

О МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОПИСАНИИ ПОВЕДЕНИЯ УПРУГОГО ИЗОТРОПНОГО ТЕЛА ПРИ ПОМОЩИ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОГО ПОТЕНЦИАЛА

Д. Д. Ивлев

(Воронеж)

Рассматриваются соотношения связи между напряженным и деформированным состояниями модели упругого изотропного тела при кусочно-линейном потенциале в случае малых деформаций.

Предполагается, что при одноосном растяжении-сжатии и чистом сдвиге для рассматриваемой модели имеет место линейный закон Гука, изменение объема прямо пропорционально среднему напряжению. В общем случае поведение исследуемой модели отличается от поведения модели упругого изотропного тела, описываемого общепринятыми соотношениями линейной теории упругости [1,2].

1. При определении связи между напряжениями и деформациями в упругом теле будем исходить из выражений

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \sigma_{ij}} \quad (1.1)$$

Здесь σ_{ij} , и ε_{ij} — соответственно компоненты напряжений и деформаций, U — потенциал деформаций.

Для изотропных тел потенциал U представляет собой функцию инвариантов тензора напряжений

$$U = U(\sigma, \Sigma_2, \Sigma_3) \quad (1.2)$$

где σ — первый инвариант тензора напряжений, Σ_2, Σ_3 — соответственно второй и третий инварианты тензора девиатора напряжений.

Предположим, что имеет место линейная зависимость между средним напряжением σ и объемной деформацией ε

$$\sigma = 3K\varepsilon \quad \varepsilon = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \quad (K = \text{const}) \quad (1.3)$$

$$\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

(Здесь K — модуль объемного сжатия.)

Для того чтобы имело место (1.3), следует положить

$$U = \frac{\sigma^2}{2K} + \Phi(\Sigma_2, \Sigma_3) \quad (1.4)$$

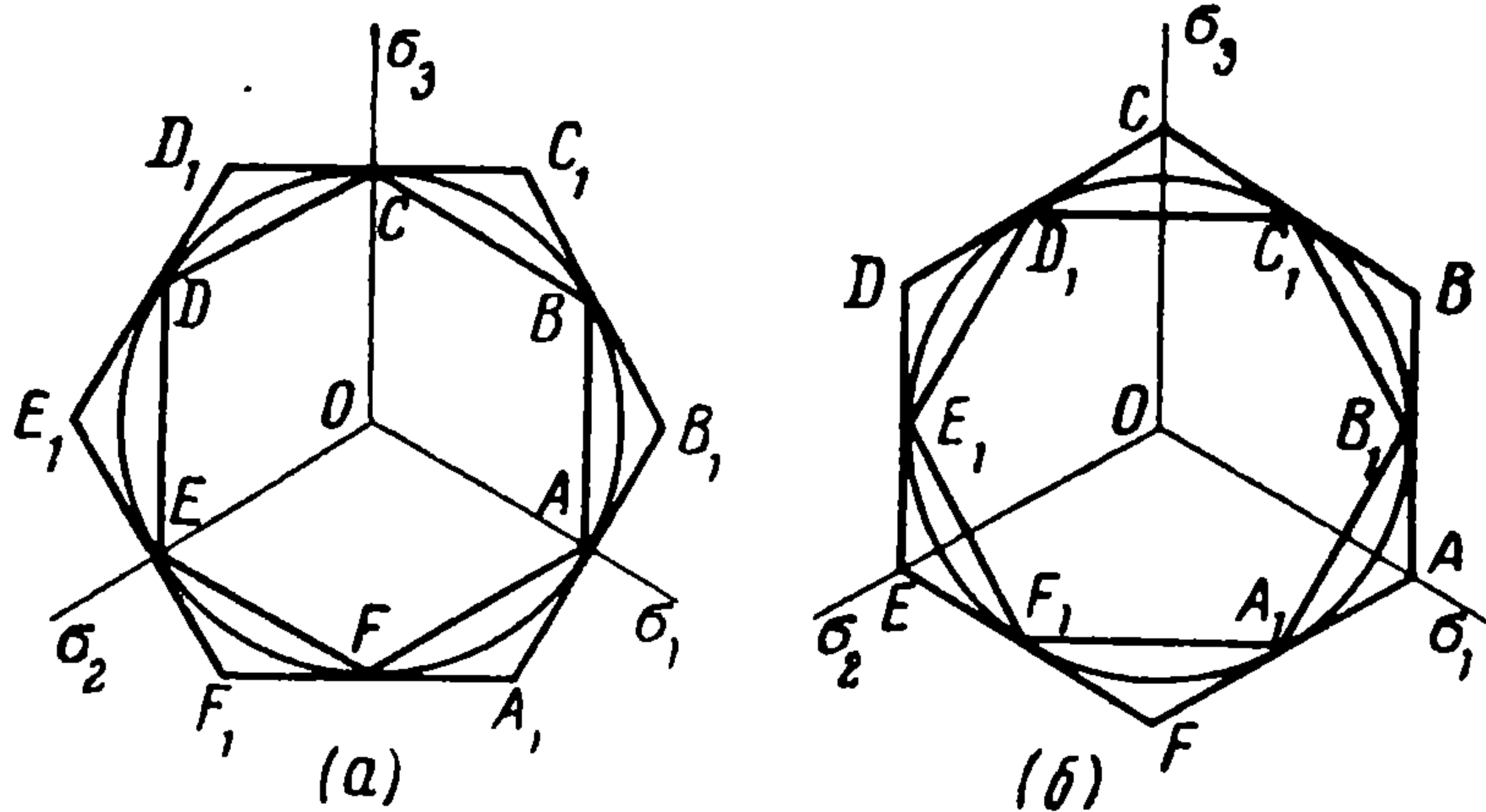
Зависимость между напряжениями и деформациями, определяемая из (1.4) согласно (1.1), будет удовлетворять соотношению (1.3).

