Прикладная математика и механика. Том XXV, 1961
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

К ТЕОРИИ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ ЖЕСТКО-ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЛА

О. Д. Григорьев

(Москва)

Рассматривается плоское течение жестко-пластического тела, за координатную систему принимаются линии тока и ортогональные к ним кривые; приводятся аналоги интегралов Генки вдоль этих линий; указывается уравнение совместности полей напряжений и скоростей и вытекающий из него способ построения некоторых многообразий решений, соответствующих принимаемому полю линий тока. Рассматриваются также связь указанного уравнения с экстремальным свойством действительного поля скоростей и классы движения, в которых линии тока совпадают с линиями скольжения и траекториями главных напряжений.

1. Плоское течение жестко-пластического тела, как известно [1,2], описывается уравнениями

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=0, \qquad \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}=0$$

$$(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau^2{}_{xy}=4k^2 \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0, \qquad \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}=\frac{\partial v_y/\partial x+\partial v_x/\partial y}{\partial v_x/\partial x-\partial v_y/\partial y}$$

Пусть уравнения линий тока и ортогональных к ним кривых соответственно будут

$$q_1=q_1(x, y)=\text{const}, \qquad q_2=q_2(x, y)=\text{const} \tag{1.2}$$

В криволинейных ортогональных координатах q_1, q_2 уравнения (1.1) имеют вид (например [3])

$$\frac{\partial}{\partial q_1}(H_2\sigma_{11})+\frac{\partial}{\partial q_2}(H_1\sigma_{12})+\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\sigma_{12}-\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\sigma_{22}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial q_1}(H_2\sigma_{12})+\frac{\partial}{\partial q_2}(H_1\sigma_{22})+\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\sigma_{12}-\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\sigma_{11}=0 \tag{1.3}$$

$$(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+4\sigma_{12}{}^2=4k^2$$

$$\xi_{11}+\xi_{22}=0, \qquad \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11}-\sigma_{22}}=\frac{\xi_{12}}{\xi_{11}-\xi_{22}}$$

Здесь σ_{ij} — компоненты напряжения в принятой системе координат; k — предельное касательное напряжение; ξ_{ij} — компоненты скорости деформации; H_1, H_2 — коэффициенты Ламе.

Для скорсстп деформации в координатной системе q_1, q_2 имеем

$$\xi_{11}=\frac{1}{H_1}\frac{\partial v}{\partial q_1}, \qquad \xi_{22}=\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}v, \; \xi_{12}=\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial}{\partial q_2}\frac{v}{H_1} \tag{1.4}$$

где v — модуль вектора скорости. Введем новые переменные

$$\sigma=\frac{1}{2}(\sigma_{11}+\sigma_{22}), \qquad \left.\begin{matrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\end{matrix}\right\}=\sigma\pm k\cos 2\beta, \quad \sigma_{12}=k\sin 2\beta \tag{1.5}$$

Здесь β — угол между вектором скорости и направлением большего главного напряжения. Тогда уравнения (1.3) с учетом (1.4), (1.5) можно привести к виду

$$\frac{\partial\sigma}{\partial q_1}+k\,\frac{\partial\cos 2\beta}{\partial q_1}+\frac{2k\sin 2\beta}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}+\frac{kH_1}{H_2}\frac{\partial\sin 2\beta}{\partial q_2}+\frac{2k\cos 2\beta}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}=0 \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial q_2}+\frac{kH_2}{H_1}\frac{\partial\sin 2\beta}{\partial q_1}-\frac{2k\cos 2\beta}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}-k\,\frac{\partial\cos 2\beta}{\partial q_2}+\frac{2k\sin 2\beta}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}=0 \tag{1.7}$$

$$v=\frac{f(q_2)}{H_2} \tag{1.8}$$

$$\operatorname{tg} 2\beta=\frac{H_1}{2\partial H_2/\partial q_1}\frac{\partial}{\partial q_2}\ln\frac{H_1H_2}{f(q_2)}=F \tag{1.9}$$

Здесь $f(q_2)$ — некоторая функция своего аргумента. К уравнениям (1.6)—(1.9) следует присоединить уравнение Ламе

$$\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\right)=0 \tag{1.10}$$

2. Установим аналоги интегралов Генки для уравнений вдоль линий тока и ортогональных к ним кривых

$$\sigma+k\cos 2\beta=-\int\left(\frac{2kF_1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}+\frac{kH_1}{H_2}\frac{\partial F_1}{\partial q_2}+\frac{2kF_2}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\right)dq_1+\eta(q_2) \tag{2.1}$$

$$\sigma-k\cos 2\beta=\int\left(\frac{2kF_2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}-\frac{kH_2}{H_1}\frac{\partial F_1}{\partial q_1}-\frac{2kF_1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\right)dq_2+\gamma(q_1) \tag{2.2}$$

Здесь $F_1=\sin 2\beta$, $F_2=\cos 2\beta$, которые определяются равенством (1.9): $\eta(q_2)$, $\gamma(q_1)$ — некоторые функции своих аргументов.

