МЕТОД РАСЧЛЕНЕНИЯ В ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

Л. А. Розин

(Ленинград)

Развивается известный приближенный прием решения некоторых задач теории тонких пластин и оболочек, который здесь называется «методом расчленения».

Путем введения так называемых функций взаимосвязи производится расчленение операторов рассматриваемых уравнений так, чтобы, зная функции взаимосвязи, можно было сравнительно просто получить решение задачи. Задача сводится к построению указанных функций из условия эквивалентности расчлененной и исходной задач; построение это проводится по методу Ритца. Такой метод расчленения позволяет разделить уравнения теории тонких оболочек, отнесенные к линиям главных кривизн срединной поверхности, на две системы обыкновенных дифференциальных уравнений, соответственно отнесенные к каждой из главных кривизн в отдельности. Полученные уравнения трактуются как уравнения относительно перемещений и углов поворота для двух групп криволинейных стержней, расположенных вдоль главных кривизн срединной поверхности оболочки.

1. Сущность метода расчленения. Поясним рассматриваемый метод на частном случае. Пусть задана некоторая область Ω с границей S. Требуется найти определенную и необходимое число раз дифференцируемую функцию $u(P)$ точки P, удовлетворяющую в области Ω дифференциальному уравнению

$$Au = f(P) \tag{1.1}$$

а на границе S — краевым условиям вида

$$\Gamma_j\, u = g_j\,(P) \qquad (j = 1, \ldots, r) \tag{1.2}$$

Здесь A — линейный дифференциальный оператор, $f\,(P)$ — заданная в Ω функция, Γ_j — линейные, вообще говоря. дифференциальные операторы, $g_j\,(P)$ — заданные на S функции.

Предположим, что оператор A можно расчленить на несколько простейших линейных операторов, в сумме равных A, каждый из которых сравнительно легко обращается. Кроме того, будем считать, что соответствующее расчленение граничных условий (1.2), связанное с расчленением оператора A, также возможно. В дальнейшем для простоты положим $A = A_1 + A_2$, тогда из уравнения (1.1) имеем

$$A_1 u = f_1\,(P), \qquad A_2 u = -f_1\,(P) + f\,(P) \tag{1.3}$$

Функция $f_1\,(P)$, которую назовем функцией взаимосвязи, должна быть выбрана из условия эквивалентности расчлененных и исходных уравнений, которое в данном случае состоит в равенстве функций $u\,(P)$, входящих в оба уравнения (1.3).

Воспользуемся для нахождения $f_1\,(P)$ прямым методом. Выберем полную последовательность $\{\varphi_n\}$ линейно независимых координатных элементов в функциональном гильбертовом пространстве $L_2\,(\Omega)$ и приближенно зададим $f_1\,(P)$ в виде

$$f_{1n}\,(P) = a_1\varphi_1\,(P) + \ldots + a_n\varphi_n\,(P) \tag{1.4}$$

Тогда, обращая операторы A_1 и A_2 в (1.3), получим

$$u_{1n} = A_1^{-1} f_{1n}\,(P) = \sum_{k=1}^{n} a_k u_{1k}, \qquad u_{2n} = -A_2^{-1} f_{1n}\,(P) + A_2^{-1} f\,(P) = u_{20} - \sum_{k=1}^{n} a_k u_{2k} \tag{1.5}$$

Здесь

$$u_{20} = A_2^{-1} f\,(P), \qquad u_{1k} = A_1^{-1}\varphi_k\,(P), \qquad u_{2k} = A_2^{-1}\varphi_k\,(P) \tag{1.6}$$

Функция u_{1n} удовлетворяет той части граничных условий (1.2), которая связана с оператором A_1, а функция u_{2n} — граничным условиям, связанным с оператором A_2. Введем обозначения

$$\psi_n = u_{1n} - u_{2n} = -u_{20} + \sum_{k=1}^{n} a_k v_k, \qquad v_k = u_{1k} + u_{2k} \tag{1.7}$$