Предположим, что при перемене знака напряжений на обратный компоненты деформации также меняют лишь знак. Отсюда следует, что функция Φ зависит от модуля $|\Sigma_3|$.

В пространстве главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ функция Φ интерпретируется совокупностью цилиндрических поверхностей равного уровня Φ , образующие которых параллельны оси $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$.

Рассмотрим девиаторную плоскость $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$, на ней $U = \Phi$. Кривые пересечения поверхностей U и девиаторной плоскости назовем потенциальными кривыми.

Если при одноосном растяжении-сжатии определено значение потенциала, то возможные невогнутые относительно начала координат потенциальные кривые (фиг. 1а)



Фиг. 1

будут лежать между шестиугольниками $ABCDEF$ и $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$.

В случае, когда значение потенциала определено экспериментом на чистый сдвиг, взаимное расположение шестиугольников показано на фиг. 1, б.

Известно, что ограничения, накладываемые ре-

зультатами простейших экспериментов (связь между напряжениями и деформациями при растяжении-сжатии, чистом сдвиге и т. п.), не определяют полностью функцию Φ , поэтому, вообще говоря, можно построить сколько угодно зависимостей между компонентами напряжений и деформаций для упругого изотропного тела, приводящих при одноосном растяжении-сжатии к линейному закону Гука [3, 4].

Линейные соотношения обобщенного закона Гука получаются при частном предположении $\Phi = \Phi(\Sigma_2)$. На фиг. 1 соответствующая потенциальная кривая изображается окружностью.

Ниже рассмотрим соотношения теории упругого изотропного тела, потенциальные кривые которого изображаются шестиугольниками фиг. 1, подобными шестиугольнику $ABCDEF$.

В данном случае поверхность, интерпретирующая в пространстве главных напряжений функцию Φ , будет кусочно-гладкой, поэтому необходимо обобщение определения (1.1). Из зависимости (1.1) при использовании (1.3), (1.4) вытекает, что компоненты тензора девиатора деформаций в пространстве напряжения-деформации ортогональны к поверхности Φ . Другими словами, компоненты $\varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon$ ($\delta_{ii} = 1$; $\delta_{jj} = 0$, $i \neq j$) совпадают с нормалью к плоскости, касательной в данной точке к поверхности Φ .

Поверхность Φ может быть интерпретирована как огибающая своих касательных плоскостей. Особые точки и линии поверхности Φ интерпретируются как предельные последовательности гладких поверхностей.

При непрерывном переходе от гладкой потенциальной поверхности к кусочно-гладкой получим, что в особых точках потенциальной поверхности тензор деформации может принимать различные значения. Если особенность образована пересечением гладких поверхностей

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \dots = \Phi_m = \Phi \quad (1.5)$$

то совокупность компонент тензора деформации в ней может быть пред-

ставлена в виде

$$\varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon = \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{\partial \Phi_k}{\partial \sigma_{ij}} \quad (1.6)$$

Так как $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m = 1$, $\lambda_k \geq 0$, то получается $m - 1$ параметрическое семейство возможных компонент деформации. Так же как и в теории пластичности [5-8] для полного определения деформированного состояния необходимо опереться на дополнительные условия конкретной задачи (краевые, начальные и другие условия).

Умножая соотношения (1.6) на $d\sigma_{ij}$, получим

$$\sum_{ij} \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} = \varepsilon d\sigma + \sum_{k=1}^m \lambda_k d\Phi_k \quad (1.7)$$

Из (1.5) следует, что $d\Phi_1 = d\Phi_2 = \dots = d\Phi_m = d\Phi$, поэтому из (1.7) найдем

$$\sum_{ij} \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} = dU$$

Соотношения (1.6) аналогичны соотношениям теории обобщенного (пластического) потенциала [5, 6].

