КРУГЛАЯ УПРУГАЯ ПЛИТА ПРИ ОСЕСИММЕТРИЧНОМ ПОПЕРЕЧНОМ НАГРУЖЕНИИ

И. Г. Терегулов (Казань)

Дается решение двух задач линейной теории упругости о напряженно-деформированном состоянии круглых упругих плит при симметричном нагружении.

1. Уравнения равновесия толстой упругой изотропной круглой плиты при симметричной деформации под действием поперечной нагрузки могут быть представлены в виде [1,2] (1.1)

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left\{\frac{1+k-\mu}{(2k)!}\frac{1}{a^2}\frac{d}{d\eta}\nabla^{2k-2}\frac{1}{\eta}\frac{d}{d\eta}\eta u_{(1)}+\frac{1-k-\mu}{(2k)!}\frac{1}{a^2}\frac{d}{d\eta}\nabla^{2k}w_{(0)}\right\}h^{2k+1}=0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left\{\frac{1+k-\mu}{(2k+1)!}\nabla^{2k}\frac{1}{\eta}\frac{d}{d\eta}\eta u_{(1)}+\frac{1-k-\mu}{(2k+1)!}\nabla^{2k+2}w_{(0)}\right\}h^{2k+1}=\frac{1-\mu^2}{E}q$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left\{\frac{k+\mu}{(2k+1)!}\frac{1}{a^2}\frac{d}{d\eta}\nabla^{2k}w_{(1)}+\frac{1+k-\mu}{(2k+1)!}\frac{1}{a^2}\frac{d}{d\eta}\nabla^{2k}\frac{1}{\eta}\frac{d}{d\eta}\eta u_{(0)}\right\}h^{2k+1}=0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left\{\frac{k-\mu}{(2k)!}\nabla^{2k}\frac{1}{\eta}\frac{d}{d\eta}\eta u_{(0)}\frac{k-1+\mu}{(2k)!}\nabla^{2k}w_{(1)}\right\}h^{2k+1}=\frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{2E}p$$

Здесь $2h$ — толщина, E — модуль упругости, μ — коэффициент поперечного сжатия, a — радиус плиты, $0\leqslant\eta\leqslant 1$

$$q=-\pi_+-\pi_-,\qquad p=-h(\pi_+-h_-),\qquad \nabla^2(\ldots)=\frac{1}{a^2}\frac{1}{\eta}\frac{d}{d\eta}\eta\frac{d}{d\eta}(\ldots)\tag{1.2}$$

π_+,π_- — нормальная внешняя нагрузка при $z=\pm h$

$$w=\sum_{k=0}^{\infty}w_{(k)}z^k,\qquad u=\sum_{k=0}^{\infty}u_{(k)}z^k,\qquad -h\leqslant z\leqslant h\tag{1.3}$$

w — перемещение по нормали к срединной плоскости, u — радиальное перемещение. Имеют место формулы [2] (1.4)

$$w_{(2k)}=\frac{k(-1)^k}{2(2k)!(1-\mu)}\nabla^{2k-2}\frac{1}{\eta}\frac{d}{d\eta}\eta u_{(1)}-\frac{(k-2+2\mu)(-1)^k}{2(2k)!(1-\mu)}\nabla^{2k}w_{(0)}$$

$$w_{(2k+1)}=-\frac{(-1)^k}{(2k+1)!(1-2\mu)}\nabla^{2k}\frac{1}{\eta}\frac{d}{d\eta}\eta u_{(0)}-\frac{(k-1+2\mu)}{(2k+1)!(1-2\mu)}\nabla^{2k}w_{(1)}$$

$$u_{(2k)}=\frac{(-1)^k}{(2k)!(1-2\mu)}\frac{1}{a^2}\frac{d}{d\eta}\nabla^{2k-2}w_{(1)}+\frac{(k+1-2\mu)(-1)^k}{(2k)!(1-2\mu)}\frac{1}{a^2}\frac{d}{d\eta}\nabla^{2k-2}\frac{1}{\eta}\frac{d}{d\eta}\eta u_{(0)}$$

$$u_{(2k+1)}=-\frac{k(-1)^k}{2(2k+1)!(1-\mu)}\frac{1}{a^2}\frac{d}{d\eta}\nabla^{2k}w_{(0)}+\frac{(k+2-2\mu)(-1)^k}{2(2k+1)!(1-\mu)}\frac{1}{a^2}\frac{d}{d\eta}\nabla^{2k-2}\frac{1}{\eta}\frac{d}{d\eta}\eta u_{(1)}$$

