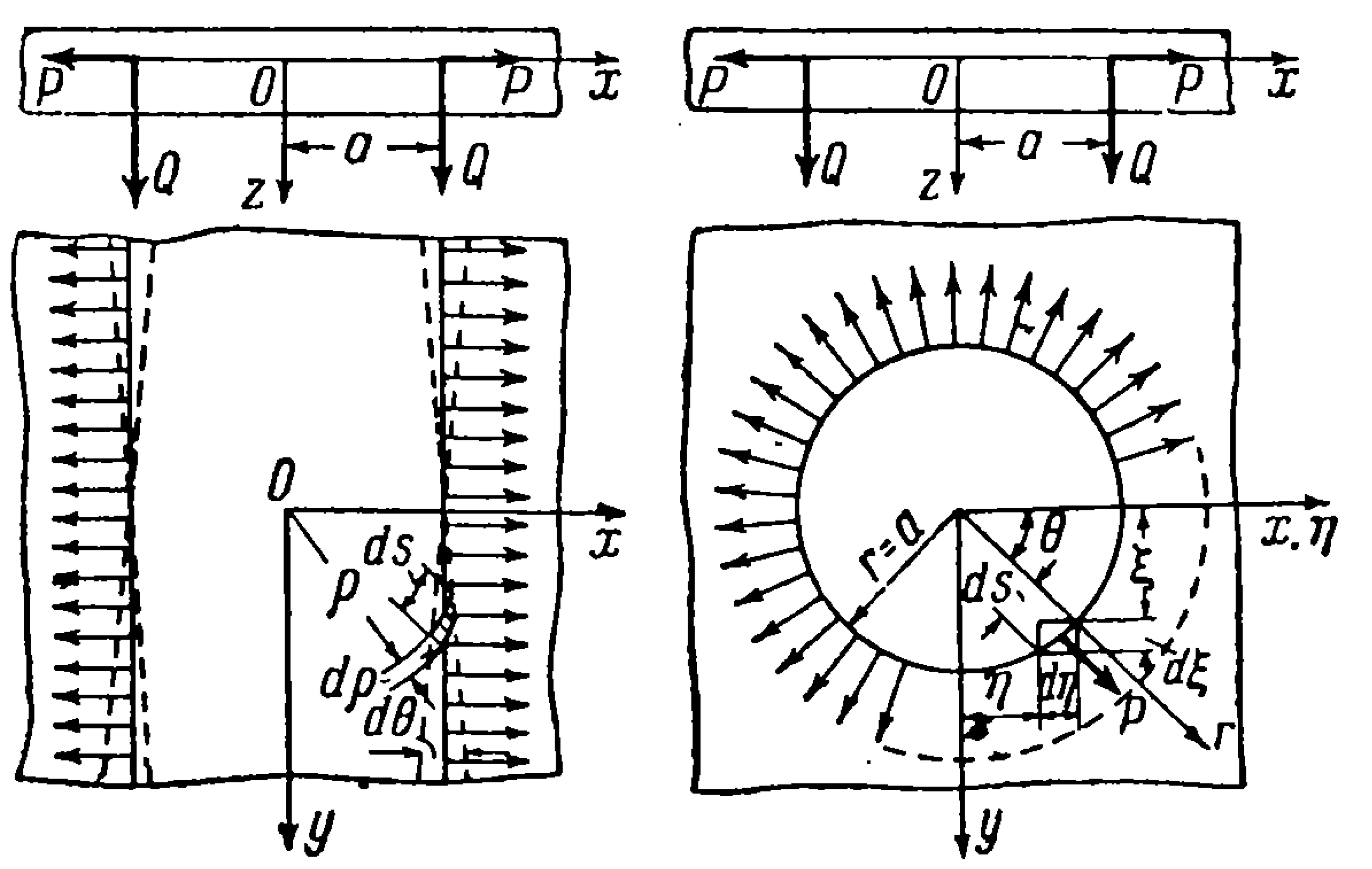
РЕШЕНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ПРИ ПОМОЩИ ЗАВИСИМОСТЕЙ МЕЖДУ ОСЕСИММЕТРИЧНЫМИ И ПЛОСКИМИ СОСТОЯНИЯМИ

А. Я. Александров

(Новосибирск)

Отысканию связей между решениями плоской и осесимметричной задач теории упругости и использованию этих связей для решения осесимметричных задач посвящен ряд работ.

В работах Вебера [1, 2] предложены интегральные преобразования, позволяющие осуществить переход от функции напряжений плоского состояния к функции напряжений некоторого осесимметричного состояния или обратно (при этих переходах граничные условия трансформируются; в работах Вебера — как и в некоторых других работах — остается невыясненным, какими должны быть граничные условия исходного состояния, чтобы получить заданные условия для того состояния, к которому осуществляется переход). Переход от плоского к осесимметричному состоянию пространства при помощи наложения осуществлен в работе В. И. Смирнова и С. Л. Соболева [3]. П. Ф. Папковичем [4] указана аналогия решений плоской и осесимметричной задач.



Фиг. 1

В. И. Моссаковский [5] решение осесимметричной задачи для полупространства проводит с использованием аналитических функций комплексного переменного. Голецкий [6] рассмотрел аналогию между плоскими и осесимметричными задачами для областей, ограниченных концентрическими окружностями и сферическими поверхностями соответственно. В работах Г. Н. Положего [7, 8] рассматриваются применения аналитических функций к осесимметрическим задачам и установлены некоторые взаимообратимые интегральные преобразования осессимметричных и плоских напряженных состояний. А. Мустафаев [9] рассмотрел некоторые случаи перехода при помощи приема Вебера. В. С. Чемерис [10] при помощи результатов Г. Н. Положего получил интегральное уравнение для осесимметричной задачи при заданных смещениях. В работе М. Я. Беленького [11] даны решения некоторых осессимметричных задач при помощи интегральных представлений и функций комплексного переменного.

Ниже выводятся зависимости между плоскими и осесимметричными состояниями для бесконечной плиты, причем дается определение такого плоского состояния плиты, которое после перехода даст осесимметричное состояние с заданными условиями на границах.

При помощи этих зависимостей решение осесимметрических задач для тел вращения произвольной формы сводится к определению двух аналитических функций из двух интегральных уравнений [12–14].

Здесь условимся, в дальнейшем все величины, относящиеся к плоскому состоянию, отмечать нижним индексом ||, а к осесимметричному состоянию—нижним индексом °.

§ 1. **Бесконечная плита. 1°. Связь плоского и осесимметричного состояния, полученная вращением плоского состояния.** Пусть бесконечная плита из изотропного или трансверсально-изотропного материала с осью упругой симметрии, параллельной оси z, находится в симметричном относительно плоскости yz плоском деформированном состоянии, вызванном действием вертикальных и горизонтальных нагрузок Q и P (фиг. 1, слева). Путем вращения действующих на плиту нагрузок на угол π относительно оси z получим некоторое трансформированное осесимметричное состояние.