2. Рассмотрим соотношения пространственной задачи теории упругого изотропного тела (фиг. 1) при кусочно-линейном потенциале $ABCDEF$. Очевидно, что в общем случае максимальная свобода деформирования соответствует его вершинам. Любое направление деформирования может соответствовать вершинам шестиугольника $ABCDEF$, другими словами, любому деформированному состоянию может отвечать напряженное состояние, соответствующее вершинам рассматриваемого шестиугольника.

Рассмотрим сторону AB (фиг. 1), для нее будем иметь

$$U = \frac{\sigma^2}{2K} + \Phi(\xi), \quad \xi = \sigma_1 - \sigma_2 \quad (2.1)$$

Из (2.1) согласно (1.1) получим

$$\varepsilon_1 - \varepsilon = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}, \quad \varepsilon_3 - \varepsilon = -\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}, \quad \varepsilon_3 = -\varepsilon = 0 \quad (2.2)$$

В случае одноосного растяжения сжатия согласно принятым предположениям имеет место закон Гука

$$\sigma_1 = E\varepsilon_1, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \quad (2.3)$$

Из (2.2), (2.3) следует, что для выполнения (2.3) необходимо положить

$$\Phi = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E} - \frac{1}{9K} \right) (\sigma_1 - \sigma_2)^2 \quad (2.4)$$

Обозначив $\frac{1}{G} = \left(\frac{1}{E} - \frac{1}{9K} \right)$, запишем выражение (2.4) в виде

$$\Phi = \frac{2}{3G} \tau_{\max}^2, \quad \tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (2.5)$$

Аналогично запишутся выражения функции Φ для других сторон шестиугольника $ABCDEF$ (фиг. 1).

Рассмотрим соотношения пространственной задачи, соответствующие вершинам выбранного шестиугольника (фиг. 1). Вершина A является

точкой пересечения сторон AB и AF . Для этих сторон имеем

$$U_{AB} = \frac{\sigma^2}{2K} + \frac{1}{6G} (\sigma_1 - \sigma_2)^2, \quad U_{AF} = \frac{\sigma^2}{2K} + \frac{1}{6G} (\sigma_1 - \sigma_3)^2 \quad (2.6)$$

Согласно (1.6) из (2.6) для вершины A получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 - \varepsilon &= \frac{1}{3G} [\lambda_1 (\sigma_1 - \sigma_2) + \lambda_2 (\sigma_1 - \sigma_3)] \\ \varepsilon_2 - \varepsilon &= -\frac{\lambda_1}{3G} (\sigma_1 - \sigma_2) \quad (\lambda_1 + \lambda_2 = 1) \\ \varepsilon_3 - \varepsilon &= -\frac{\lambda_2}{3G} (\sigma_1 - \sigma_3) \quad (\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Учитывая, что для вершины A имеет место $\sigma_2 = \sigma_3$, перепишем (2.7)

в виде

	1	2	3
x	l_1	m_1	n_1
y	l_2	m_2	n_2
z	l_3	m_3	n_3

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 - \varepsilon &= \frac{T}{3G}, \quad \varepsilon_2 - \varepsilon = -\frac{\lambda_1}{3G} T \\ \varepsilon_3 - \varepsilon &= -\frac{\lambda_2}{3G} T \end{aligned} \quad (2.8)$$

$(T = \sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_1 - \sigma_3)$

Из (2.8) очевидно, что имеет место закон Гука (2.3). Запишем исходные соотношения в компонентах декартовой системы координат x, y, z . Предположим, что направления осей x, y, z образуют с направлениями главных напряжений, обозначенных 1, 2, 3, углы, косинусы которых сведены в таблицу, приведенную слева.

Из соотношений

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_1 l_1^2 + \sigma_2 m_1^2 + \sigma_3 n_1^2, \dots \\ \tau_{xy} &= \sigma_1 l_1 l_2 + \sigma_2 m_1 m_2 + \sigma_3 n_1 n_2, \dots \end{aligned}$$

для вершины A получим

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma - \frac{1}{3} T + T \cos^2 \theta_1, & \tau_{xy} &= T \cos \theta_1 \cos \theta_2 \\ \sigma_y &= \sigma - \frac{1}{3} T + T \cos^2 \theta_2, & \tau_{yz} &= T \cos \theta_2 \cos \theta_3 \\ \sigma_z &= \sigma - \frac{1}{3} T + T \cos^2 \theta_3, & \tau_{zx} &= T \cos \theta_3 \cos \theta_1 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Здесь $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ — углы, определяющие направление главного напряжения σ_1 в системе координат x, y, z .