Предполагая всюду в дальнейшем существование и непрерывность соответствующих производных, исключим из (1.6), (1.7) посредством дифференцирования функцию σ. Тогда получим

$$\begin{aligned}2\frac{\partial^2\cos 2\beta}{\partial q_1\partial q_2}&+\frac{\partial\sin 2\beta}{\partial q_2}\left(\frac{2}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}+\frac{\partial}{\partial q_2}\frac{H_1}{H_2}\right)-\frac{\partial\sin 2\beta}{\partial q_1}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}\frac{H_2}{H_1}+\frac{2}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\right)+\\&+2\frac{\partial\cos 2\beta}{\partial q_2}\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}+\frac{2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\frac{\partial\cos 2\beta}{\partial q_1}+\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial^2\sin 2\beta}{\partial q_2^2}-\\&-\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial^2\sin 2\beta}{\partial q_1^2}+4\sin 2\beta\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\right)+\\&+2\cos 2\beta\left[\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\right)\right]=0\end{aligned} \tag{2.3}$$

или, имея в виду (1.9)

$$\begin{aligned}(4F^2-2)\frac{\partial F}{\partial q_1}\frac{\partial F}{\partial q_2}&+(1+F^2)\left[\frac{\partial F}{\partial q_2}\left(\frac{2}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}+\frac{\partial}{\partial q_2}\frac{H_1}{H_2}\right)-2F\frac{\partial^2F}{\partial q_1\partial q_2}-\right.\\&-\frac{\partial F}{\partial q_1}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}\frac{H_2}{H_1}+\frac{2}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\right)-\frac{2F}{H_2}\frac{\partial F}{\partial q_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}-\frac{2F}{H_1}\frac{\partial F}{\partial q_1}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}+\\&\left.+\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial^2F}{\partial q_2^2}-\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial^2F}{\partial q_1^2}\right]-3F\left[\left(\frac{\partial F}{\partial q_2}\right)^2\frac{H_1}{H_2}-\left(\frac{\partial F}{\partial q_1}\right)^2\frac{H_2}{H_1}\right]+\\&+(1+F^2)^2\left[4F\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{2}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\right)\right]=0\end{aligned} \tag{2.4}$$

В уравнениях (2.3) или (2.4) функция F определяется согласно (1.9); при этом

$$\frac{\partial \sin 2\beta}{\partial q_i} = \frac{1}{(1+F^2)^{1/2}}\frac{\partial F}{\partial q_i}, \qquad \frac{\partial \cos 2\beta}{\partial q_i} = -\frac{F}{(1+F^2)^{3/2}}\frac{\partial F}{\partial q_i}$$

$$\frac{\partial^2 \sin 2\beta}{\partial q_i^2} = \frac{1}{(1+F^2)^{5/2}}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial q_i^2}(1+F^2) - 3F\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\right)^2\right] \qquad \left(\begin{matrix} i=1,2 \\ j=1,2 \end{matrix} \quad i \neq j\right)$$

$$\frac{\partial^2 \cos 2\beta}{\partial q_i \partial q_j} = \frac{1}{(1+F^2)^{5/2}}\left[(2F^2-1)\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial F}{\partial q_j} - F(1+F^2)\frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial q_j}\right] \qquad (2.5)$$

Уравнение (2.4) является уравнением третьего порядка относительно H_1, H_2 и $f(q_2)$ и выражает условие совместности полей напряжений и скоростей, которое можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема. Для того чтобы некоторое произвольное поле линий тока, определяемое коэффициентами Ламе (имеющими непрерывные производные до третьего порядка включительно), могло иметь место в действительности, необходимо и достаточно, чтобы после подстановки коэффициентов H_1, H_2 в (2.4) существовала такая функция $f(q_2)$, которая обращала бы уравнение совместности в тождество.

Заметим, что для случая $\partial H_2 / \partial q_1 = 0$ уравнение совместности в форме (2.3) обращается в тождество ввиду (1.9)—(1.10). В случае же, когда одновременно

$$\frac{\partial H_2}{\partial q_1} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial q_2}\ln\frac{H_1 H_2}{f(q_2)} = 0$$

компоненты тензора скоростей тождественно равны нулю.