Можно показать (например, заменив нагрузки Q и P нагрузками, равномерно распределенными по элементарным площадкам типа заштрихованной на фиг. 1 и учтя наложение, происходящее при повороте нагрузок), что нагрузкам Q и P, распределенным при плоском состоянии по двум линиям, параллельным оси y, при трансформированном осесимметричном состоянии будут соответствовать нагрузки (фиг. 2—3)

$$q(\rho)=\frac{2Q}{\sqrt{\rho^2-a^2}},\qquad p(\rho)=\frac{2aP}{\rho\sqrt{\rho^2-a^2}}\quad(\rho\geqslant a)$$
$$q(\rho)=p(\rho)=0\qquad(\rho<a)\tag{1.1}$$

В случае, когда $Q=Q(a)$, $P=P(a)$ при $a_0<a<\infty$ и $Q=P=0$ при $0<a<a_0$ имеем: (1.2)

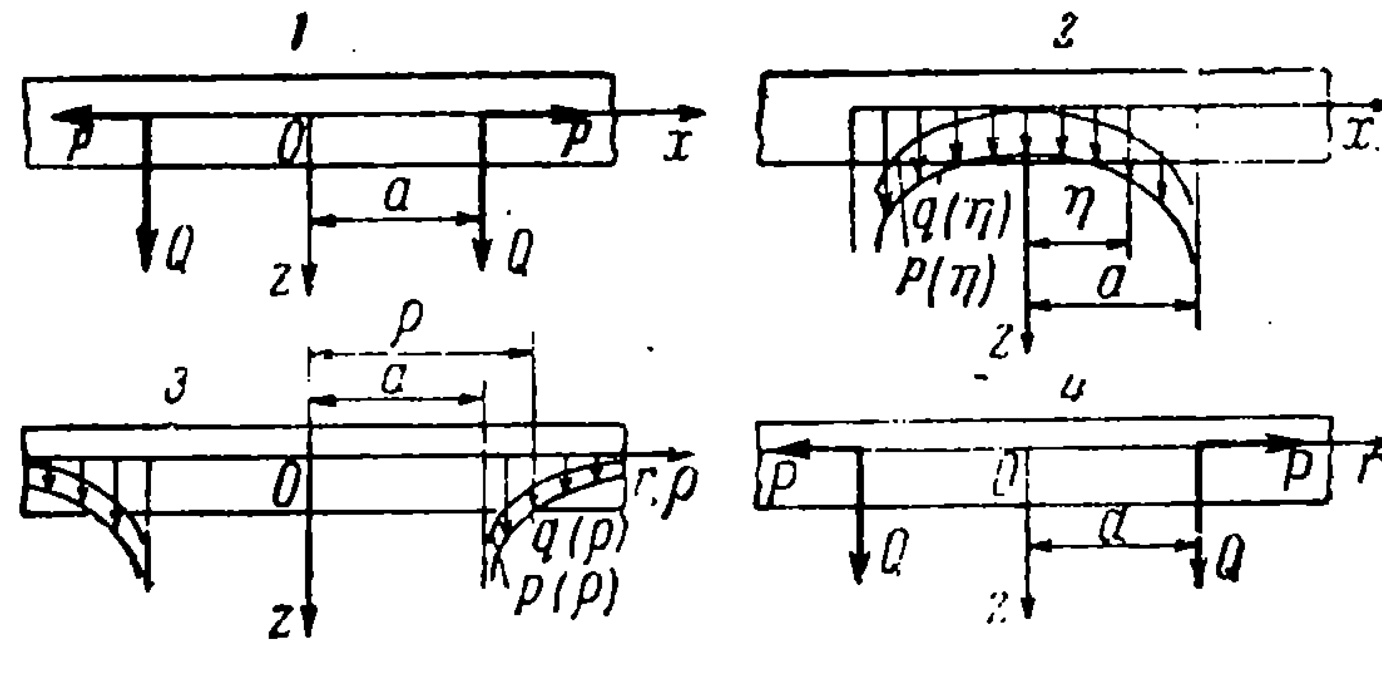
для $\rho\geqslant a_0$

$$q(\rho)=\int_{a_0}^{\rho}\frac{2Q(a)}{\sqrt{\rho^2-a^2}}\,da,$$

$$p(\rho)=\int_{a_0}^{\rho}\frac{2aP(a)}{\rho\sqrt{\rho^2-a^2}}\,da$$

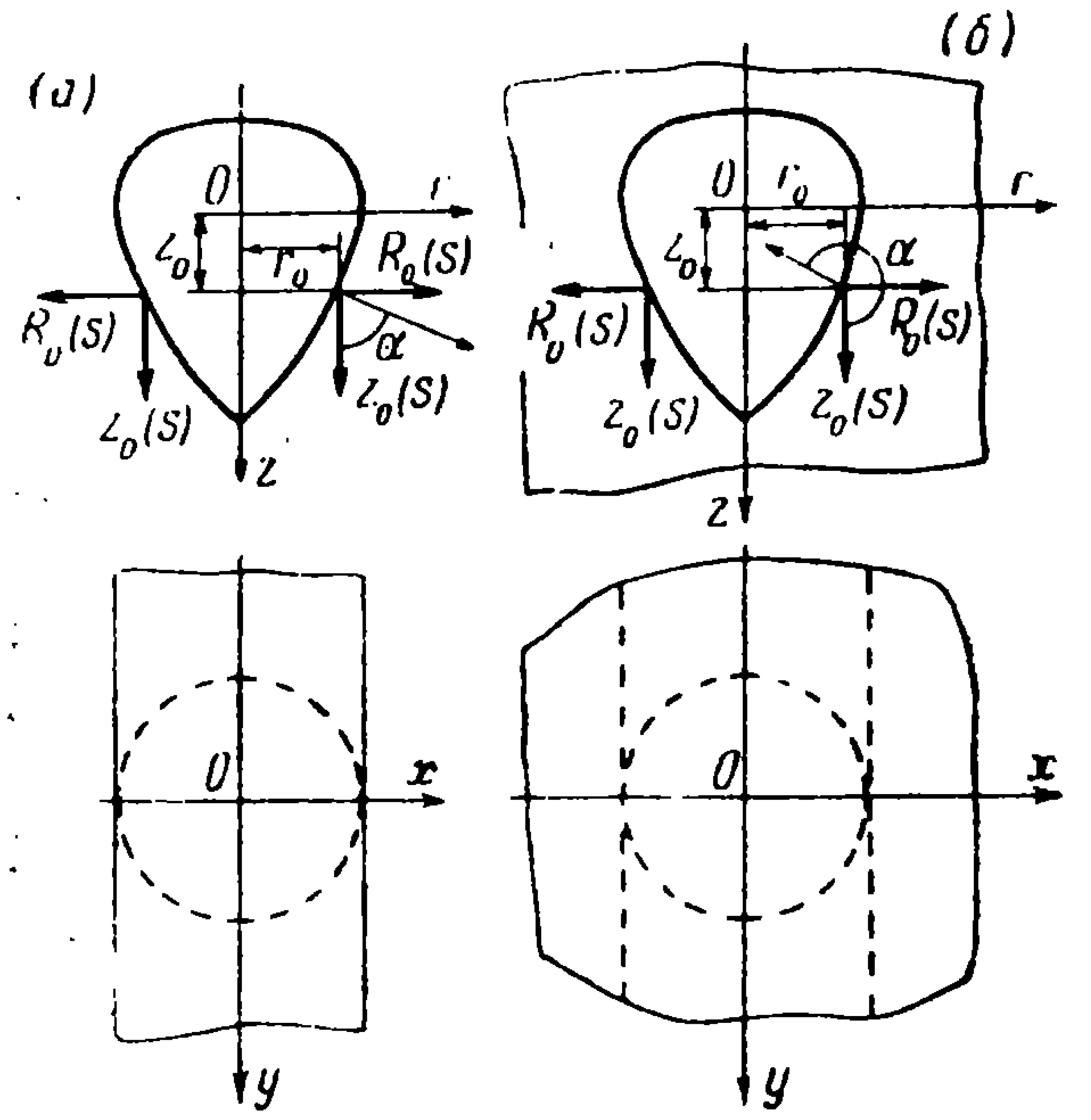
для $\rho<a_0$

$$q(\rho)=p(\rho)=0$$



Фиг. 2

Компоненты трансформированного осесимметричного состояния определяются интегрированием



$$\sigma_{r_0}^*=\int_0^{\pi}(\sigma_{x\parallel}\cos^2\theta+\sigma_{y\parallel}\sin^2\theta)\,d\theta\tag{1.3}$$

$$\sigma_{\theta_0}^*=\int_0^{\pi}(\sigma_{y\parallel}\cos^2\theta+\sigma_{x\parallel}\sin^2\theta)\,d\theta$$

$$\sigma_{z_0}^*=\int_0^{\pi}\sigma_{z\parallel}\,d\theta$$

$$\tau_{rz^\circ}^*=\int_0^{\pi}\tau_{xz\parallel}\cos\theta\,d\theta$$

$$u_\circ^*=\int_0^{\pi}u_\parallel\cos\theta\,d\theta,\qquad w_0^*=\int_0^{\pi}w_\parallel\,d\theta$$

Фиг. 3

Здесь $\sigma_{x\parallel}(x,z)$, $\sigma_{z\parallel}(x,z)$, $\sigma_{y\parallel}(x,z)$, $\tau_{xz\parallel}(x,z)$, $w_\parallel(x,z)$, $u_\parallel(x,z)$ — напряжения и перемещения плоского состояния, $x=r\cos\theta$. При изотропной плите $\sigma_{y\parallel}=\nu(\sigma_{x\parallel}+\sigma_{z\parallel})$, при трансверсально-изотропной $\sigma_{y\parallel}=\nu_{xy}\sigma_{x\parallel}+\nu_{zx}\sigma_{z\parallel}$, ν, ν_{xy}, ν_{zx} — коэффициенты Пуассона.

Перейдем от интегрирования по θ к интегрированию по x и преобразуем зависимости (1.3) к виду

$$\sigma_{r^\circ}^*+\sigma_{\theta^\circ}^*=\int_{-r}^{r}(\sigma_{x\parallel}+\sigma_{y\parallel})\frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}},\qquad \sigma_{z^\circ}^*=\int_{-r}^{r}\sigma_{z\parallel}\frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

$$\sigma_{r^\circ}^*-\sigma_{\theta^\circ}^*=\int_{-r}^{r}(\sigma_{x\parallel}-\sigma_{y\parallel})\frac{2x^2-r^2}{r^2}\frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}},\qquad \tau_{rz^\circ}^*=\int_{-r}^{r}\tau_{xz\parallel}\frac{x}{r}\frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}}\tag{1.4}$$

$$u_\circ^*=\int_{-r}^{r}u_\parallel\frac{x}{r}\frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}},\qquad w_\circ^*=\int_{-r}^{r}w_\parallel\frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