Величину ψ_n будем рассматривать как функцию погрешности приближенного решения, а за меру погрешности примем норму элемента ψ_n, обозначая ее $\|\psi_n\|$, тогда постоянные a_k целесообразно находить [1] из условия минимума $\|\psi_n\|^2$. Определим метрику в рассматриваемом гильбертовом пространстве по формуле

$$\|\psi_n\| = \sqrt{[\psi_n, \psi_n]}$$

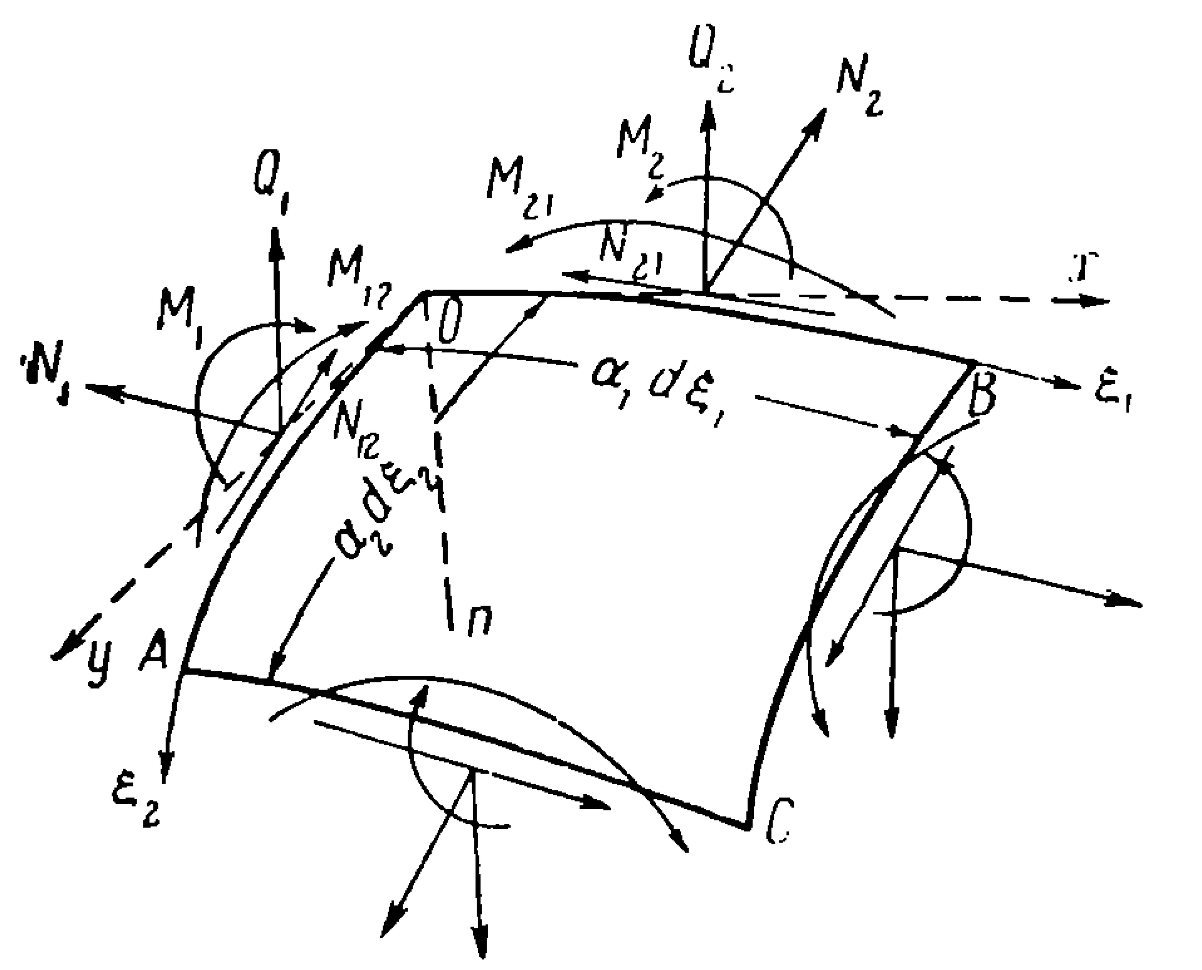
и величину $[\psi_n, \psi_n]$ по одной из следующих формул:

$$(\psi_n, \psi_n), \qquad (A\psi_n, \psi_n), \qquad (A\psi_n, A\psi_n) \tag{1.8}$$

Использование второго скалярного произведения (1.8) возможно, когда оператор A положительный. Тогда, из условия минимума $\|\psi_n\|^2$, можно получить систему линейных алгебраических уравнений относительно постоянных a_k

$$\sum_{k=1}^{n} a_k [v_k, v_m] = [u_{20}, v_m] \qquad (m = 1, \ldots, n) \tag{1.9}$$