Из (2.9), в частности, следует

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma + \frac{1}{3} T) (\sigma_y - \sigma + \frac{1}{3} T) - \tau_{xy}^2 &= 0 \\ (\sigma_y - \sigma + \frac{1}{3} T) (\sigma_z - \sigma + \frac{1}{3} T) - \tau_{yz}^2 &= 0 \\ (\sigma_z - \sigma + \frac{1}{3} T) (\sigma_x - \sigma + \frac{1}{3} T) - \tau_{zx}^2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Из (2.10) найдем

$$\begin{aligned} T &= \frac{3}{2} \left[s_x + \sqrt{s_x^2 - 4(s_y s_z - \tau_{yz}^2)} \right] \\ T &= \frac{3}{2} \left[s_y + \sqrt{s_y^2 - 4(s_z s_x - \tau_{zx}^2)} \right] \\ T &= \frac{3}{2} \left[s_z + \sqrt{s_z^2 - 4(s_x s_y - \tau_{xy}^2)} \right] \end{aligned} \quad (2.11)$$

$(s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma)$

В соотношениях (2.11) всюду перед корнем взят знак плюс, так как в данном случае $T > 0$.

Из условия изотропии, утверждающего совпадение в упругом теле направлений главных напряжений и деформаций, следуя [7], получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_x + \varepsilon_{xy} \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} + \varepsilon_{xz} \frac{\cos \theta_3}{\cos \theta_1} &= \varepsilon_{xy} \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} + \varepsilon_y + \varepsilon_{yz} \frac{\cos \theta_3}{\cos \theta_2} = \\ &= \varepsilon_{xz} \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} + \varepsilon_{yz} \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_3} + \varepsilon_z = \varepsilon_1 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Отсюда, используя (2.9), (2.10), (2.11), найдем

$$\begin{aligned} \varepsilon_x + \varepsilon_{xy} \frac{\sigma_y - \sigma + 1/3 T}{\tau_{xy}} + \varepsilon_{xz} \frac{\sigma_z - \sigma + 1/3 T}{\tau_{xz}} &= \varepsilon_{xy} \frac{\sigma_x - \sigma + 1/3 T}{\tau_{xy}} + \\ + \varepsilon_y + \varepsilon_{yz} \frac{\sigma_z - \sigma + 1/3 T}{\tau_{yz}} &= \varepsilon_{xz} \frac{\sigma_x - \sigma + 1/3 T}{\tau_{xz}} + \varepsilon_{yz} \frac{\sigma_y - \sigma + 1/3 T}{\tau_{yz}} + \varepsilon_z = \\ &= \frac{\sigma}{3K} + \frac{1}{2G} \left[s_x + \sqrt{s_x^2 - 4(s_y s_z - \tau_{yz}^2)} \right] = \\ &= \frac{\sigma}{3K} + \frac{1}{3G} \left[s_y + \sqrt{s_y^2 - 4(s_z s_x - \tau_{zx}^2)} \right] = \\ &= \frac{\sigma}{3K} + \frac{1}{2G} \left[s_z + \sqrt{s_z^2 - 4(s_x s_y - \tau_{xy}^2)} \right] \end{aligned} \quad (2.13)$$

Соотношения (2.13) могут быть получены из выражений (2.10) по теории обобщенного упругого потенциала.

К пяти равенствам (2.13) следует присоединить три уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \dots \quad (2.14)$$

а также соотношение (1.3).

Система девяти уравнений (2.13), (2.14), (1.3) относительно шести компонент напряжений и трех компонент перемещений определяет поведение рассматриваемой модели упругого тела.

Исходную систему уравнений представим в другом виде. Подставив выражения (2.9) в уравнения (2.14), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial x} - T \sin \theta_1 \left(\cos \theta_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + \cos \theta_2 \frac{\partial \theta_1}{\partial y} + \cos \theta_3 \frac{\partial \theta_1}{\partial z} \right) - \\ - T \cos \theta_1 \left(\sin \theta_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + \sin \theta_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial y} + \sin \theta_3 \frac{\partial \theta_3}{\partial z} \right) - \\ - \frac{1}{3} \frac{\partial T}{\partial x} + \cos \theta_1 \left(\frac{\partial T}{\partial x} \cos \theta_1 + \frac{\partial T}{\partial y} \cos \theta_2 + \frac{\partial T}{\partial z} \cos \theta_3 \right) = 0, \dots \end{aligned} \quad (2.15)$$