В случае температурной задачи температурные расширения плоского и осесимметричного состояний связываются зависимостью

$$kT_\circ = \int_0^\pi kT_\parallel d\theta = 2\int_0^r kT_\parallel \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} \tag{1.5}$$

Здесь $T_\parallel(x, z)$, $T_\circ(r, z)$ — температуры плоского и осесимметричного состояний, k — коэффициент линейного расширения, постоянный или зависящий от температуры. Аналогичные зависимости могут быть получены и в других случаях, допускающих наложение (например, для динамических задач).

Полученные зависимости позволяют определить такие нагрузки (или другие условия на поверхностях, или по объему плиты) при плоском состоянии, которые после перехода к осесимметричному состоянию при помощи описанного приема дадут заданные нагрузки (или другие условия) осесимметричного состояния.

Полагая, например, нагрузки осесимметричного состояния q (ρ) и p (ρ) заданными и разрешая уравнения (1.2) относительно функций Q (a) и P (a) (подстановками $u = \rho^{-2}$ и $v = a^{-2}$ эти уравнения приводятся к уравнениям Абеля), найдем такие нагрузки плоского состояния, которые после вращения дадут заданные осесимметричные

$$Q(a) = \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial a}\int_{a_\circ}^a q(\rho)\frac{\rho d\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}, \qquad P(a) = \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial a}\int_{a_0}^a p(\rho)\frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}} \quad (a_0 < a < \infty)$$

$$Q(a) = P(a) = 0 \quad (0 < a < a_0) \tag{1.6}$$

Если условия осесимметричной задачи заданы в смещениях, то аналогичным путем находим

$$u_\parallel = \frac{1}{\pi x}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^x u_\circ \frac{r^2 dr}{\sqrt{x^2 - r^2}}, \qquad w_\parallel = \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^x w_\circ \frac{r dr}{\sqrt{x^2 - r^2}} \tag{1.7}$$

В случае температурной задачи

$$kT_\parallel = \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^x kT_\circ \frac{dx}{\sqrt{x^2 - r^2}}. \tag{1.8}$$

Чтобы решить осесимметричную задачу, следует при помощи (1.6) — (1.8) определить нагрузки, смещения на границе или другие условия соответствующего плоского состояния, решить вспомогательную плоскую задачу и найти напряжения и смещения этого состояния. Вводя эти напряжения и смещения в зависимости (1.4) и (1.5), определим напряжения и смещения искомого осесимметричного состояния.

Отметим, что при описанном наложении путем вращения плоского состояния можно получить не всякое осесимметричное состояние, т. е. что при некоторых видах осесимметричного нагружения зависимости (1.6) — (1.8) не дают возможности получить соответствующее реальное плоское состояние. Если, например, при осесимметричном состоянии нагрузки P или Q приложены по окружности (фиг. 1 справа), то определить нагрузки соответствующего плоского состояния непосредственно при помощи соотношений (1.6) нельзя.