Система (1.9) всегда разрешима, если элементы $v_1, \ldots, v_n$ линейно независимы. В свою очередь, линейная независимость $v_1, \ldots, v_n$ следует из линейной независимости $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ при условии, что оператор A имеет обратный. Действительно, если умножить обе части следующего равенства



$$\sum_{k=1}^{n} c_k v_k = A_1^{-1}\Big(\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k\Big) + A_2^{-1}\Big(\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k\Big)$$

вытекающего из (1.7), на $A_1 A_2$

$$A_1 A_2 \Big(\sum_{k=1}^{n} c_k v_k\Big) = A\Big(\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k\Big) \tag{1.10}$$

и предположить, что можно найти постоянные $c_1, \ldots, c_n$, неравные одновременно нулю, так, чтобы $\sum_{k=1}^{n} c_k v_k = 0$, то из (1.10) получим

$$A\Big(\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k\Big) = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k = 0$$

что противоречит предположению о линейной независимости $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

Идею метода расчленения можно реализовать по-разному в зависимости от характера задачи. Иногда, например, оказывается целесообразным проводить неполное расчленение в том смысле, чтобы не все вновь построенные операторы оказались простой структуры и в процессе решения обращались. При этом возможно несколько способов построения решения. Например, применительно к рассмотренной задаче, если не обращать оператор A_1, то, задавая $f_1(P)$ так, чтобы функция u_{2n} удовлетворяла всем граничным условиям, коэффициенты a_k можно определить из условия приближенного удовлетворения u_{2n} первому уравнению (1.3). Кроме того, можно задаться непосредственно функцией u_{1n}, удовлетворяющей части граничных условий, связанных с оператором A_1, далее построить $f_1(P)$ и u_{2n}, а затем определить a_k из условия сращивания u_{1n} и u_{2n}.

2. Расчленение уравнений равновесия элемента оболочки. Примем линии главных кривизн срединной поверхности оболочки ξ_1 и ξ_2 за координатные кривые (фиг. 1). Уравнения равновесия линейного элемента оболочки вдоль ξ_1, ограниченного поверхностями $\xi_2 = \mathrm{const}$ и $\xi_2 + d\xi_2 = \mathrm{const}$, имеют вид

$$\frac{\partial \alpha_2 N_1}{\partial \xi_1} + N_{12}\frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} - Q_1 \frac{\alpha_1\alpha_2}{R_1} = -\alpha_1\alpha_2(p_1 - q_1), \qquad \frac{\partial \alpha_2 M_{12}}{\partial \xi_1} + M_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} = \alpha_1\alpha_2 m_2$$

$$\frac{\partial \alpha_2 N_{12}}{\partial \xi_1} - N_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} = -\alpha_1\alpha_2(p_2 - q_2), \quad -\frac{\partial \alpha_2 M_1}{\partial \xi_1} + M_{12}\frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} + Q_1\alpha_1\alpha_2 = -\alpha_1\alpha_2 m_1$$

$$\frac{\partial \alpha_2 Q_1}{\partial \xi_1} + N_1 \frac{\alpha_1\alpha_2}{R_1} = -\alpha_1\alpha_2(p_n - q_n), \qquad N_{12} + \frac{M_{12}}{R_1} = \tau \tag{2.1}$$

Здесь α_1, α_2 — параметры Ляме; R_1, R_2 — главные радиусы кривизны срединной поверхности оболочки; $p_1, p_2, p_n, q_1, q_2, q_n, m_1, m_2$ — отнесенные к единице срединной поверхности силы и моменты в направлении x, y, n; величина τ есть интенсивность на единицу длины равных и противоположных сил на OB и AC. Силы и моменты $q_1, q_2, q_n, \tau, m_1, m_2$ будут внешними по отношению к линейному элементу вдоль ξ_1, но в то же время они представляют собой результат действия внутренних относительно оболочки в целом сил и моментов на OB и AC. С другой стороны, внутренние силы и моменты, действующие на OA и BC, будут внешними по отношению к линейному элементу вдоль ξ_2; их интенсивности определяются левыми частями уравнений (2.1) и, следовательно, уравнения равновесия для линейного элемента вдоль ξ_2 примут вид

$$\frac{\partial \alpha_1 N_{21}}{\partial \xi_2} - N_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} = -\alpha_1\alpha_2 q_1, \qquad -\frac{\partial \alpha_1 M_2}{\partial \xi_2} + M_{21}\frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} + Q_2\alpha_1\alpha_2 = -\alpha_1\alpha_2 m_2$$