Уравнение (2.4) для действительного поля линий тока будет обыкновенным уравнением третьего порядка относительно функции $f(q_2)$, при этом порядок этого уравнения можно понизить до второго. Это позволяет находить решения, соответствующие принятому полю линий тока следующим путем. Согласно (1.9) определяется функция F и после подстановки ее в (2.4) находится функция $f(q_2)$, если выполняются условия указанной выше теоремы; далее из (1.8), (1.9) определяются функции $\operatorname{tg} 2\beta$ и v и, наконец, из (2.1), (2.2) находится функция σ.

Пример. Рассмотрим криволинейные ортогональные координаты с коэффициентами Ламе

$$H_1 = c_1 \exp(aq_1 + bq_2), \qquad H_2 = c_2 \exp(aq_1 + bq_2) \qquad (2.6)$$

где a, b, c_i — постоянные.

Соотношениям (2.6) соответствуют два семейства ортогональных логарифмических спиралей.

Далее, в виду (1.9) получим

$$\operatorname{tg} 2\beta = F = \frac{c_1}{2c_2 a}\left[2b - \frac{d \ln f(q_2)}{dq_2}\right] \qquad (2.7)$$

Из (2.6) и (2.7) следует, что уравнение совместности обращается в обыкновенное дифференциальное уравнение относительно $f(q_2)$.

Таким образом, условия указанной выше теоремы выполнены, и уравнение совместности согласно (2.3), (2.6) и (2.7) примет вид

$$\frac{2c_1 b}{c_2}\frac{d\sin 2\beta}{dq_2} + \frac{2a\, d\cos 2\beta}{dq_2} + \frac{c_1}{c_2}\frac{d^2 \sin 2\beta}{dq_2^2} = 0 \qquad (2.8)$$

или

$$bm \sin 2\beta + a \cos 2\beta + \frac{m}{2} \frac{d \sin 2\beta}{dq_2} = c \tag{2.9}$$

т. е.

$$q_2 = m \int \frac{\cos 2\beta \, d\beta}{c - bm \sin 2\beta - a \cos 2\beta} \qquad \left(m = \frac{c_1}{c_2}\right)$$

$$q_2 = -\frac{ma\beta}{a^2 + b^2m^2} - \frac{bm^2}{2(a^2 + b^2m^2)} \ln (c - a\cos 2\beta - bm \sin 2\beta) + \frac{acm}{a^2 + b^2m^2} p + D_1 \tag{2.10}$$

Здесь c, D_i — постоянные

$$p = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{c^2 - a^2 - b^2m^2}} \operatorname{arctg} \dfrac{(c+a) \operatorname{tg} \beta - bm}{\sqrt{c^2 - a^2 - b^2m^2}} & (c^2 - a^2 - b^2m^2 > 0) \\ -\dfrac{1}{\sqrt{a^2 + b^2m^2 - c^2}} \operatorname{Arth} \dfrac{(c+a) \operatorname{tg} \beta - bm}{\sqrt{a^2 + b^2m^2 - c^2}} & (a^2 + b^2m^2 - c^2 > 0) \end{cases} \tag{2.11}$$

Ввиду (1.6) и (2.9) интеграл (2.1) вдоль линий тока принимает следующую простую форму:

$$\sigma + 2kcq_1 = \eta (q_2) \tag{2.12}$$

Обратимся теперь к вычислению интеграла (2.2) вдоль ортогональных к линиям тока кривых.

Для этого перепишем соотношение (2.2) в виду (1.7) и (2.9) следующим образом:

$$\sigma - \frac{2kbc}{a} q_2 - k \cos 2\beta + \frac{kmb \sin 2\beta}{a} + \frac{2k(a^2 + b^2m^2)}{am} \int \sin 2\beta \, dq_2 = \gamma (q_1)$$

Из (2.10) следует

$$\frac{2k(a^2 + b^2m^2)}{am} \int \sin 2\beta \, dq_2 = \frac{2k(a^2 + b^2m^2)}{a} \int \frac{\cos 2\beta \sin 2\beta \, d\beta}{c - bm \sin 2\beta - a \cos 2\beta}$$

Отсюда

$$\frac{2k(a^2 + b^2m^2)}{am} \int \sin 2\beta \, dq_2 = -\frac{4kbcm}{a^2 + b^2m^2} \beta + \frac{k(a^2c - b^2m^2c)}{a(a^2 + b^2m^2)} \ln (c - bm \sin 2\beta - a \cos 2\beta) +$$

$$+ \frac{k}{a} (a \cos 2\beta - bm \sin 2\beta) + \frac{2km}{a^2 + b^2m^2} (2bc^2 - a^2b - b^3m^2) p + D_2$$