В этом случае следует либо использовать другое наложение, описанное в п. 2°, либо произвести некоторые дополнительные операции. Можно, например, сперва рассмотреть осесимметричное состояние, вызванное действием нагрузок q_0 и p_0, распределенных равномерно в пределах от $\rho = a_0$ до ∞. При помощи зависимостей (1 6) находим, что для того, чтобы получить осесимметричное состояние с такими нагрузками, надо вращать плоское состояние, вызванное нагрузками

$$Q(a) = \frac{q_0}{\pi}\frac{a}{\sqrt{a^2 - a_0^2}}, \qquad P(a) = \frac{p_0}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{a_0}{a} + \frac{a_0}{\sqrt{a^2 - a_0^2}}\right) \quad (a_0 < a < \infty)$$

$$Q(a) = P(a) = 0 \qquad (a_0 > a > 0) \tag{1.9}$$

Вычислив компоненты этого плоского состояния, перейдем при помощи зависимостей (1.4) к осесимметричному (вызванному нагрузками q_0 и p_0, распределенными как указано выше). Дифференцируя по a_0 выражения компонентов полученного таким путем осесимметричного состояния и заменяя q_0 и p_0 на Q и P, найдем осесимметричное состояние от действия нагрузок Q и P, распределенных по окружности радиуса a_0.

Заметим, что найти осесимметричное состояние при действии нагрузок P или Q по одной окружности (фиг. 1 справа) можно и другим путем. Пусть $\sigma_{r^\circ}(r, z, \rho)$, $\sigma_{z^\circ}(r, z, \rho)$, $\tau_{rz^\circ}(r, z, \rho)$, $\sigma_{\theta^\circ}(r, z, \rho)$ — компоненты искомого осесимметричного состояния, ρ — радиус окружности, по которой приложена нагрузка. Компоненты осесимметричного состояния, вызванного нагрузками $q(\rho)$ и $p(\rho)$, распределенными по закону (1.1) можно представить в виде интегралов, стоящих в правых частях выражений (1.10) и (1.11). С другой стороны, компоненты этого последнего состояния $\sigma^*_{r^\circ}(r, z, a)$, $\sigma^*_{\theta^\circ}(r, z, a)$, ... могут быть получены вращением плоского состояния по фиг. 2—1 и вычислены по формулам (1.4). Таким путем можно получить:

для случая действия нагрузки Q

$$\sigma^*_{r^\circ}(r, z, a) = \int_a^\infty \sigma_{r^\circ}(r, z, \rho)\frac{2Q}{\sqrt{\rho^2 - a^2}}\,d\rho$$

$$\sigma^*_{\theta^\circ}(r, z, a) = \int_a^\infty \sigma_{\theta^\circ}(r, z, \rho)\frac{2Q}{\sqrt{\rho^2 - a^2}}\,d\rho \tag{1.10}$$

. . . .

для случая действия нагрузки P

$$\sigma^*_{r^\circ}(r, z, a) = \int_a^\infty \sigma_{r^\circ}(r, z, \rho)\frac{2aP}{\rho\sqrt{\rho^2 - a^2}}\,d\rho$$

$$\sigma^*_{\theta^\circ}(r, z, a) = \int_a^\infty \sigma_{\theta^\circ}(r, z, \rho)\frac{2aP}{\rho\sqrt{\rho^2 - a^2}}\,d\rho \tag{1.11}$$

. . . .

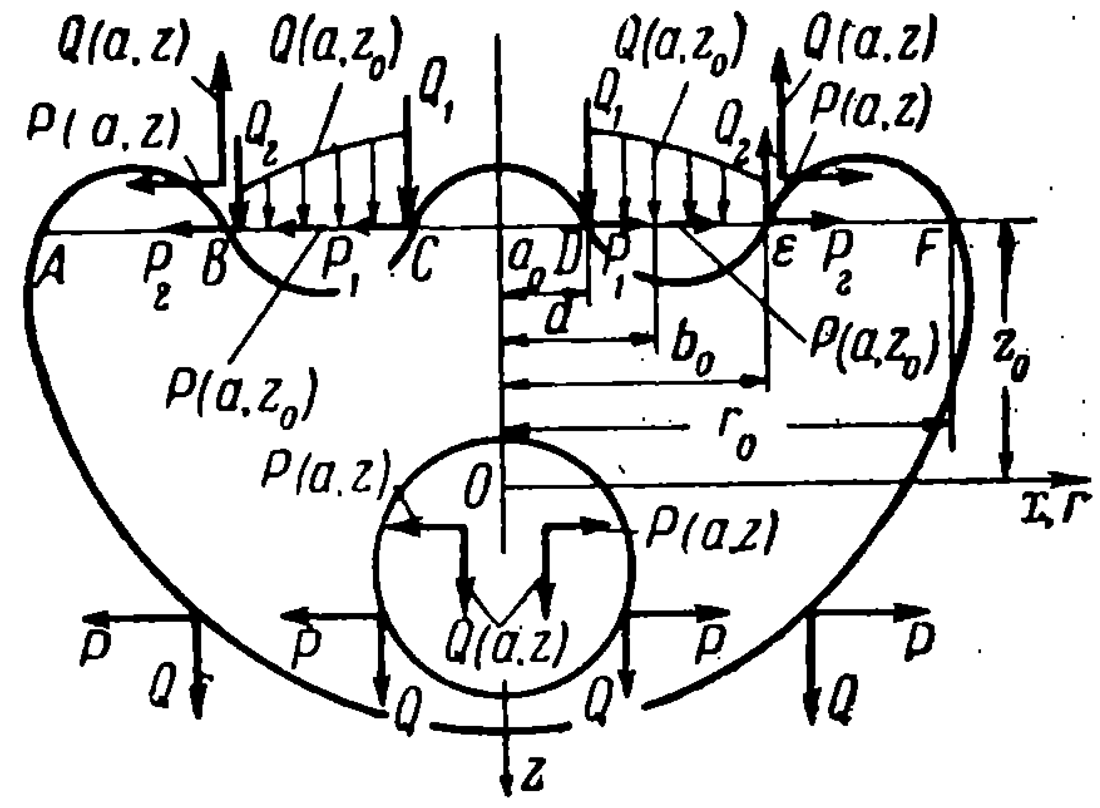


Рис. 4

Зависимости (1.10) и (1.11) при помощи указанных выше подстановок приводятся к уравнениям Абеля, разрешая которые, находим:

для случая действия нагрузки Q

$$\sigma_{r^\circ}(r, z, a) = \frac{2a}{\pi}\frac{\partial}{\partial a}\int_\infty^a \frac{a\sigma^*_{r^\circ}(r, z, \rho)}{\rho\sqrt{\rho^2 - a^2}}\,d\rho, \quad \sigma_{\theta^\circ}(r, z, a) = \frac{2a}{\pi}\frac{\partial}{\partial a}\int_\infty^a \frac{a\sigma^*_{\theta^\circ}(r, z, \rho)}{\rho\sqrt{\rho^2 - a^2}}\,d\rho, \ldots \tag{1.12}$$