$$\frac{\partial \alpha_1 N_2}{\partial \xi_2} + N_{21}\frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} - Q_2\frac{\alpha_1\alpha_2}{R_2} = -\alpha_1\alpha_2 q_2, \qquad \frac{\partial \alpha_1 M_{21}}{\partial \xi_2} + M_2\frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} = \alpha_1\alpha_2 m_1$$

$$\frac{\partial \alpha_1 Q_2}{\partial \xi_2} + N_2\frac{\alpha_1\alpha_2}{R_2} = -\alpha_1\alpha_2 q_n, \qquad N_{21} + \frac{M_{21}}{R_2} = \tau \tag{2.2}$$

Если алгебраически сложить соответствующие уравнения (2.1), (2.2), то получим уравнения равновесия элемента оболочки в целом. Таким образом, введение функций взаимосвязи $q_1, q_2, q_n, \tau, m_1, m_2$ (будем называть их усилиями взаимодействия) позволило расчленить операторы уравнений равновесия в частных производных на операторы по каждой координате в отдельности.

Для определенности будем пользоваться вариантом теории оболочек в форме Лява [2], что не является обязательным для проведения дальнейших рассуждений. При этом исключим Q_1, Q_2 в (2.1), (2.2) и опустим попутно в пределах принятой степени точности некоторые члены; тогда получим

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \alpha_2 N_1}{\partial \xi_1} + N_{12}\frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} - \frac{1}{R_1}\frac{\partial \alpha_2 M_1}{\partial \xi_1} = -\alpha_1\alpha_2(p_1 - q_1) \\
\frac{\partial \alpha_2 N_{12}}{\partial \xi_1} - N_1\frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} = -\alpha_1\alpha_2(p_2 - q_2) \\
\frac{\partial}{\partial \xi_1}\frac{\partial \alpha_2 M_1}{\alpha_1 \partial \xi_1} - \frac{\partial}{\partial \xi_1}\left(\frac{M_{12}}{\alpha_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2}\right) + N_1\frac{\alpha_1\alpha_2}{R_1} = -\alpha_1\alpha_2(p_n - q_n) + \frac{\partial \alpha_2 m_1}{\partial \xi_1} \\
\frac{\partial \alpha_2 M_{12}}{\partial \xi_1} + M_1\frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_1} = \alpha_1\alpha_2 m_2
\end{gathered} \tag{2.3}$$

и

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \alpha_1 N_{21}}{\partial \xi_2} - N_2\frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} = -\alpha_1\alpha_2 q_1 \\
\frac{\partial \alpha_1 N_2}{\partial \xi_2} + N_{21}\frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} - \frac{1}{R_2}\frac{\partial \alpha_1 M_2}{\partial \xi_2} = -\alpha_1\alpha_2 q_2 \\
\frac{\partial}{\partial \xi_2}\frac{\partial \alpha_1 M_2}{\alpha_2 \partial \xi_2} - \frac{\partial}{\partial \xi_2}\left(\frac{M_{21}}{\alpha_2}\frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1}\right) + N_2\frac{\alpha_1\alpha_2}{R_2} = -\alpha_1\alpha_2 q_n + \frac{\partial \alpha_1 m_2}{\partial \xi_2} \\
\frac{\partial \alpha_1 M_{21}}{\partial \xi_2} + M_2\frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} = \alpha_1\alpha_2 m_1
\end{gathered} \tag{2.4}$$

Здесь также опущены последние уравнения (2.1), (2.2), которые при сделанных допущениях эквивалентны условию $N_{12} = N_{21}$.

Полученные уравнения можно рассматривать как уравнения равновесия отдельных криволинейных стержней, расположенных соответственно вдоль ξ_1 и ξ_2 с шириной, пропорциональной α_2 и α_1. При этом на боковых сторонах таких стержней действуют силы и моменты интенсивности N_{21}, M_{21} и N_{12}, M_{12}, которые позволяют удовлетворить условию равновесия моментов относительно оси n при отсутствии изгиба относительно той же оси.

