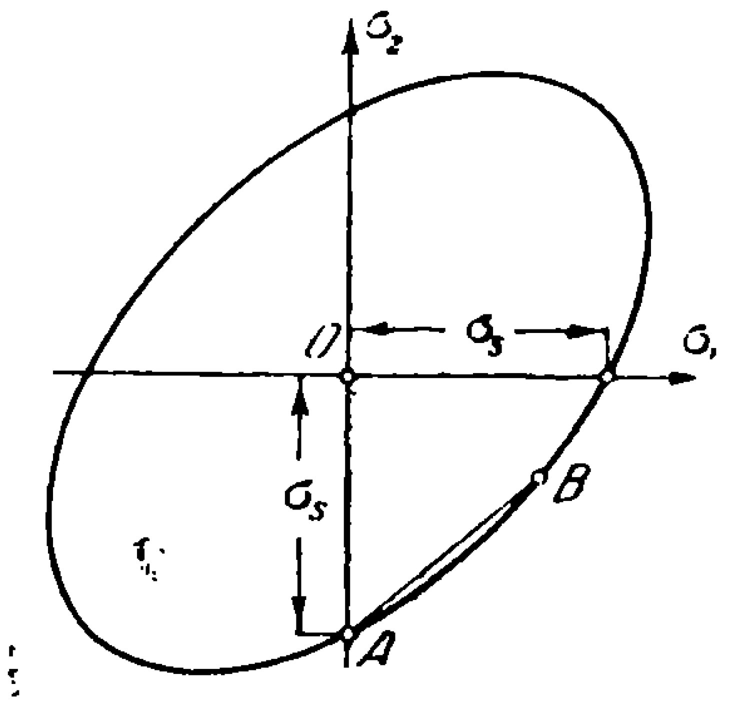
В. В. Соколовский

(Москва)

Приведем некоторые замечания по вопросу линеаризации уравнений пластического течения применительно к простой задаче о волочении тонкой трубы через коническую матрицу без трения (фиг. 1).



Фиг. 1



Фиг. 2

Поля напряжений и скоростей деформаций в конической трубе будем определять компонентами напряжения σ_1, σ_2, компонентами скорости деформации ε_1, ε_2 и радиальной скоростью v, имея в виду, что

$$\varepsilon_1 = \frac{dv}{dr}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{v}{r}$$

Дифференциальное уравнение равновесия конической трубы толщины h имеет вид

$$\frac{d(h\sigma_1)}{dr} + \frac{h(\sigma_1 - \sigma_2)}{r} = 0 \tag{1}$$

а условие пластичности будет

$$\Phi(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_s \tag{2}$$

Между компонентами напряжения и компонентами скорости деформации имеют место зависимости

$$\frac{\varepsilon_1}{\partial\Phi / \partial\sigma_1} = \frac{\varepsilon_2}{\partial\Phi / \partial\sigma_2} \quad \text{или} \quad \frac{\varepsilon_1}{2\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{\varepsilon_2}{2\sigma_2 - \sigma_1}$$

которые дают

$$\frac{dv}{dr} + m\frac{v}{r} = 0, \qquad m = -\frac{\partial\Phi / \partial\sigma_1}{\partial\Phi / \partial\sigma_2} \tag{3}$$

Обычное условие несжимаемости материала устанавливает, что

$$\frac{d}{dr}(rvh) = 0 \tag{4}$$

Обратим внимание, что даже небольшое изменение функции Φ может сильно изменить производные $\partial\Phi / \partial\sigma_1$ и $\partial\Phi / \partial\sigma_2$, а вместе с тем и коэффициент m.

Решение поставленной задачи, полученное Г. Свифтом [1], основано на обычном условии пластичности

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_s^2$$

которое на плоскости переменных σ_1 и σ_2 может быть представлено эллипсом. Компоненты напряжения σ_1, σ_2 в месте входа в матрицу и в месте выхода из нее изображаются точками A и B (фиг. 2). При этом очевидно, что

$$\Phi^2 = \sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2, \qquad m = -\frac{2\sigma_1 - \sigma_2}{2\sigma_2 - \sigma_1}$$