для случая действия нагрузки P

$$\sigma_{r^\circ}(r, z, a) = \frac{2a^2}{\pi}\frac{\partial}{\partial a}\int_\infty^a \frac{a\sigma^*_{r^\circ}(r, z, \rho)}{\rho^2\sqrt{\rho^2 - a^2}}\,d\rho, \quad \sigma_{\theta^\circ}(r, z, a) = \frac{2a^2}{\pi}\frac{\partial}{\partial a}\int_\infty^a \frac{a\sigma^*_{r^\circ}(r, z, \rho)}{\rho^2\sqrt{\rho^2 - a^2}}\,d\rho, \ldots \tag{1.13}$$

2°. *Связь плоского и осесимметричного состояний, полученная линейным смещением осесимметричного состояния.* Пусть бесконечная плита из изотропного или трансверсально-изотропного материала с осью упругости, параллельной оси z, находится в осесимметричном состоянии, вызванном действием вертикальных и радиальных нагрузок Q и P (фиг. 1 справа и фиг. 2—4). Путем перемещения действующих на плиту нагрузок вдоль оси y от $y = -\infty$ до $y = \infty$ получим некоторое трансформированное плоское состояние.

Можно показать (например, заменив нагрузки Q и P нагрузками, равномерно распределенными по элементарным площадкам типа заштрихованной на фиг. 1 и учтя наложение, происходящее при перемещении нагрузок), что нагрузкам Q и P, действующим при осесимметричном состоянии по одной окружности, при трансформированном плоском состоянии будут соответствовать нагрузки (фиг. 2—2)

$$q(\eta) = \frac{2aQ}{\sqrt{a^2 - \eta^2}}, \quad p(\eta) = \frac{2\eta P}{\sqrt{a^2 - \eta^2}} \quad (\eta \leqslant a) \tag{1.14}$$

$$q(\eta) = p(\eta) = 0 \quad (\eta > a)$$

В случае, когда $Q = Q(a)$, $P = P(a)$ при $0 < a < c$ и $Q = P = 0$ при $\infty > a > c$

$$q(\eta) = \int_\eta^c \frac{2aQ(a)}{\sqrt{a^2-\eta^2}}\,da, \qquad p(\eta) = \int_\eta^c \frac{2\eta P(a)}{\sqrt{a^2-\eta^2}}\,da \qquad (\eta \leqslant c)$$

$$q(\eta) = p(\eta) = 0 \qquad (\eta > c) \tag{1.15}$$

Компоненты трансформированного плоского состояния находятся интегрированием

$$\sigma_{x\parallel}^* = \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma_{r^\circ}\cos^2\theta + \sigma_{\theta^\circ}\sin^2\theta)\,dy, \quad \sigma_{y\parallel}^* = \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma_{r^\circ}\sin^2\theta + \sigma_{\theta^\circ}\cos^2\theta)\,dy, \tag{1.16}$$

$$\sigma_{z\parallel}^* = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{z^\circ}\,dy, \quad \tau_{xz\parallel}^* = \int_{-\infty}^{\infty} \tau_{rz^\circ}\cos\theta\,dy, \quad u_\parallel^* = \int_{-\infty}^{\infty} u_\circ\cos\theta\,dy, \quad w_\parallel^* = \int_{-\infty}^{\infty} w_\circ\,dy$$

Интегралы по y в пределах от $y = -\infty$ до $y = \infty$ заменим удвоенными интегралами по y в пределах от $y = 0$ до $y = \infty$ и перейдем от интегрирования по y к интегрированию по r. (Выражение dy находится частным дифференцированием соотношения $x^2 + y^2 = r^2$, $\sin\theta = y/r$, $\cos Q = x/r$)

$$\sigma_{x\parallel}^* - \sigma_{y\parallel}^* = 2\int_x^\infty (\sigma_{r^\circ} - \sigma_{\theta^\circ}) \frac{2x^2 - r^2}{r\sqrt{r^2-x^2}}\,dr, \qquad \sigma_{z\parallel}^* = 2\int_x^\infty \sigma_{z^\circ}\frac{r\,dr}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

$$\sigma_{x\parallel}^* + \sigma_{y\parallel}^* = 2\int_x^\infty (\sigma_{r^\circ} + \sigma_{\theta^\circ}) \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2-x^2}}, \qquad \tau_{xz\parallel}^* = 2\int_x^\infty \tau_{rz^\circ}\frac{x\,dr}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

$$u_\parallel^* = 2\int_x^\infty u_\circ \frac{x\,dr}{\sqrt{r^2-x^2}}, \qquad w_\parallel^* = 2\int_x^\infty w_\circ\frac{r\,dr}{\sqrt{r^2-x^2}} \tag{1.17}$$

В случае температурной задачи температурные расширения осесимметричного и плоского состояний связываются зависимостью

$$kT_\parallel^* = \int_{-\infty}^{\infty} kT_\circ\,dy = 2\int_x^\infty kT_\circ \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2-x^2}} \tag{1.18}$$

Аналогичные зависимости можно получить и для других случаев, допускающих наложение.

Разрешим первое из уравнений (1.17) относительно компонентов осесимметричного состояния. Введем обозначения $g = r^2$, $h = x^2$, умножим обе части уравнения на $(h - H)^{-1/2}\,dh$, проинтегрируем их от H до B^2 и, использовав формулу Дирихле, изменим порядок интегрирования

$$\int_H^{B^2} \frac{\sigma_{x\parallel}^* - \sigma_{y\parallel}^*}{\sqrt{h-H}}\,dh = \int_H^{B^2} dh \int_h^{B^2} (\sigma_{r^\circ} - \sigma_{\theta^\circ}) \frac{2h-g}{g\sqrt{g-h}\sqrt{h-H}}\,dg =$$

$$= \int_H^{B^2} \frac{\sigma_{r^\circ} - \sigma_{\theta^\circ}}{g}\,dg \int_H^g \frac{(2h-g)\,dh}{\sqrt{g-h}\sqrt{h-H}} = \int_H^{B^2} \pi H \frac{\sigma_{r^\circ} - \sigma_{\theta^\circ}}{g}\,dg$$

Вернувшись к старым переменным, продифференцировав обе части по r, выполнив интегрирование по частям и положив $B \to \infty$, найдем

$$\sigma_{r^\circ} - \sigma_{\theta^\circ} = -\frac{r}{\pi}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\sigma_{x\parallel}^* - \sigma_{y\parallel}^*}{r^2}\sqrt{x^2-r^2}\right]_r^{B\to\infty} - \frac{1}{\pi}\int_r^\infty \frac{\partial(\sigma_{x\parallel}^* - \sigma_{y\parallel}^*)}{\partial x}\,\frac{2x^2-r^2}{r^2\sqrt{x^2-r^2}}\,dx$$