3. Расчленение уравнений теории оболочек. Будем придерживаться того принципа, чтобы расчлененные уравнения представляли собой две системы уравнений относительно перемещений и углов поворота для двух групп линейных элементов, расположенных соответственно вдоль ξ_1 и ξ_2. Уравнения, связывающие усилия с деформациями и деформации с перемещениями, запишем в форме [2]

$$N_i = B(\varepsilon_i + \nu\varepsilon_k), \qquad N_{12} = N_{21} = L\gamma \qquad \left(B = \frac{Eh}{1-\nu^2},\ L = \frac{Eh}{2(1+\nu)}\right)$$

$$M_i = -D(\chi_i + \nu\chi_k), \qquad M_{12} = M_{21} = D(1-\nu)\chi \qquad \left(D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\right) \quad (3.1)$$

$$\varepsilon_i = \frac{1}{\alpha_i}\frac{\partial u_i}{\partial \xi_i} + \frac{u_k}{\alpha_i\alpha_k}\frac{\partial \alpha_i}{\partial \xi_k} - \frac{w}{R_i}, \qquad \chi_i = \frac{1}{\alpha_i}\frac{\partial \vartheta_i}{\partial \xi_i} + \frac{1}{\alpha_i\alpha_k}\frac{\partial \alpha_i}{\partial \xi_k}\vartheta_k$$

$$\gamma = -(n_1 + n_2), \qquad \chi = -(l_1 + l_2), \qquad \vartheta_i = \frac{u_i}{R_i} + \frac{1}{\alpha_i}\frac{\partial w}{\partial \xi_i} \qquad \begin{pmatrix} i=1,2 \\ k=2,1 \end{pmatrix}$$

Здесь

$$n_i = -L\left(\frac{1}{\alpha_k}\frac{\partial u_i}{\partial \xi_k} - \frac{1}{\alpha_i\alpha_k}\frac{\partial \alpha_k}{\partial \xi_i}u_k\right) = -L\beta_i$$

$$l_i = -\frac{D(1-\nu)}{2}\left(\frac{1}{\alpha_k}\frac{\partial \vartheta_i}{\partial \xi_k} - \frac{1}{\alpha_i\alpha_k}\frac{\partial \alpha_k}{\partial \xi_i}\vartheta_k\right) = -\frac{D(1-\nu)}{2}\varphi_i \qquad \begin{pmatrix} i=1,2 \\ k=2,1 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

и E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона, h — толщина оболочки, u_1, u_2, w — проекции перемещений соответственно на оси x, y, n. Положим вначале $\nu = 0$; тогда, выражая усилия и моменты через перемещения по формулам (3.1), (3.2) и подставляя их в уравнения (2.3), (2.4), получим для двух групп линейных элементов вдоль ξ_1 и ξ_2 две системы уравнений

$$F_{11}[u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, w^{(1)}, \vartheta_2^{(1)}] = -\alpha_1\alpha_2(p_1 - q_1) + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2}n_1$$

$$F_{12}[u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, w^{(1)}, \vartheta_2^{(1)}] = -\alpha_1\alpha_2(p_2 - q_2) + \frac{\partial \alpha_2 n_1}{\partial \xi_1} \quad (3.3)$$

$$F_{13}[u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, w^{(1)}, \vartheta_2^{(1)}] = -\alpha_1\alpha_2(p_n - q_n) + \frac{\partial \alpha_2 m_1}{\partial \xi_1} - \frac{\partial}{\partial \xi_1}\left(\frac{l_1}{\alpha_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2}\right)$$

$$F_{14}[u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, w^{(1)}, \vartheta_2^{(1)}] = \alpha_1\alpha_2 m_2 + \frac{\partial \alpha_2 l_1}{\partial \xi_1}, \qquad \beta_1^{(1)} = -\frac{n_1}{L}, \qquad \varphi_1^{(1)} = -\frac{2}{D}l_1$$

и

$$F_{21}[u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, w^{(2)}, \vartheta_1^{(2)}] = -\alpha_1\alpha_2 q_1 + \frac{\partial \alpha_1 n_2}{\partial \xi_2}$$

$$F_{22}[u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, w^{(2)}, \vartheta_1^{(2)}] = -\alpha_1\alpha_2 q_2 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1}n_2 \quad (3.4)$$

$$F_{23}[u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, w^{(2)}, \vartheta_1^{(2)}] = -\alpha_1\alpha_2 q_n + \frac{\partial \alpha_1 m_2}{\partial \xi_2} - \frac{\partial}{\partial \xi_2}\left(\frac{l_2}{\alpha_2}\frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1}\right)$$

$$F_{24}[u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, w^{(2)}, \vartheta_1^{(2)}] = \alpha_1\alpha_2 m_1 + \frac{\partial \alpha_1 l_2}{\partial \xi_2}, \qquad \beta_2^{(2)} = -\frac{n_2}{L}, \qquad \varphi_2^{(2)} = -\frac{2}{D}l_2$$