Компоненты напряжения σ_1 и σ_2 в этом решении, а также радиальная скорость v и толщина h могут быть представлены в замкнутой форме, причем

$$rvh = av_0h_0$$

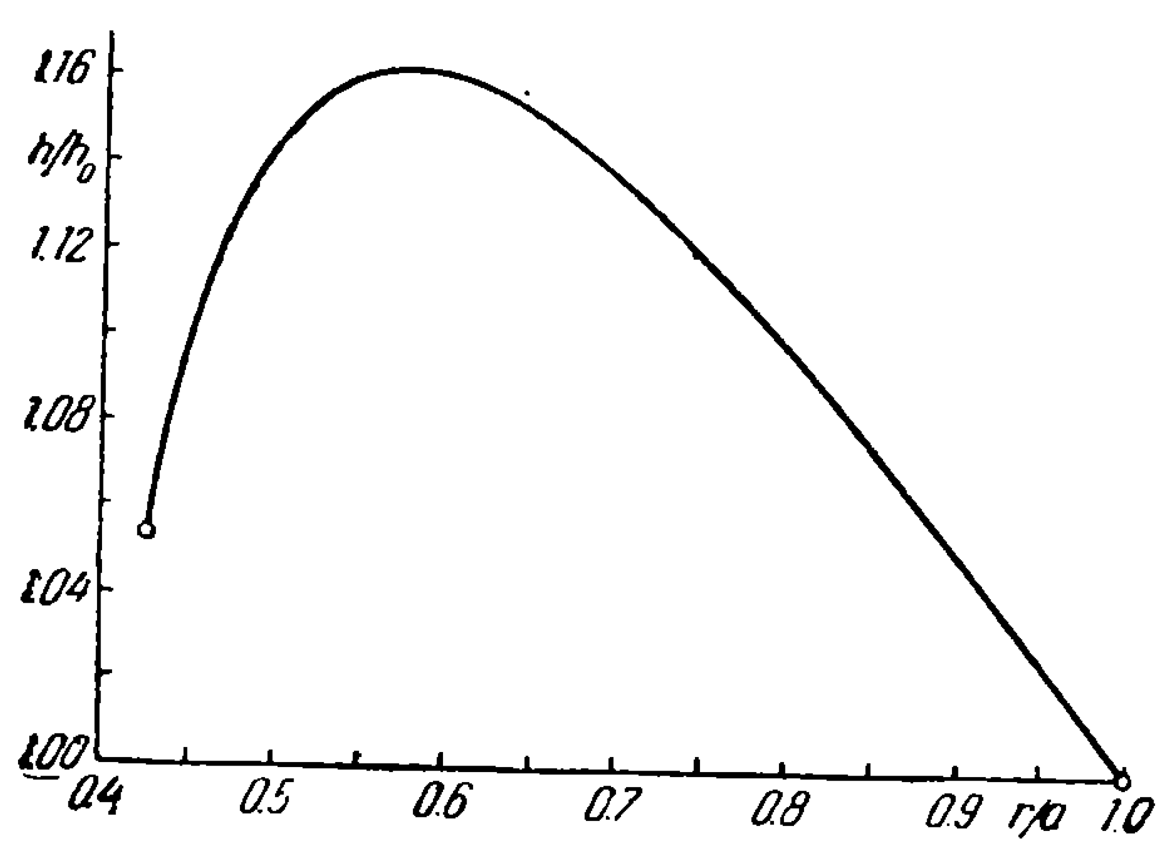
Обратим внимание, что при $b / a = 0.425$ в месте выхода из матрицы главное напряжение σ_2 равно нулю, а отношение $h / h_0 = 1.054$.

График функции h / h_0, определяющей изменение толщины конической трубы вдоль образующей, изображен на фиг. 3.