Первое слагаемое в правой части можно представить в виде

$$\frac{2}{\pi r^2}\lim\,[x(\sigma_{x\parallel}^* - \sigma_{y\parallel}^*)] \qquad \text{при } x \to \infty$$

Решая аналогичным путем остальные уравнения (1.17) и принимая во внимание характер убывания напряжений на бесконечности, найдем

$$\sigma_{r^\circ} - \sigma_{\theta^\circ} = -\frac{1}{\pi}\int_r^\infty \frac{\partial(\sigma_{x\parallel}{}^* - \sigma_{y\parallel}{}^*)}{\partial x}\frac{2x^2 - r^2}{r^2\sqrt{x^2 - r^2}}dx + \frac{c}{r^2}$$

$$\tau_{z^\circ} = -\frac{1}{\pi}\int_r^\infty \frac{\partial\sigma_{z\parallel}{}^*}{\partial x}\frac{dx}{\sqrt{x^2 - r^2}} \qquad \left(c = \frac{2}{\pi}\lim_{x\to\infty}[x(\sigma_{x\parallel}{}^* - \sigma_{y\parallel}{}^*)]\right)$$

$$\sigma_{r^\circ} + \sigma_{\theta^\circ} = -\frac{1}{\pi}\int_r^\infty \frac{\partial(\sigma_{x\parallel}{}^* + \sigma_{y\parallel}{}^*)}{\partial x}\frac{dx}{\sqrt{x^2 - r^2}}, \qquad w_\circ = -\frac{1}{\pi}\int_r^\infty \frac{\partial w_\parallel{}^*}{\partial x}\frac{dx}{\sqrt{x^2 - r^2}}$$

$$\tau_{rz^\circ} = -\frac{1}{\pi}\int_r^\infty \frac{\partial\tau_{xz\parallel}{}^*}{\partial x}\frac{x\,dx}{r\sqrt{x^2 - r^2}}, \qquad u_\circ = -\frac{1}{\pi}\int_r^\infty \frac{\partial u_\parallel{}^*}{\partial x}\frac{x\,dx}{r\sqrt{x^2 - r^2}} \tag{1.19}$$

Если главный вектор усилий, приложенных к контуру, равен нулю, то $c = 0$.

Заметим, что если в зависимости (1.17) ввести выражения напряжений осесимметричного состояния через функцию напряжений $\psi(r, z)$ при помощи выражений

$$\sigma_{r^\circ} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\nabla^2\psi - \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\right), \qquad \sigma_{z^\circ} = \frac{\partial}{\partial z}\left[(2-\nu)\nabla^2\psi - \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right]$$

$$\sigma_{\theta^\circ} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\nabla^2\psi - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right), \qquad \tau_{rz^\circ} = \frac{\partial}{\partial r}\left[(1-\nu)\nabla^2\psi - \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right]$$

$$\nabla^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

то можно найти

$$\psi(r, z) = -\frac{1}{\pi}\int dz\int dz\int\left\{\frac{\partial}{\partial r}r\int_r^\infty[(2-\nu)\sigma_{x\parallel}{}^* + (1-\nu)\sigma_{z\parallel}{}^*]\frac{dx}{x\sqrt{x^2 - r^2}}\right\}dz +$$
$$+ \alpha(r)z^2 + \beta(r)z + \gamma(r) \tag{1.20}$$

Вводя выражение (1.20) в (1.17), получим систему интегральных уравнений для определения функций $\alpha(r)$, $\beta(r)$, $\gamma(r)$.

Чтобы решить осесимметричную задачу, следует при помощи зависимостей (1.14)—(1.18) найти граничные условия соответствующего трансформированного плоского состояния и, решив вспомогательную плоскую задачу, найти напряжения и смещения этого состояния. Вводя эти напряжения и смещения в выражения (1.19), определим искомое осесимметричное состояние.

§ 2. Решение осесимметричной задачи для тела вращения при помощи аналитических функций. *3°. Сплошное тело.* Пусть некоторый цилиндр из изотропного или трансверсально-изотропного материала с осью упругой симметрии, параллельной оси z находится в плоском деформированном состоянии, симметричном относительно плоскости yz (фиг. 3а). Вращением контура поперечного сечения цилиндра относительно оси z вырежем из цилиндра тело вращения. Контур поперечного сечения цилиндра сперва будем предполагать таким, что такая операция возможна, а именно будем полагать, что функция $r(z)$ однозначна для половины контура, лежащей по одну сторону от оси z. Для этого тела произведем наложение напряженного и деформированного состояний путем вращения их на угол π относительно оси z. Компоненты полученного таким путем трансформированного осесимметричного состояния определяются теми же зависимостями (1.3) — (1.5), что и для бесконечной плиты.

В зависимости (1.4) введем известные представления компонентов плоского состояния через две аналитические функции. В случае изотопного материала

$$\sigma_{x\parallel} + \sigma_{z\parallel} = 2[\Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)}], \qquad \sigma_{z\parallel} - \sigma_{x\parallel} + 2i\tau_{xz\parallel} = 2[\bar{\zeta}\Phi'(\zeta) + \Psi(\zeta)]$$

$$2\mu(u_\parallel + iw_\parallel) = (3-4\nu)\varphi(\zeta) - \overline{\zeta\varphi'(\zeta)} - \overline{\Psi(\zeta)} \tag{2.1}$$

Здесь $\zeta = x + iz$, $\bar{\zeta} = x - iz$, μ — постоянная Ляме.

Аналитические функции $\Phi(\zeta)$, $\Psi(\zeta)$, $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ представим интегралами Коши, изменим порядок интегрирования и выполним интегрирование по x. Из симметрии плоского состояния относительно плоскости yz следует, что

$$\Phi(t) = \overline{\Phi(-\bar{t})}, \qquad \varphi(t) = -\overline{\varphi(-\bar{t})}$$

где $t = r + iz$, $\bar{t} = r - iz$, $t_0 = r_0 + iz_0$, $\bar{t}_0 = r_0 - iz_0$, r, z, r_0, z_0 — координаты точек контура меридионального сечения тела. Разрез плоскости комплексного переменного будем проводить по рассматриваемому телу вблизи его контура, а интегрирование по контуру заменим интегрированием вдоль берегов разреза. Заметим, что входящий в подынтегральные выражения корень $\sqrt{(t-t_0)(t+\bar{t}_0)}$ при переходе от одного берега разреза к другому меняет знак.