К трем уравнениям (2.15) следует присоединить условие

$$\cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_3 = 1 \quad (2.16)$$

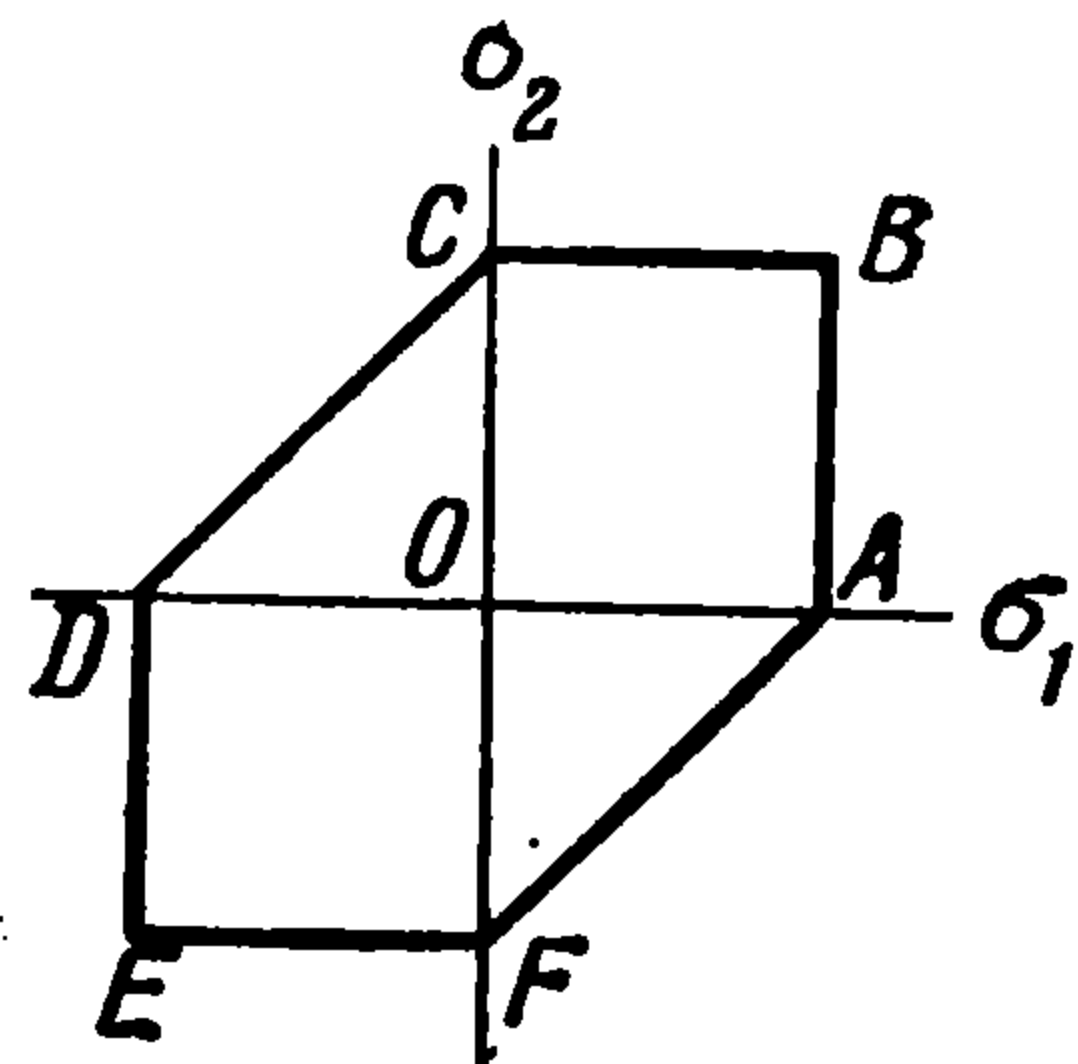
Уравнения (2.13) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \frac{\cos \theta_3}{\cos \theta_1} = \\ = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \frac{\cos \theta_3}{\cos \theta_2} = \\ = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_3} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_3} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\sigma}{3K} + \frac{T}{3G} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Система уравнений (2.15), (2.17), (1.3) связывает неизвестные σ , T , θ_1 , θ_2 , θ_3 , u , v , w .

В случае соответствия пространственного напряженного состояния сторонам шестиугольника $ABCDEF$ (фиг. 1) будем иметь

$$\gamma_{\max} = \frac{4}{3G} \tau_{\max} \quad (2.18)$$



Фиг. 2

где τ_{\max} , γ_{\max} — соответственно максимальные касательное напряжение и сдвиг.

Для рассматриваемой модели изотропного упругого тела модуль сдвига равен $3/4G$.

В случае, если среди главных напряжений два равны между собой, имеет место

$$\frac{1}{2} (\gamma_1 + \gamma_2) = \frac{1}{G} \tau_{\max}$$

где γ_1 , γ_2 — главные сдвиги.