В левые части уравнений (3.3) и (3.4) входят соответственно n_2, l_2, ϑ_1 и n_1, l_1, ϑ_2, выраженные через u_1, u_2, w и через ϑ_2 или ϑ_1. Кроме того, нетрудно заключить, что F_{1j} $(j = 1, 2, 3, 4)$ представляют собой обыкновенные дифференциальные операторы по ξ_1, а F_{2j} $(j = 1, 2, 3, 4)$ — по ξ_2. Уравнения (3.3), (3.4) можно трактовать как уравнения относительно перемещений и углов поворота, обозначенных соответствующими индексами, для двух групп линейных элементов вдоль ξ_1 и ξ_2. Здесь ϑ_2, ϑ_1 характеризуют поворот поперечного сечения элемента, β_1, β_2 — сдвиг вдоль элемента, φ_1, φ_2 — перекос поперек элемента.

Для полного расчленения уравнений теории оболочек в указанном выше смысле пришлось ввести дополнительно четыре усилия взаимодействия n_1, n_2, l_1, l_2, которые можно трактовать как интенсивности равных и противоположных сил и моментов, действующих по боковым сторонам рассматриваемых элементов и образующих соответственно пары и бипары. Количество усилий взаимодействия, входящих в (3.3)

(3.4), равно девяти. Для их определения необходимо девять условий сращивания, делающих (3.3), (3.4) эквивалентными уравнениям теории оболочек. Такими условиями будут

$$
\begin{aligned}
&u_1^{(1)} = u_1^{(2)}, && \vartheta_i^{(i)} = \frac{u_k^{(k)}}{R_k} + \frac{1}{\alpha_k}\frac{\partial w^{(k)}}{\partial \xi_k} \\
&u_2^{(1)} = u_2^{(2)}, && \beta_i^{(i)} = \frac{1}{\alpha_k}\frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial \xi_k} - \frac{1}{\alpha_i\alpha_k}\frac{\partial \alpha_k}{\partial \xi_i} u_k^{(k)} \qquad \begin{pmatrix} i=1,2 \\ k=2,1 \end{pmatrix} \\
&w^{(1)} = w^{(2)}, && \varphi_i^{(i)} = \frac{1}{\alpha_k}\frac{\partial \vartheta_i^{(k)}}{\partial \xi_k} - \frac{1}{\alpha_i\alpha_k}\frac{\partial \alpha_k}{\partial \xi_i}\vartheta_k^{(k)}
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Если заданы усилия взаимодействия с неопределенными коэффициентами, то решая (3.3), (3.4), можно подобрать эти коэффициенты так, чтобы в некотором смысле удовлетворить условиям (3.5). Таким образом, решение рассматриваемой задачи строится прямым методом. Обычно удобно и для большинства задач приемлемо обращать операторы (3.3), (3.4) по отдельным линиям $\xi_2 = \text{const}$, $\xi_1 = \text{const}$ и удовлетворить (3.5) в отдельных точках. При этом для построения решения (3.3), (3.4) можно воспользоваться приемами строительной механики с учетом некоторых специфических особенностей (3.3), (3.4) таких, как отсутствие изгиба относительно оси n, кручение с жесткостью, пропорциональной моменту инерции, наличие последних уравнений (3.3), (3.4) и т. п.

Если при расчленении исходных уравнений придерживаться только того принципа, чтобы расчлененные уравнения представляли собой обыкновенные дифференциальные уравнения и не иметь в виду использовать для их решения методы строительной механики, то в (3.3), (3.4) можно уменьшить количество усилий взаимодействия. Простые преобразования позволяют заключить, что

$$
l_i = \frac{D(1-\nu)}{2LR_i} n_i + f_i\,[u_1^{(i)}, u_2^{(i)}, w^{(i)}, \vartheta_k^{(i)}] \qquad \begin{pmatrix} i=2,1 \\ k=2,1 \end{pmatrix} \tag{3.6}
$$

где f_i представляют собой обыкновенные дифференциальные операторы соответственно по ξ_1 и ξ_2 относительно величин, входящих в квадратные скобки. Используя (3.6), можно исключить в (3.3), (3.4) l_1 и l_2, а следовательно, исключить последние уравнения в (3.3), (3.4) и два последних условия (3.5).