Таким образом, вдоль линий $q_1 = \text{const}$ будет выполняться следующее соотношение:

$$\sigma - \frac{2kbc}{a} q_2 - \frac{4kbcm}{a^2 + b^2m^2} \beta + \frac{k(a^2c - b^2cm^2)}{a(a^2 + b^2m^2)} \ln (c - bm \sin 2\beta - a \cos 2\beta) +$$

$$+ \frac{2km}{a^2 + b^2m^2} (2bc^2 - b^3m^2 - a^2b) p = \gamma (q_1) \tag{2.13}$$

Из (2.12) и (2.13) следует

$$\sigma = -2kcq_1 + \frac{2kbc}{a} q_2 + \frac{4kbmc}{a^2 + b^2m^2} \beta - \frac{k(a^2c - b^2cm^2)}{a(a^2 + b^2m^2)} \ln (c - bm \sin 2\beta - a \cos 2\beta) -$$

$$- \frac{2km}{a^2 + b^2m^2} (2bc^2 - b^3m^2 - a^2b) p + D_2 \tag{2.14}$$

где p определяется соотношением (2.11).

Далее, из (1.9) следует

$$\ln f (q_2) = 2bq_2 - \frac{2a}{m} \int \operatorname{tg} 2\beta \, dq_2 + D_3$$

Так как

$$\int \operatorname{tg} 2\beta \, dq_2 = m \int \frac{\sin 2\beta \, d\beta}{c - bm \sin 2\beta - a \cos 2\beta} = \frac{am}{2(a^2 + b^2m^2)} \ln (c - bm \sin 2\beta - a \cos 2\beta) -$$

$$- \frac{bm^2}{a^2 + b^2m^2} \beta + \frac{bcm^2}{a^2 + b^2m^2} p + D_3$$

то

$$f(q_2) = \exp\left[2bq_2 - \frac{a^2}{a^2+b^2m^2}\ln(c - bm\sin 2\beta - a\cos 2\beta) + \right.$$
$$\left. + \frac{2abm}{a^2+b^2m^2}\beta - \frac{2abcm}{a^2+b^2m^2}p + D_3\right] \tag{2.15}$$

и, таким образом, согласно (1.8)

$$v = \exp\left[bq_2 - \frac{a^2}{a^2+b^2m^2}\ln(c - bm\sin 2\beta - a\cos 2\beta) + \right.$$
$$\left. + \frac{2abm}{a^2+b^2m^2}\beta - aq_1 - \frac{2abcm}{a^2+b^2m^2}p + D_3\right] \tag{2.16}$$

Соотношения (2.10), (2.14), (2.16) определяют пластическое течение, соответствующее линиям тока в виде логарифмических спиралей (2.6). Такое течение можно представить себе как движение выдавливаемой пластической среды через длинный канал, стенками которого являются логарифмические спирали и касательные напряжения вдоль которых постоянны.

Если в найденных соотношениях положить $a = m = 1$, $b = 0$, то получим решение Надаи [4] для радиальных линий тока.

Как легко можно проверить, условиям указанной выше теоремы удовлетворяет следующий класс криволинейных координат:

$$H_1 = \Phi'(q_1)\Psi(q_2), \qquad H_2 = \Phi(q_1)\Psi'(q_2) \tag{2.17}$$

Здесь $\Phi(q_1)$, $\Psi(q_2)$ — произвольные функции своих аргументов, имеющие непрерывные производные до третьего порядка включительно. В качестве невозможных полей линий тока приведем следующие

$$H_1 = H_2 = H = c\exp(2mq_1q_2) \qquad (c, m = \text{const}) \tag{2.18}$$

3. Пусть некоторое поле линий тока удовлетворяет условиям упомянутой теоремы. Возьмем некоторую пластическую область ω с рассматриваемым полем линий тока и будем считать, что всюду на контуре области ω заданы скорости согласно (1.8)

$$v = \frac{f(q_2)}{H_2}$$

Тогда в силу известной теоремы об экстремальном свойстве действительного поля скоростей [1] функция $f(q_2)$ должна сообщать минимум функционалу

$$I = \sqrt{2}k\int_\omega \sqrt{2\xi_{11}^2 + \frac{1}{2}\xi_{12}^2}\,d\omega \tag{3.1}$$

который после интегрирования по q_1 ввиду (1.4), (1.8) принимает вид

$$I = \sqrt{2}k\int_{q_2=a}^{q_2=b} Q\,[q_2, f(q_2), f'(q_2)]\,dq_2 \tag{3.2}$$

с обычными условиями трансверсальности

$$[Q_{f'}]_{q_2=a} = [Q_{f'}]_{q_2=b} = 0 \tag{3.3}$$

где $Q(f, f', q_2)$ — известная функция своих аргументов. Таким образом, для нахождения функции $f(q_2)$ может быть применен прямой метод.