Выражения в декартовых координатах, соответствующие сторонам шестиугольника, имеют весьма громоздкий вид и поэтому опущены.

3. В случае кручения $\sigma_1 = -\sigma_2$, $\sigma_3 = 0$, $\sigma = \varepsilon = 0$, следовательно, третий инвариант тензора девиатора напряжений равен нулю.

В случае кручения соотношения между напряжениями и деформациями упругого изотропного тела при малых деформациях для любых потенциальных функций (1.1) приводят к соотношениям обобщенного закона Гука, если принять справедливость условий (1.3), (2.3).

Рассмотрим случай плоской деформации. Предположим, что

$$w = \varepsilon_z = \varepsilon_3 = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

остальные компоненты зависят только от координат x , y .

В данном случае напряженное состояние соответствует грани AB (фиг. 1). Из (2.2) найдем, что $\varepsilon = 0$; таким образом, при плоском деформированном состоянии рассматриваемый упругий материал ведет себя как несжимаемый независимо от величины модуля K .

Легко убедиться, что остальные соотношения по существу совпадают с соотношениями обобщенного закона Гука [1, 2] для несжимаемого тела при плоской деформации

$$\varepsilon_x - \varepsilon_y = \frac{1}{3G} (\sigma_x - \sigma_y), \quad \varepsilon_{xy} = \frac{2}{3G} \tau_{xy}, \quad \varepsilon_x + \varepsilon_y = 0$$

4. Перейдем к случаю плоского напряженного состояния. Предположим, что

$$\sigma_3 = \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0 \quad (4.1)$$

Все остальные компоненты зависят от координат x , y . На фиг. 2 в пространстве главных напряжений показано сечение некоторой поверхности равного уровня Φ плоскостью $\sigma_3 = 0$.

Очевидно, следует различать случаи, когда состояние соответствует сторонам AB , BC , DE , EF или CD , FA .

Рассмотрим вначале сторону AB (фиг. 2), стороны CB , DE , EF рассматриваются совершенно аналогично.

Очевидно, что при определении закона деформирования для AB следует исходить из выражения

$$U = \frac{\sigma^2}{2K} + \frac{1}{6G} (\sigma_1 - \sigma_2)^2 \quad (4.2)$$

Из (4.2) найдем

$$\varepsilon_1 - \varepsilon = \frac{1}{3G} (\sigma_1 - \sigma_3), \quad \varepsilon_2 - \varepsilon = 0, \quad \varepsilon_3 - \varepsilon = -\frac{1}{3G} (\sigma_1 - \sigma_3) \quad (4.3)$$

Полагая в (4.3), что $\sigma_3 = 0$, получим

$$\varepsilon_1 = -\varepsilon = \frac{\sigma_1}{3G}, \quad \varepsilon_2 - \varepsilon = 0, \quad \varepsilon_3 - \varepsilon = -\frac{\sigma_1}{3G} \quad (4.4)$$

В плоскости xy лежат главные напряжения σ_1, σ_2 ($\sigma_1 \geq \sigma_2$) и главные деформации $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, соответственно совпадающие по направлению, поэтому

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = \frac{\tau_{xy}}{\varepsilon_{xy}} \quad (4.5)$$

Известно, что

$$\begin{aligned} \sigma_{1,2} &= \frac{1}{2} \left[(\sigma_x + \sigma_y) \pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \right] \\ \varepsilon_{1,2} &= \frac{1}{2} \left[(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \pm \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + 4\varepsilon_{xy}^2} \right] \end{aligned} \quad (4.6)$$

Из (4.4) и (4.5) найдем

$$\begin{aligned} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + 4\varepsilon_{xy}^2} &= \frac{1}{6G} \left[(\sigma_x + \sigma_y) + \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \right] \\ \varepsilon_x + \varepsilon_y - \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + 4\varepsilon_{xy}^2} &= \frac{2}{9K} (\sigma_x + \sigma_y) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Присоединяя к трем соотношениям (4.5), (4.7) два уравнения равновесия и условие (1.3), получим систему шести уравнений относительно шести неизвестных $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, u, v, w$.

Приведенная система уравнений может быть линеаризирована при помощи замены

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{3}{2} \sigma + \kappa \cos 2\theta, & \varepsilon_x &= m + q \cos 2\theta \\ \sigma_y &= \frac{3}{2} \sigma - \kappa \cos 2\theta, & \varepsilon_y &= m - q \cos 2\theta \\ \tau_{xy} &= \kappa \sin 2\theta, & \varepsilon_{xy} &= q \sin 2\theta \end{aligned} \quad (4.8)$$

При использовании (4.8) условие (4.5) тождественно удовлетворяется, условия (4.7) примут вид

$$12Gq = 3\sigma + 2\kappa, \quad m - q = \frac{\sigma}{3K} \quad (4.9)$$

Подставляя выражения (4.8) в уравнения равновесия и условия совместности, получим систему квазилинейных уравнений относительно неизвестных $\sigma, \kappa, m, q, \theta$.