В результате преобразований значения компонентов осесимметричного состояния на контуре тела выражаются через контурные значения двух аналитических функций следующим образом:

$$\sigma_{r_0} + \sigma_{\theta_0} = -i \int_{t_0}^{-\bar{t}_0} [2(1+2\nu)\Phi(t) - (t - t_0 + \bar{t}_0)\Phi'(t) - \Psi(t)] \frac{dt}{\sqrt{(t-t_0)(t+\bar{t}_0)}}$$

$$\sigma_{r^\circ} - \sigma_{\theta^\circ} = -\frac{i}{(t_0+\bar{t}_0)^2} \int_{t_0}^{-\bar{t}_0} [2(1-2\nu)\Phi(t) - (t - t_0 + \bar{t}_0)\Phi'(t) - \Psi(t)] \times$$

$$\times \frac{2[2t - (t_0 - \bar{t}_0)]^2 - (t_0 + \bar{t}_0)^2}{\sqrt{(t-t_0)(t+\bar{t}_0)}} dt$$

$$\sigma_{z^\circ} = -i \int_{t_0}^{-\bar{t}_0} [2\Phi(t) + (t - t_0 + \bar{t}_0)\Phi'(t) + \Psi(t)] \frac{dt}{\sqrt{(t-t_0)(t+\bar{t}_0)}} \tag{2.2}$$

$$\tau_{rz^\circ} = -\frac{1}{t_0+\bar{t}_0} \int_{t_0}^{-\bar{t}_0} [(t - t_0 + \bar{t}_0)\Phi'(t) + \Psi(t)] \frac{2t - t_0 + \bar{t}_0}{\sqrt{(t-t_0)(t+\bar{t}_0)}} dt$$

$$u_\circ = -\frac{i}{2\mu(t_0+\bar{t}_0)} \int_{t_0}^{-\bar{t}_0} [(3-4\nu)\varphi(t) - \psi(t) - (t - t_0 + \bar{t}_0)\varphi'(t)] \frac{2t - t_0 + \bar{t}_0}{\sqrt{(t-t_0)(t+\bar{t}_0)}} dt$$

$$w_\circ = -\frac{1}{2\mu} \int_{t_0}^{-\bar{t}_0} [(3-4\nu)\varphi(t) + \psi(t) + (t - t_0 + \bar{t}_0)\varphi'(t)] \frac{dt}{\sqrt{(t-t_0)(t+\bar{t}_0)}}$$

Интегрирование ведется по положительной ветви корня.

Заметим, что если при записи выражений (2.1) поменять местами действительную и мнимую оси, то выражения (2.2) получат более симметричный (иногда более удобный) вид: везде вместо $-\bar{t}_0$ будет фигурировать $\bar{t}_0$.

4°. *Пространство с полостью.* Пусть упругое пространство с осесимметричной полостью находится в осесимметричном напряженном состоянии (фиг. 3б). Перемещением контура меридионального сечения полости вдоль оси y от $y = -\infty$ до $y = \infty$ вырежем в пространстве цилиндрическую полость (чтобы такая операция была возможна, для контура меридионального сечения полости сначала вводим то же ограничение, что и для контура сечения цилиндра в п. 3°). Для пространства с такой цилиндрической полостью можно произвести наложение напряженного и деформированного состояний путем перемещения их вдоль оси y от $y = -\infty$ до $y = \infty$. Компоненты полученного таким путем трансформированного плоского состояния определяются теми же зависимостями (1.16) — (1.19), что и для бесконечной плиты.

Входящие в зависимости (1.19) производные компонентов плоского состояния по x могут рассматриваться как компоненты некоторого другого плоского состояния, и их при помощи выражений (2.1) можно представить через две аналитические функции. Заметим, что, так как компоненты $\sigma_{x\parallel}$, $\sigma_{z\parallel}$, ... характеризуют плоское состояние, симметричное относительно плоскости yz, то компоненты $\partial\sigma_{x\parallel}/\partial x, \ldots \partial\sigma_{z\parallel}/\partial x$ характеризуют плоское состояние, кососимметричное относительно этой плоскости. Отсюда следует, что $\Phi(t) = -\overline{\Phi(-\bar{t})}, \varphi(t) = \overline{\varphi(-\bar{t})}$. Производя преобразования, аналогичные описанным в п. 3°, получим значения компонентов осесимметричного состояния на контуре тела из изотропного материала, выраженные через контурные значения двух аналитических функций. При равенстве нулю главного вектора усилий, приложенных к контуру полости, эти выражения совпадают с выражениями (2.2).

5°. *Тело произвольной формы.* То обстоятельство, что два различных наложения приводят к аналогичным представлениям компонентов осесимметричного состояния через контурные значения аналитических функций, заставляет предположить, что эти представления являются достаточно общими и что можно отказаться от введенного п. п. 3° и 4° требования однозначности функции $r(z)$ для половины контура поперечного сечения тела, лежащей по одну сторону от оси z.

Покажем возможность наложений, проводимых несколько иначе, чем в п. п. 3° и 4°, но приводящих к аналогичным результатам при снятии этого ограничения. Тело в плоском деформированном состоянии будем рассматривать как часть упругого пространства, нагруженного нагрузками Q и P, приложенными по контуру $r(z)$ и нагрузками $Q(a, z)$ и $P(a, z)$, распределенными вне меридионального сечения тела (фиг. 4). (Заметим, что при заданных граничных условиях такое нагружение многозначно.) Вращением этих нагрузок на угол π относительно оси z получим осесимметричное состояние тела. Вследствие вращения нагрузок плоского состояния Q_1, Q_2, $Q(a, z_0)$, P_1, P_2, $P(a, z_0)$, приложенных на участках BC и DE прямой AF в соответствии с выражениями (1.1) и (1.2) при $\rho > b_0 > a_0$, появятся осесимметричные нагрузки вида

$$q(\rho, z_0) = \frac{2Q_1}{\sqrt{\rho^2 - a_0^2}} + \frac{2Q_2}{\sqrt{\rho^2 - b_0^2}} + \int_{a_0}^{b_0} \frac{2Q(a, z_0)}{\sqrt{\rho^2 - a^2}}\, da$$

$$p(\rho, z_0) = \frac{2a_0 P_1}{\rho\sqrt{\rho^2 - a_0^2}} + \frac{2b_0 P_2}{\rho\sqrt{\rho^2 - a_0^2}} + \int_{a_0}^{b_0} \frac{2aP(a, z_0)}{\rho\sqrt{\rho^2 - a^2}}\, da \tag{2.3}$$

При определенных соотношениях между нагрузками Q_1, Q_2, P_1, P_2 и нагрузками $Q(a, z_0)$ и $P(a, z_0)$ можно получить $q(\rho, z_0) = p(\rho, z_0) = 0$ при $\rho > b_0 > a_0$. Отсюда следует, что вращением плоского состояния пространства и без ограничения, наложенного на контур в пп. 3° и 4°, может быть получено осесимметричное состояние без нагрузок, действующих внутри меридионального сечения тела.

Выясним, можно ли в этом случае представить зависимости (1.1) в виде (1.2).