4. Рассмотрим случай $\partial H_2/\partial q_1 = 0$. В этом случае в силу известных соотношений

$$\frac{\partial\alpha}{\partial s_1} = -\frac{1}{H_2H_1}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}, \qquad \frac{\partial\alpha}{\partial s_2} = \frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}, \qquad \frac{\partial\alpha}{\partial s_2} = 0. \tag{4.1}$$

Здесь α — угол, который составляет касательная к линии тока с некоторым направлением, $\partial\alpha / \partial s_i$ — кривизна координатной линии.

Таким образом, согласно (4.1) линии тока являются эквидистантными кривыми. С другой стороны, из (1.9) в этом случае следует, что $\beta = \pm\pi/4$, т. е. линии тока совпадают с линиями скольжения. Очевидно, справедливо и обратное. Следовательно, для совпадения линий тока с линиями скольжения необходимо и достаточно, чтобы линии тока были эквидистантными кривыми (при этом исключается простой случай движения среды, как твердого тела) [5, 6].

5. Рассмотрим случай совпадения линий тока с траекториями главных напряжений. В этом случае $\beta = 0 \ \pm\pi / 2$ и из (1.9) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial q_2} \ln \frac{H_1 H_2}{f(q_2)} = 0 \tag{5.1}$$

С другой стороны, соотношения (1.6) — (1.7) принимают следующий известный вид:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial q_1} + \frac{2k}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1} = 0, \qquad \frac{\partial\sigma}{\partial q_2} - \frac{2k}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial q_2} = 0 \tag{5.2}$$

или

$$\sigma + 2k \ln H_2 = \eta(q_2), \qquad \sigma - 2k \ln H_1 + \gamma(q_1) \tag{5.3}$$

Отсюда ввиду (5.1)

$$\frac{1}{4k}\eta(q_2) = \ln f(q_2) + c \qquad (c = \mathrm{const}) \tag{5.4}$$

Итак, в случае совпадения линий тока с траекториями главных напряжений выполняется следующее соотношение:

$$\ln H_1 H_2 = \ln f(q_2) - \frac{1}{4k}\gamma(q_1) + c \tag{5.5}$$

Очевидно, справедливо и обратное, т. е. равенство (5.5) представляет собой необходимое и достаточное условие для совпадения линий тока с траекториями главных напряжений.

В качестве примера рассмотрим изотермическую сетку линий тока (траекторий главных напряжений). В этом случае из (1.10) и (5.5) следует

$$[\ln f(q_2)]'' = \frac{1}{4k}\gamma''(q_1) = n \qquad (n = \mathrm{const}) \tag{5.6}$$

Таким образом,

$$H_1 = H_2 = H = \exp\left[\frac{1}{2}\left(\frac{nq_2^2}{2} + c_1 q_2 - \frac{nq_1^2}{2} - c_3 q_1 + c_2\right)\right]$$

$$\sigma = k\,(nq_2^2 + 2c_1 q_2 + nq_1^2 + 2c_3 q_1 + c_4) \qquad (c_i = \mathrm{const}) \tag{5.7}$$

$$v = \exp\left(\frac{n}{4}q_2^2 + \frac{n}{4}q_1^2 + \frac{c_1}{2}q_2 + \frac{c_3}{2}q_1 + c\right)$$

Поступила 5 V 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. Гостехиздат, 1956.
2. Соколовский В. В. Теория пластичности. Гостехиздат, 1950.
3. Новожилов В. В. Теория упругости. Судпромгиз, 1958.
4. Nadai A. Über die Gleit und Verweigungsflächen einiger Gleichgewichtszustände bildsamer Massen und die Nachspannungen bleibend verzerter Körper. Zeitschr. für Physik, 1924, Bd. 30.
5. Lohan Ralf. Schriften des Mathematischen Seminars und des Instituts für angewandte Mathematik der Universitet, Berlin Band 2 Heft 7, Mathematische Grundlagen und Behandlung des ebenen Problems der Plastizität. Berlin, 1935.
6. Гениев Г. А. Вопросы динамики сыпучей среды. ЦНИИСК, научное сообщение, 1958, вып. 2.