и напряженно-деформированное состояние определяется четырьмя функциями $w_{(0)}$, $u_{(0)}$, $w_{(1)}$, $u_{(1)}$. Допустим возможность представления нагрузки в виде рядов

$$b\frac{1-\mu^2}{E}=q_0+\sum_{m=1}^{\infty}q_m\mu_m Z_0(\mu_m\eta),\qquad p\frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{2Eh}=p_0+\sum_{m=1}^{\infty}p_m Z_0(\mu_m\eta)\tag{1.5}$$

где $Z_n(\mu_m\eta)$ — функции, удовлетворяющие уравнению

$$\left(\frac{1}{\eta}\frac{d}{d\eta}\eta\frac{d}{d\eta}-\frac{n^2}{\eta^2}\right)Z_n=-\mu_m{}^2 Z_n\tag{1.6}$$

а числа μ_m, занумерованные в порядке возрастания, суть ненулевые корни уравнения

$$Z_1(x)=0,\qquad \mu_{m+1}>\mu_m\geqslant\mu_1>0\tag{1.7}$$

Конкретный вид функций Z_n будем выбирать в зависимости от характера частной задачи. Очевидно, что (1.8)

$$q_m = \frac{1-\mu^2}{N_m\mu_m E}\int_\lambda^1 q\eta Z_0(\mu_m\eta)\,d\eta, \qquad p_m = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{2EhN_m}\int_\lambda^1 p\eta Z_0(\mu_m\eta)\,d\eta$$

$$q_0 = \frac{2(1-\mu^2)}{E}\int_\lambda^1 q\eta d\eta, \qquad p_0 = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{Eh}\int_\lambda^1 p\eta d\eta \qquad \left(N_m = \int_\lambda^1 \eta Z_0^2(\mu_m\eta)\,d\eta\right)$$

так как система функций $Z_0(\mu_m\eta)$ ортогональна на участке $\lambda \leqslant \eta \leqslant 1$. Здесь $\lambda = 0$ соответствует плите, не имеющей центрального выреза, а $\lambda > 0$ соответствует случаю толстого кольца, радиус внутреннего центрального цилиндрического выреза которого равен λa.

Рассмотрим случаи такого крепления плиты, при котором перемещение по вертикали ограничено связью, реакция которой распределена по окружности $\eta = \eta_0$ $(\lambda \leqslant \eta_0 \leqslant 1)$ при $z = -h$. Реакция этой связи равна

$$R = -2\pi a^2 \int_\lambda^1 (\pi_+ + \pi_-)\,\eta d\eta$$

Предполагая, что эта реакция равномерно распределена по площади, ограниченной окружностями $\eta_0 + \delta/2$ и $\eta_0 - \delta/2$ при $z = -h$, получим (1.9)

$$q = -\pi_+ - \pi_- + \frac{1}{\eta_0\delta}\int_\lambda^1 (\pi_+ + \pi_-)\; U\left((\eta_0 \pm \frac{\delta}{2}\right)\eta d\eta$$

$$p = -h(\pi_+ - \pi_-) - \frac{1}{\eta_0\delta}\int_\lambda^1 (\pi_+ + \pi_-)\; U\left(\eta_0 \pm \frac{\delta}{2}\right)\eta d\eta$$

где

$$U\left(\eta_0 \pm \frac{\delta}{2}\right) = \begin{cases} 0 \text{ при } \eta < \eta_0 - \frac{1}{2}\delta, & \eta > \eta_0 + \frac{1}{2}\delta \\ 1 \quad \text{при } \eta_0 - \frac{1}{2}\delta \leqslant \eta \leqslant \eta_0 + \frac{1}{2}\delta \end{cases}$$