В общем случае при $\nu \neq 0$ правые части первых четырех уравнений (3.3), (3.4) содержат дополнительные усилия взаимодействия, определяемые величинами $N_{1\nu}$, $M_{1\nu}$ в (3.3) и $N_{2\nu}$, $M_{2\nu}$ в (3.4) по формулам

$$
\begin{aligned}
&-\nu\left(\frac{\partial \alpha_k N_{i\nu}}{\partial \xi_i} - \frac{1}{R_i}\frac{\partial \alpha_k M_{i\nu}}{\partial \xi_i}\right), && \nu\frac{\partial \alpha_i}{\partial \xi_k}N_{i\nu} \\
&-\nu\left(\frac{\alpha_i\alpha_k}{R_i}N_{i\nu} + \frac{\partial}{\partial \xi_i}\frac{\partial \alpha_k M_{i\nu}}{\alpha_i \partial \xi_i}\right), && -\nu\frac{\partial \alpha_i}{\partial \xi_k}M_{i\nu}
\end{aligned}
\quad
\begin{pmatrix} N_{i\nu} = B\varepsilon_k^{(i)} \\ M_{i\nu} = -D\chi_k^{(i)} \end{pmatrix}
\quad
\begin{pmatrix} i=1,2 \\ k=2,1 \end{pmatrix}
\tag{3.7}
$$

Эти величины характеризуют относительное удлинение поперек элемента и относительное изменение угла между его боковыми сторонами. Для их определения в общем случае потребуется дополнительно четыре условия сращивания

$$
\varepsilon_i^{(k)} = \frac{1}{\alpha_i}\frac{\partial u_i^{(i)}}{\partial \xi_i} + \frac{u_k^{(i)}}{\alpha_i\alpha_k}\frac{\partial \alpha_i}{\partial \xi_k} - \frac{w^{(i)}}{R_i}, \quad \chi_i^{(k)} = \frac{1}{\alpha_i}\frac{\partial \vartheta_i^{(i)}}{\partial \xi_i} + \frac{1}{\alpha_i\alpha_k}\frac{\partial \alpha_i}{\partial \xi_k}\vartheta_k^{(i)} \qquad \begin{pmatrix} i=1,2 \\ k=2,1 \end{pmatrix} \tag{3.8}
$$

При расчленении уравнений теории оболочек на (3.3), (3.4) происходит также расчленение краевых условий. Для уравнений (3.3) ставятся краевые условия на сторонах граничного контура $\xi_2 = \text{const}$, а для (3.4) на сторонах $\xi_1 = \text{const}$. Специфической в данном случае будет такая схема опирания, когда линейные элементы, будучи выделенными из оболочки, не находятся в равновесии под действием внешних нагрузок и реакций опор. При этом следует на одном конце элемента задать в виде неопределенных параметров три перемещения и угол поворота. В результате указанные величины определяются из условий равновесия рассматриваемого линейного элемента.

Выше была рассмотрена задача теории оболочек в перемещениях. Если формулировать ее в усилиях, то может оказаться целесообразным проводить неполное расчленение исходных уравнений, оставляя уравнения неразрывности деформаций срединной поверхности оболочки [3] нерасчлененными. Тогда пять усилий взаимодействия, входящие в (2.3), (2.4), должны определяться, исходя из приближенного удовлетворения условиям: $N_{12} = N_{21}$, $M_{12} = M_{21}$ и трем уравнениям неразрывности деформаций [3]. Кроме того, они должны удовлетворять всем краевым условиям.

4. **Примеры.** 1. *Изгиб плиты.* Полагая $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $R_1 = R_2 = \infty$, $u_1 = u_2 = 0$, $\xi_1 = x$, $\xi_2 = y$, получим из (3.3), (3.4) следующую систему уравнений для двух групп прямолинейных элементов вдоль x и y:

$$D\frac{\partial^4 w^{(1)}}{\partial x^4} = p_n - q_n - \frac{\partial m_1}{\partial x}, \qquad D\frac{\partial^2 \vartheta_2^{(1)}}{\partial x^2} = m_2$$

$$D\frac{\partial^4 w^{(2)}}{\partial y^4} = q_n - \frac{\partial m^{(2)}}{\partial y}, \qquad D\frac{\partial^2 \vartheta_1^{(2)}}{\partial y^2} = m_1 \tag{4.1}$$