Пусть интегрирование компонентов плоского состояния (выражения (1.4)) ведется вдоль прямой AF, проходящей на участках BC и DE через области, где приложены нагрузки Q_1, Q_2, P_1, P_2, $Q(a, z_0)$, $P(a, z_0)$ (фиг. 4). Эти нагрузки будем рассматривать как некоторые объемные силы, причем Q_1, Q_2, P_1, P_2 можно трактовать как нагрузки, $Q_1(a, z_0)$, $Q_2(a, z_0)$, . . ., распределенные по прямой AF на участках длиной d так что $Q_1 = Q_1(a, z_0)\, d$, $Q_2 = Q_2(a, z_0)\, d$, . . ., (в дальнейшем принимаем $d \to 0$). Представим компоненты плоского состояния от нагрузок $Q = Q(\zeta_0)$ и $P = P(\zeta_0)$, приложенных на участке DE, в виде интегралов напряжений и смещений в точке ζ, не лежащей на прямой AF, от сосредоточенных сил Q и P, приложенных в точке ζ_0 прямой AF. Будем иметь в виду, что эти напряжения и смещения определяются выражениями (2.1) и функциями

$$\Phi(\zeta) = -\frac{P + iQ}{8\pi(1-\nu)}\frac{1}{\zeta - \zeta_0}, \qquad \Psi(\zeta) = \frac{3 - 4\nu}{8\pi(1-\nu)}\frac{P - iQ}{\zeta - \zeta_0} - \frac{\bar{\zeta}_0(P + iQ)}{8\pi(1-\nu)}\frac{1}{(\zeta - \zeta_0)^2}$$

$$\varphi(\zeta) = -\frac{P + iQ}{8\pi(1-\nu)}\ln(\zeta - \zeta_0)$$

$$\psi(\zeta) = \frac{(3 - 4\nu)(P - iQ)}{8\pi(1-\nu)}\ln(\zeta - \zeta_0) + \bar{\zeta}_0\frac{P + iQ}{8\pi(1-\nu)}\frac{1}{\zeta - \zeta_0}$$

аналитичными везде, за исключением точки $\zeta = \zeta_0$. При определении напряжений приближая точку ζ к точке ζ^* на прямой AF, воспользуемся формулами Сохоцкого — Племеля

$$\lim_{\zeta \to \zeta^*} \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{f(\zeta_0)\, d\zeta_0}{\zeta_0 - \zeta} = \pm\frac{1}{2} f(\zeta^*) + \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{f(\zeta_0)\, d\zeta_0}{\zeta_0 - \zeta^*} \tag{2.4}$$

Вводя полученные таким путем напряжения плоского состояния в зависимости (1.1), найдем напряжения осесимметричного состояния как сумму двух слагаемых, соответствующих первому и второму слагаемым правой части формулы (2.4). Если нагрузки плоского состояния таковы, что при $\rho > b_0$ $q(\rho, z_0) = p(\rho, z_0) = 0$, то, сопоставляя выражения (1.1) и (1.5), можно видеть, что первые слагаемые, входящие в выражения σ_{z°, $\sigma_{r^\circ} + \sigma_{\theta^\circ}$, τ_{rz°, равны нулю. Соответствующее слагаемое, входящее в $\sigma_{r^\circ} - \sigma_{\theta^\circ}$, нулю не равно, и для определения его можно использовать уравнения равновесия, совместности деформаций и однозначности смещений осесимметричной задачи. Укажем, что уравнения равновесия и совместности удовлетворяются, если искомое слагаемое для $\sigma_{r^\circ} - \sigma_{\theta^\circ}$ имеет вид cr^{-2}. Интегралы, входящие в правые части выражений (2.4) и фигурирующие здесь в смысле главного значения, а также интегралы, входящие в выражение перемещений u_{II} и w_{II}, представимы аналитическими функциями и приводят к выражениям аналогичным (2.2).

Таким образом, ограничение относительно $r(z)$ можно снять.

Аналогичные результаты можно получить (дополняя тело с осесимметричными полостями до упругого пространства и прилагая нагрузки Q и P по контуру $r(z)$ и нагрузки $Q(a, z)$ и $P(a, z)$ вне меридионального сечения тела внутри полостей) и для наложения при помощи линейного смещения осесимметричного состояния.

6. *Уравнения задачи.* Вводя выражения (2.2) в граничные условия задачи (для первой основной задачи — в известные зависимости $R_\circ = \sigma_{r^\circ} \sin\alpha + \tau_{rz^\circ}\cos\alpha$, $Z_\circ = \sigma_{r0}\cos\alpha + \tau_{rz0}\sin\alpha$) получаем систему из двух интегральных уравнений для определения контурных значений двух аналитических функций. Разрешив уравнения и определив аналитические функции по их контурным значениям, находим при помощи выражений (2.1) компоненты вспомогательного плоского состояния и далее — при помощи зависимостей (1.4) или (1.19) — находим компоненты искомого осесимметричного состояния.

Поступила 20 II 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Weber C. Achsensymmentrische Deformation von Umderchungskörpern. Z. f. a. M. u. M., 1925, B. 5.
2. Weber C. Zur Umwandlung von rotationsymmetrischen Problemen in zweidimensionalle und umgenrt. Z. f. a. M. u. M., 1940, B. 20, № 2.
3. Смирнов В. И., Соболев С. Л. О применении нового метода к изучению упругих колебаний в пространстве с осевой симметрией. Тр. сейсмол. института АН СССР, № 29а, 1933.
4. Папкович П. Ф. К вопросу об аналогии между плоской задачей теории упругости и задачей о деформации, симметричной относительно оси. ПММ, 1939, т. III, вып. 3.
5. Моссаковский В. И. Давление штампа близкого в плане к круговому на упругое полупространство. ПММ, 1954, т. XVIII, вып. 6.
6. Golecki I. Analogy between bondary value proleme for regions bounded concentric cirdes and axially symmetrical boundary value problems for regions bounded by conscentric cpherical Surfaces. Bull. Acad. polon. sci., 1957, No 6, p. 327—333 (см. также: 9 Congr. Intern. Mech. Appl. 1957, p. 248).
7. Положий Г. Н. К вопросу о (p,q) — аналитических функциях комплексного переменного и их применениях. Revue de Math. pures et appl., Acad. de la Répylique Pop. Rónmaine, 1957, v. 2.
8. Положий Г. Н. Проіодне інтегральне перетворення узагальнених аналітичних функцій. Вісник Кіївского Універс. серія астрон. математ. та механ., 1959, № 2, вип. 1.
9. Мустафаева А. Э. О связи между плоской и пространственной осесимметричной задачей теории упругости. ДАН Азерб. ССР, 1959, т. 15, № 11.
10. Чемерис В. С. Допитання про застосовування р-аналітичних функцій в осесимметрічній теорії пружности. Доповіді АН УРСР. 1960, № 7.
11. Беленький М. Я. Некоторые осесимметричные задачи теории упругости. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 3.
12. Александров А. Я. Некоторые зависимости между решениями плоской и осесимметричной задач теории упругости для бесконечной плиты. ДАН СССР, 1959, т. 128, № 1.
13. Александров А. Я. Некоторые зависимости между решениями плоской и осесимметричной задач теории упругости и решение осесимметричных задач при помощи аналитических функций. ДАН СССР, 1959, т. 129, № 4.
14. Александров А. Я. Решение осесимметричных задач теории упругости при помощи аналитических функций ДАН СССР, 1961 т. 139, №2.