В соответствии с этим для p_m и q_m получим

$$q_m = -\frac{1-\mu^2}{EN_m\mu_m}\int_\lambda^1 (\pi_+ + \pi_-)\,[Z_0(\mu_m\eta) - Z_0(\mu_m\eta_0)]\,\eta d\eta$$

$$p_m = -\frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{2EN_m}\int_\lambda^1 [(\pi_+ - \pi_-)\,Z_0(\mu_m\eta) + (\pi_+ + \pi_-)\,Z_0(\mu_m\eta_0)]\,\eta d\eta \quad (1.10)$$

$$q_0 = 0, \qquad p_0 = -\frac{2(1+\mu)(1+2\mu)}{E}\int_\lambda^1 \pi_+\eta d\eta$$

где осуществлен предельный переход при $\delta \to 0$.

Зададим решение системы (1.1) в виде

$$w_{(0)} = \alpha_1 + \alpha_2 \ln\eta + \alpha_3\eta^2 + \alpha_4\eta^2\ln\eta + \alpha_5\eta^4 + a\sum_{m=1}^{\infty} A_m Z_0(\mu_m\eta)$$

$$u_{(1)} = \beta_1\frac{1}{\eta} + \beta_2\eta + \beta_3\eta\ln\eta + \beta_4\eta^3 + \frac{1}{a}\sum_{m=1}^{\infty} B_m\mu_m Z_1(\mu_m\eta) \quad (1.11)$$

$$w_{(1)} = \gamma + \sum_{m=1}^{\infty} C_m Z_0(\mu_m\eta), \qquad u_{(0)} = \theta_1\eta + \frac{\theta_2}{\eta} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_m} D_m Z_1(\mu_m\eta)$$

После подстановки этих выражений для $w_{(0)}, \ldots, u_{(0)}$ в уравнения (1.1) с учетом (1.5) и (1.10) получим, что для удовлетворения этим уравнениям следует потребовать выполнения условий

$$\beta_1 = -\frac{\alpha_2}{a^2} - \frac{4h^2}{(1-\mu)\,a^2}\,\alpha_4, \qquad \beta_2 = -\frac{2\alpha_3}{a^2} - \frac{\alpha_4}{a^2} \tag{1.12}$$

$$\beta_3 = -\frac{2\alpha_4}{a^2}, \qquad \beta_4 = 0, \qquad \alpha_5 = 0, \qquad \gamma = -\frac{p_0}{1-\mu} - \frac{2\mu}{1-\mu}\,\theta_1$$

Для определения A_m, B_m, C_m и D_m из уравнений (1.1) получим систему линейных уравнений, которая дает (1.13)

$$A_m = \frac{q_m}{1-\mu}\,\frac{\zeta_m \operatorname{sh}\zeta_m + 2(1-\mu)\operatorname{ch}\zeta_m}{2\zeta_m - \operatorname{sh} 2\zeta_m}, \qquad B_m = -\frac{q_m}{1-\mu}\,\frac{\zeta_m \operatorname{sh}\zeta_m - 2(1-\mu)\operatorname{ch}\zeta_m}{2\zeta_m - \operatorname{sh} 2\zeta_m}$$

$$C_m = -\frac{2p_m}{1-2\mu}\,\frac{\zeta_m \operatorname{ch}\zeta_m + (1-2\mu)\operatorname{sh}\zeta_m}{2\zeta_m + \operatorname{sh} 2\zeta_m}, \qquad D_m = \frac{2p_m}{1-2\mu}\,\frac{\zeta_m \operatorname{ch}\zeta_m - (1-2\mu)\operatorname{ch}\zeta_m}{2\zeta_m + \operatorname{sh} 2\zeta_m}$$

$$\zeta_m = \mu_m \frac{h}{a}$$

Учитывая (1.3), (1.4), (1.11), (1.12) и (1.13), получим (1.14)