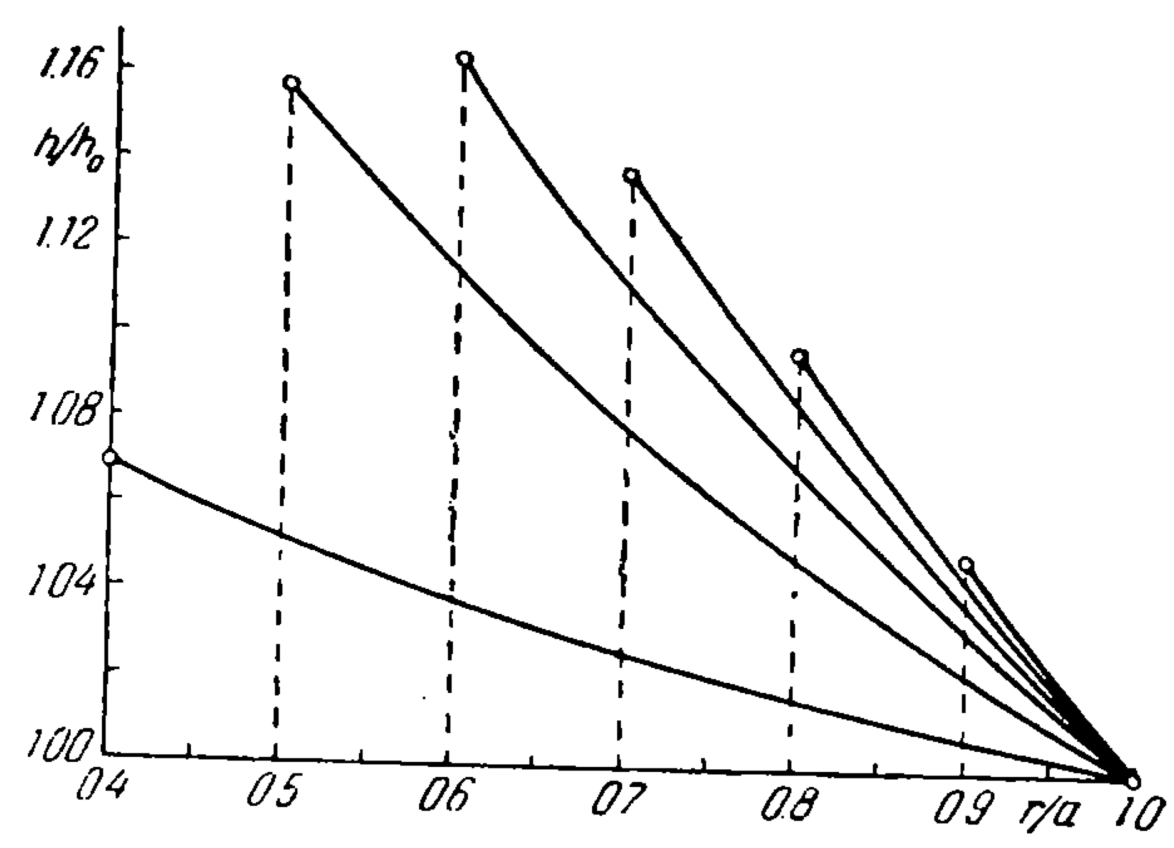
Решение той же задачи, предложенное В. Прагером [2], основано на линеаризированном условии пластичности

$$\mu\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_s$$

которое на плоскости переменных σ_1 и σ_2 может быть представлено некоторой прямой.



Фиг. 3



Фиг. 4

Компоненты напряжения σ_1, σ_2 в месте входа в матрицу и в месте выхода из нее попрежнему изображаются точками A и B. При этом ясно, что

$$\Phi = \mu\sigma_1 - \sigma_2, \qquad m = \mu$$

Компоненты напряжения σ_1 и σ_2 имеют вид

$$\sigma_1 = \sigma_s \ln \frac{a}{r}, \qquad \sigma_2 = \sigma_s \left(\mu \ln \frac{a}{r} - 1\right) \tag{5}$$

а радиальная скорость v и толщина h будут

$$v = v_0 \left(\frac{a}{r}\right)^{\mu}, \qquad h = h_0 \left(\frac{a}{r}\right)^{1-\mu} \tag{6}$$

Параметр μ должен быть определен из условия, чтобы компоненты напряжения σ_1 и σ_2 при $r = b$ удовлетворяли соотношению

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_s^2$$

или, чтобы точка B лежала на дуге эллипса. Это условие устанавливает зависимость

$$\frac{b}{a} = \exp\left(\frac{1 - 2\mu}{1 - \mu + \mu^2}\right)$$

которая дает:

$b / a = 0.4$	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$\mu = 0.927$	0.789	0.702	0.637	0.584	0.539	0.500

Отметим, что при отношении $b / a = 0.368$ или при $\mu = 1$ компонента напряжения σ_2 в месте выхода из матрицы равна нулю, а толщина трубы повсюду постоянна, так что $h = h_0$.

Графики функций h / h_0, дающие изменения толщины конической трубы вдоль образующей, для различных значений b / a от 0.4 до 1.0 изображены на фиг. 4.

Сравнение графиков функций h / h_0 на фиг. 3 и 4 показывает, что они имеют различные виды, хотя соответствующие компоненты напряжения σ_1 в месте выхода из матрицы довольно близки между собой.

Поступила 1 XI 1960

Институт механики
Академии наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Swift H. Stresses and strains in tube drawing. Philosophical Magasine, 1949, № 40.
2. Прагер В. Проблемы теории пластичности. Физматгиз, 1958.