Здесь $n_1 = n_2 = 0$ и в силу (3.6) исключены l_1, l_2. Количество усилий взаимодействия в (4.1) может быть сокращено до двух, так как из вторых уравнений (4.1) следует, что $\partial m_2 / \partial y = \partial m_1 / \partial x$. Условия сращивания (4.1) будут

$$w^{(1)} = w^{(2)}, \qquad \vartheta_2^{(1)} = \frac{\partial w^{(2)}}{\partial y} \quad \text{или} \quad \vartheta_1^{(2)} = \frac{\partial w^{(1)}}{\partial x} \tag{4.2}$$

2. *Круговая цилиндрическая оболочка.* Полагая $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = a$, $R_1 = \infty$, $R_2 = a$, $\xi_1 = x$, $\xi_2 = \psi$, $u_1 = u$, $u_2 = v$ из (3.3), (3.4) получим

$$B\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2} = -(p_1 - q_1), \qquad L\frac{\partial^2 u^{(2)}}{a^2 \partial \psi^2} = -q_1 + \frac{\partial n_2}{a \partial \psi}$$

$$L\frac{\partial^2 v^{(1)}}{\partial x^2} = -(p_2 - q_2) + \frac{\partial n_1}{\partial x}, \qquad \frac{B}{a^2}\left(\frac{\partial^2 v^{(2)}}{\partial \psi^2} - \frac{\partial w^{(2)}}{\partial \psi}\right) + \frac{D}{a^4}\left(\frac{\partial^2 v^{(2)}}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^3 w^{(2)}}{\partial \psi^3}\right) = -q_2,$$

$$D\frac{\partial^4 w^{(1)}}{\partial x^4} = (p_n - q_n) - \frac{\partial m_1}{\partial x}, \qquad \frac{D}{a_4}\left(\frac{\partial^3 v^{(2)}}{\partial \psi^3} + \frac{\partial^4 w^{(2)}}{\partial \psi^4}\right) - \frac{B}{a}\left(\frac{\partial v^{(2)}}{a \partial \psi} - \frac{w^{(2)}}{a}\right) = q_n - \frac{\partial m_2}{a \partial \psi} \tag{4.3}$$

$$\frac{D}{2}\frac{\partial^2 \vartheta_2^{(1)}}{\partial x^2} = m_2 + \frac{\partial l_1}{\partial x}, \qquad \frac{D}{2}\frac{\partial^2 \vartheta_1^{(2)}}{a^2 \partial \psi^2} = m_1 + \frac{\partial l_2}{a \partial \psi}$$

$$L\frac{\partial u^{(1)}}{a \partial \psi} = -n_1, \qquad L\frac{\partial v^{(2)}}{\partial x} = -n_2,$$

$$\frac{D}{2}\frac{\partial \vartheta_1^{(1)}}{a \partial \psi} = -l_1, \qquad \frac{D}{2}\frac{\partial \vartheta_2^{(2)}}{\partial x} = -l_2$$

Отсюда также следует, что $\partial m_2 / a\partial\psi = \partial m_1 / \partial x$ и достаточно удовлетворить одному из условий (3.5) относительно ϑ_1, ϑ_2.

Анализируя (4.3) и предпосылки расчета арочных плотин по способу арок-консолей [4], нетрудно заключить, что такого рода способ, если не учитывать изменение толщины плотины, сводится к решению (4.3) и выполнению соответствующих сращиваний при $u_1 = q_1 = n_1 = n_2 = 0$ и исключенных l_1, l_2. Действительно, способ арок-консолей состоит в том, что плотина разбивается на систему вертикальных консолей и горизонтальных круговых арок. Указанные элементы загружаются внешними нагрузками и внутренними усилиями взаимодействия так, чтобы их радиальные, тангенциальные перемещения и углы поворота совпадали. При $u_1 = q_1 = n_1 = n_2 = 0$ уравнения (4.3) переходят в уравнения относительно тех же перемещений и углов поворота консолей и арок, уравнения (3.5) — в условия сращивания, а q_2, q_n, m_1, m_2 отвечают внутренним усилиям взаимодействия способа арок-консолей.

Поступила 28 IV 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Михлин С. Г. Прямые методы в математической физике. М.—Л., ГИТТЛ 1950.
2. Ван Цзи-де. Прикладная теория упругости. М., ГИФМЛ, 1959.
3. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. ГИСЛ, 1951.
4. Datei C. La ripartizione del carico idrostatico nelle dighe a volta cilindrica. Energia elettr. 1958, 35. N 1, 1045—1052.