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 \ln\eta + \alpha_3\eta^2 + \alpha_4\eta^2 \ln\eta - z\left(\frac{p_0}{1-\mu} + \frac{2\mu}{1-\mu}\,\theta_1\right) + \frac{z^2\mu}{2(1-\mu)\,a^2} \times$$

$$\times \{\alpha_3 + 8\alpha_4 \ln\eta + 4\alpha_4\} + \frac{a}{1-\mu}\sum_{m=1}^{\infty} q_m X_m Z_0(\mu_m\eta) + \frac{2z}{1-2\mu}\sum_{m=1}^{\infty} p_m L_m Z_0(\mu_m\eta)$$

$$u = \theta_1\eta + \frac{\theta_2}{\eta} - z\left\{\frac{1}{\eta}\left[\frac{\alpha_2}{a^2} + \frac{4h^2}{(1-\mu^2)\,a^2}\right] + \eta\left(\frac{2\alpha_3}{a^2} + \frac{\alpha_4}{a^2}\right) + \frac{2\alpha_4}{a^2}\,\eta\ln\eta\right\} +$$

$$+ z^3\,\frac{2(2-\mu)}{3(1-\mu)\,a^4}\,\frac{\alpha_4}{\eta} + \frac{1}{1-\mu}\sum_{m=1}^{\infty} q_m Y_m Z_1(\mu_m\eta) + \frac{2}{1-2\mu}\sum_{m=1}^{\infty} p_m M_m Z_1(\mu_m\eta)$$

Здесь

$$X_m = \frac{\zeta_m \operatorname{sh}\zeta_m \operatorname{ch}\gamma_m + \gamma_m \operatorname{sh}\zeta_m \operatorname{ch}\gamma_m + 2(1-\mu)\operatorname{ch}\zeta_m \operatorname{ch}\gamma_m}{2\zeta_m - \operatorname{sh} 2\zeta_m}$$

$$Y_m = \frac{\gamma_m \operatorname{ch}\gamma_m \operatorname{ch}\zeta_m - \zeta_m \operatorname{sh}\zeta_m \operatorname{sh}\gamma_m + (1-2\mu)\operatorname{ch}\zeta_m \operatorname{sh}\gamma_m}{2\zeta_m - \operatorname{sh} 2\zeta_m}$$

$$L_m = \frac{\gamma_m \operatorname{ch}\gamma_m \operatorname{sh}\zeta_m - \zeta_m \operatorname{ch}\zeta_m \operatorname{sh}\gamma_m - 2(1-\mu)\operatorname{sh}\gamma_m \operatorname{sh}\zeta_m}{\gamma_m(2\zeta_m + \operatorname{sh} 2\zeta_m)} \tag{1.15}$$

$$M_m = \frac{\zeta_m \operatorname{ch}\zeta_m \operatorname{ch}\gamma_m - \gamma_m \operatorname{sh}\gamma_m \operatorname{sh}\zeta_m - (1-2\mu)\operatorname{ch}\gamma_m \operatorname{sh}\zeta_m}{\mu_m(2\zeta_m + \operatorname{sh} 2\zeta_m)}$$

$$\gamma_m = \mu_m \frac{z}{a}$$

2. Рассмотрим задачу о напряженно-деформированном состоянии толстой круглой плиты без центрального выреза, точки граничного среза которой не могут перемещаться в радиальном направлении и сдвигающие напряжения $\tau_{z\rho}$ в каждой точке этого граничного среза равны нулю (при $\eta = 1$). Поставленные условия будут выполнены, если

$$u_{(n)} = 0 \quad \text{при } \eta = 1, \quad -h \leqslant z \leqslant h, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\frac{dw_{(n)}}{d\eta} = 0 \quad \text{при } \eta = 1, \quad -h \leqslant z \leqslant h, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.1}$$

$$w = 0 \quad \text{при } \eta = \eta_0, \quad z = -h$$

Так как плита не имеет вырезов, то

$$\alpha_2 = \alpha_4 = \beta_1 = \beta_3 = \theta_2 = 0 \tag{2.2}$$

в силу ограниченности перемещений в точке $\eta = 0$, $z = 0$.

Полагая

$$Z_n(x) = J_n(x) \tag{2.3}$$

где J_n — функции Бесселя первого рода порядка n, которые ортогональны на участке $0 \leqslant \eta \leqslant 1$; в силу (1.7) заключаем, что члены с A_m, B_m, C_m и D_m в выражениях для перемещений автоматически удовлетворяют условиям (2.1). Из условий (2.1) и (1.12) для остальных постоянных получаем

$$\theta_1 = 0, \quad \alpha_3 = 0, \quad \gamma = -\frac{p_0}{1-\mu}$$

Постоянная α_1 определится из условия (2.1). Но она не оказывает влияния на напряженно-деформированное состояние, поэтому условия ее определения опускаются.