В случае, когда напряженное состояние соответствует отрезкам DC или AF , следует исходить из выражения для потенциала (4.2).

Легко получить, что в этом случае имеют место линейные соотношения

$$\begin{aligned} \varepsilon_x - \varepsilon_y &= \frac{1}{3G} (\sigma_x - \sigma_y), & \varepsilon_{xy} &= \frac{2}{3G} \tau_{xy} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{2} (\varepsilon_x + \varepsilon_y), & \sigma_x + \sigma_y &= \frac{9}{2} K (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Случай осесимметричной задачи рассматривается совершенно аналогично. Эти соотношения могут быть получены как частный случай соотношений пространственной задачи.

5. Рассмотрим задачу о растяжении тонкой кольцевой пластины равномерно распределенными усилиями, приложенными по внешнему контуру (фиг. 3). Обозначим внутренний радиус пластины через a , внешний — через b , интенсивность нагрузки через p .

Положим $\sigma_1 = \sigma_\theta$, $\sigma_2 = \sigma_\rho$. Так как всюду в пластине $\sigma_\theta > \sigma_\rho > 0$, то напряженное состояние соответствует стороне AB (фиг. 2).

Для простоты ограничимся случаем несжимаемого материала. Из (4.4) получим

$$\varepsilon_\theta = \frac{\sigma_\theta}{3G}, \quad \varepsilon_\rho = 0, \quad \varepsilon_z = -\frac{\sigma_\theta}{3G} \quad (5.1)$$

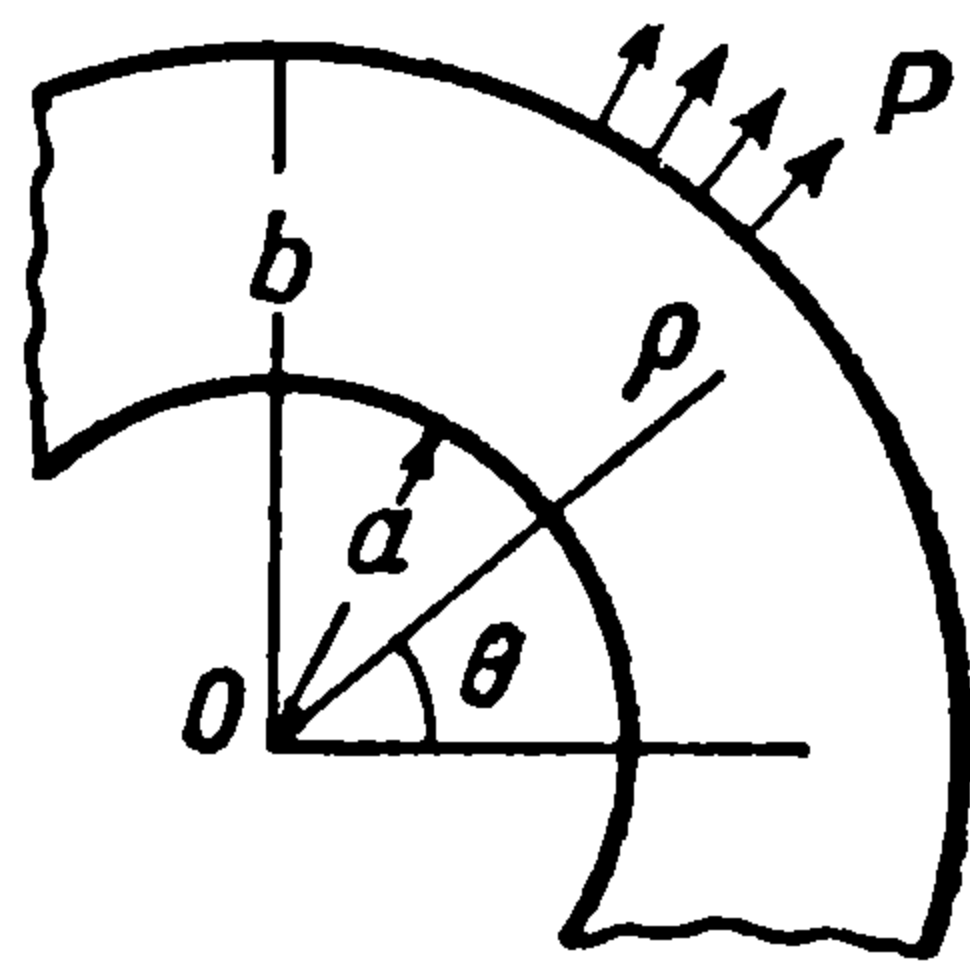
Известно, что

$$\varepsilon_\rho = \frac{du}{d\rho}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{\rho}, \quad \varepsilon_z = \frac{dw}{dz}$$

Здесь u , w — перемещения вдоль осей ρ и z .