3. Рассмотрим задачу о напряженно-деформированном состоянии толстой кольцевой плиты, граничные срезы которой суть цилиндры с радиусом a и λa $(0 < \lambda < 1)$. На этих граничных срезах радиальные перемещения и сдвигающие напряжения $\tau_{z\rho}$ равны нулю. Поставленные краевые условия будут выполнены, если потребовать

$$\begin{aligned} &u_{(n)} = 0 \quad \text{при } \eta = 1, \quad \eta = \lambda, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \\ &\frac{dw_{(n)}}{d\eta} = 0 \quad \text{при } \eta = 1, \quad \eta = \lambda, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \\ &w = 0 \quad \text{при } \eta = \eta_0, \quad z = -h \quad (\lambda \leqslant \eta_0 \leqslant 1) \end{aligned} \tag{3.1}$$

В рассматриваемом случае положим

$$Z_n(\mu_m\eta, \lambda) = S_n(\mu_m\eta, \lambda) = J_n(\mu_m\eta)\, Y_1(\mu_m\lambda) - J_1(\mu_m\lambda)\, Y_n(\mu_m\eta) \tag{3.2}$$

Здесь $Y_n(x)$ — функция Бесселя второго рода порядка n. Если числа μ_m — корни уравнения (1.7), или $S_1(x, \lambda) = 0$, то имеют место равенства

$$S_1(\mu_m, \lambda) = 0, \quad S_1(\mu_m\lambda, \lambda) = 0 \tag{3.3}$$

Система функций $S_0(\mu_m\eta, \lambda)$ ортогональна на участке $\lambda \leqslant \eta \leqslant 1$. При таком выборе функций Z_n члены с A_m, B_m, C_m и D_m в выражениях для перемещений автоматически удовлетворяют (3.1). При определении остальных постоянных получим

$$\theta_1 = \theta_2 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0, \qquad \gamma_1 = -\frac{p_0}{1-\mu} \tag{3.5}$$

4. При получении численных результатов необходимо знать корни уравнения (1.7) при (2.3) и уравнения (3.3). Корни первого из этих уравнений можно найти, например, в книге [3]. Для определения корней второго уравнения можно воспользоваться асимптотическими разложениями функций $J_1(x)$ и $Y_1(x)$, что дает

$$y_{i+1} = \pi n + \operatorname{Arc\,tg} \frac{Q_1\left(\frac{\lambda y_i}{1-\lambda}\right) P_1\left(\frac{y_i}{1-\lambda}\right) - Q_1\left(\frac{y_i}{1-\lambda}\right) P_1\left(\frac{\lambda y_i}{1-\lambda}\right)}{P_1\left(\frac{y_i}{1-\lambda}\right) P_1\left(\frac{\lambda y_i}{1-\lambda}\right) + Q_1\left(\frac{y_i}{1-\lambda}\right) Q_1\left(\frac{\lambda y_i}{1-\lambda}\right)} \tag{4.1}$$

Здесь $y = x(1-\lambda)$, $y_1 = \pi n$, а x — корень уравнения (3.3); для получения необходимой точности следует применить последовательные приближения, которые быстро сходятся. Функции $Q_1(x)$ и $P_1(x)$ имеют вид

$$\begin{aligned} Q_1(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (4k-1)!!\,(4k+3)!!}{(2k+1)!\,(8x)^{2k+1}} \approx \frac{0.375}{x} - \frac{0.1025}{x^3} \\ P_1(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}\,(4k-3)!!\,(4k+1)!!}{(2k)!\,(8x)^{2k}} + 1 \approx 1 + \frac{0.1171}{x^2} \end{aligned} \tag{4.2}$$

Поступила 18 IV 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Муштари Х. М., Терегулов И. Г. К теории оболочек средней толщины. ДАН СССР, 1955, т. 128, № 6.
2. Терегулов И. Г. К теории пластин средней толщины. Тр. конференц. по теории оболочек. Казань, 1960.
3. Грей Э., Метноз Г. Б. Функции Бесселя и их приложения. М., ИИЛ, 1953.