Единственное уравнение равновесия запишется в виде

$$\frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0 \quad (5.2)$$



Фиг. 3

Легко получить

$$\sigma_\rho = \frac{pb \ln(\rho/a)}{\rho \ln(b/a)}, \quad \sigma_\theta = \frac{pb}{\rho \ln(b/a)} \quad (5.3)$$

$$\varepsilon_\rho = 0, \quad \varepsilon_\theta = -\varepsilon_z = \frac{pb}{3G\rho \ln(b/a)}$$

$$u = \frac{pb}{3G \ln(b/a)}, \quad w = \frac{pbz}{3G\rho \ln(b/a)}$$

Для сравнения приведем решение той же задачи, полученное при использовании линейных соотношений обобщенного закона Гука [1]

$$\sigma_\rho = \frac{pb^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{a^2}{\rho^2}\right), \quad \sigma_\theta = \frac{pb^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{a^2}{\rho^2}\right)$$

$$\varepsilon_\rho = \frac{pb^2}{2G(b^2 - a^2)} \left(\frac{1}{3} - \frac{a^2}{\rho^2}\right), \quad \varepsilon_\theta = \frac{pb^2}{2G(b^2 - a^2)} \left(\frac{1}{3} + \frac{a^2}{\rho^2}\right) \quad (5.4)$$

$$\varepsilon_z = -\frac{pb^2}{3G(b^2 - a^2)}, \quad u = \frac{pb^2}{2G(b^2 - a^2)} \left(\frac{\rho}{3} + \frac{a^2}{\rho}\right)$$

$$w = -\frac{pb^2z}{3G(b^2 - a^2)}$$

Отметим, что напряжения в общем достаточно близки по обеим теориям, большее расхождение имеет место для перемещений и деформаций.

6. Очевидно, что могут быть предложены различные непротиворечивые модели упругого изотропного тела, приводящие при экспериментах на одноосное растяжение-сжатие и чистом сдвиге к линейной зависимости между напряжениями и деформациями.

Рассмотренная модель является одной из возможных. Использование той или иной модели связано со степенью соответствия теоретических результатов с экспериментальными данными и, что не менее важно, математической простотой исходных уравнений.

Возможно, что ряд отклонений поведения реального упругого тела от поведения упругого тела Гука в рамках малых деформаций может быть учтен переходом к некоторой другой потенциальной поверхности, однако, несомненно, что модель Гука приводит для случая малых деформаций к наиболее простым, точнее к наиболее хорошо изученным линейным уравнениям эллиптического типа.

Отметим также, что в свете развитых представлений интерпретация Генки [8] условия пластичности Мизеса как некоторого значения энергии упругого формоизменения не имеет исключительного значения. Например, в данном случае выражение энергии упругого формоизменения совпадает при некотором значении с условием пластичности Треска.

Аналогично, для любого наперед заданного условия пластичности может быть указана модель упругого изотропного тела, выражение энергии упругого формоизменения которого совпадает при некотором значении с данным условием пластичности.

Автор пользуется возможностью выразить признательность В. В. Новожилову и Л. И. Седову за внимание и ценные указания.

Поступила 20. IV. 61

Воронежский государственный университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Л я в А. Математическая теория упругости, М., ОНТИ, 1935.
2. Н о в о ж и л о в В. В. Теория упругости. Судпромгиз, 1958.
3. И в л е в Д. Д. К построению гидродинамики вязкой жидкости. ДАН СССР, 1960, т. 135, № 2.
4. И в л е в Д. Д. К построению теории упругости. ДАН СССР, 1961, т. 138, № 6.
5. P r a g e r W. On the use of singular yield conditions and associated flow rules, J. Appl. Mech., 1953, v. 20, № 3.
6. К о й т е р В. Т. Соотношения между напряжениями и деформациями, вариационные теоремы и теоремы единственности для упруго-пластических материалов с сингулярной поверхностью текучести. Сб. перев. и обз. ин. период. лит., Механика, 1960, № 2.
7. И в л е в Д. Д. О соотношениях, определяющих пластическое течение при условии пластичности Треска и его обобщениях. ДАН СССР, 1959, т. 124, № 3.
8. Г е н к и Г. К теории пластических деформаций и вызываемых ими в материале остаточных напряжений. Сб. статей «Теория пластичности», М., ИИЛ, 1948.