

## К РЕШЕНИЮ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОГО ТЕЛА

В. А. Свекло

(Калининград)

§ 1. Уравнения движения в потенциалах. Уравнения движения в перемещениях для анизотропной среды в плоском случае при отсутствии массовых сил имеют вид [1]

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + d \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad c \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + d \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + a \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

Здесь  $u, v$  — составляющие вектора упругого перемещения,  $a, c, d$  — упругие постоянные, плотность среды принимается равной единице. Ограничимся случаем трех упругих постоянных. Более общий случай рассматривается аналогично. Введя потенциалы безвихревого и экви-воллюминального возмущений по формулам

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1.2)$$

получим уравнения движения в потенциалах

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[ a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + (d+c) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ (a-c) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + d \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right] &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} \left[ (d+c) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[ d \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + (a-c) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right] &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Обобщение метода комплексных решений на случай систем однородных дифференциальных уравнений второго порядка дано в работе [1]. Эти результаты нетрудно перенести на систему уравнений (1.3), отыскивая ее решение в виде:

$$\varphi = \Phi(\Omega), \quad \psi = \Psi(\Omega) \quad (1.4)$$

Здесь  $\Omega$  определена соотношением

$$\delta \equiv l(\Omega)t + m(\Omega)x + n(\Omega)y + k(\Omega) = 0 \quad (1.5)$$

Имеют место следующие формулы дифференцирования для функции  $\varphi$  (аналогично для  $\psi$ ):

$$\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^{\alpha'} \partial y^{\beta'} \partial t^{\gamma'}} = - \frac{1}{\delta'} \frac{\partial}{\partial \Omega} \left[ \frac{1}{\delta'} \frac{\partial}{\partial \Omega} \left( \frac{m^{\alpha'} n^{\beta'} l^{\gamma'}}{\delta'} \Phi' \right) \right] \quad (\alpha' + \beta' + \gamma' = 3) \quad (1.6)$$

$$\delta' = l'(\Omega)t + m'(\Omega)x + n'(\Omega)y + k'(\Omega) \neq 0$$

$$l'(\Omega) = \frac{dl}{d\Omega}, \dots, \Phi'(\Omega) = \frac{d\Phi}{d\Omega}$$

Нетрудно видеть, что система (1.3) удовлетворяется, если

$$\begin{aligned} m [am^2 + (d+c)n^2 - l^2] \Phi' + n [(a-c)m^2 + dn^2 - l^2] \Psi' &= 0 \\ n [(d+c)m^2 + an^2 - l^2] \Phi' - m [dm^2 + (a-c)n^2 - l^2] \Psi' &= 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Отсюда между  $m$ ,  $n$ ,  $l$  устанавливается зависимость

$$\begin{vmatrix} m [am^2 + (d+c)n^2 - l^2] & n [(a-c)m^2 + dn^2 - l^2] \\ n [(d+c)m^2 + an^2 - l^2] & -m [dm^2 + (a-c)n^2 - l^2] \end{vmatrix} = 0 \quad (1.8)$$

а также зависимость между  $\Phi'$  и  $\Psi'$ . Полагая  $l \equiv 1$ ,  $m = -\theta$ ,  $n = \lambda$  запишем (1.5) в виде

$$\delta_j \equiv t - \theta_j x + \lambda_j (\theta_j) y + k_j (\theta_j) = 0 \quad (1.9)$$

где  $\lambda_j$  — корни уравнения (1.8), которое представим в виде

$$\lambda^4 - \frac{a+d-L\theta^2}{ad} \lambda^2 + \left(\frac{1}{a} - \theta^2\right) \left(\frac{1}{d} - \theta^2\right) = 0 \quad (L = a^2 + d^2 - c^2) \quad (1.10)$$

Очевидно  $\lambda_i$  — ветви алгебраической функции  $\lambda$ , однозначной на римановой поверхности, составленной из двух плоскостей  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , в которых проведены разрезы, соответственно, вдоль промежутков  $(-1/\sqrt{a}, 1/\sqrt{a})$ ,  $(-1/\sqrt{d}, 1/\sqrt{d})$ . Плоскости склеены вдоль купюр, соединяющих точки разветвления  $\theta_k^\circ$ , являющихся корнями уравнения

$$\left(\frac{a+d-L\theta^2}{2ad}\right)^2 - \left(\frac{1}{a} - \theta^2\right) \left(\frac{1}{d} - \theta^2\right) = 0 \quad (1.11)$$

Они будут комплексными и попарно сопряженными, если  $c < a - d$ . Последнее неравенство выполняется для всех анизотропных тел, приведенных в [2], как это видно из нижеследующих данных [2] (за единицу принято напряжение  $10^6$  г/см<sup>2</sup>):

Среда	$a$	$d$	$c$	$a-d$
Пириты (кубические)	3680	1075	592	2505
Плавиновый шпат	1670	345	797	1325
Каменная соль	477	129	261	348
Сильвин	375	65.5	263.5	309.5

Для построения решения воспользуемся первым из соотношений (1.7). Введем функции  $\Phi_j$  и  $\Psi_j$ , соответствующие корню  $\lambda_j$ , получим

$$\Phi_j'(\theta_j) = \lambda_j P_j(\theta_j) \omega_j(\theta_j), \quad \Psi_j'(\theta_j) = \theta_j Q_j(\theta_j) \omega_j(\theta_j) \quad (1.12)$$

где  $\omega_j$  — ветви произвольной алгебраической функции  $\omega$ , однозначной на указанной выше римановой поверхности

$$P_j(\theta_j) = (a-c)\theta_j^2 + d\lambda_j^2 - 1, \quad Q_j(\theta_j) = a\theta_j^2 + (d+c)\lambda_j^2 - 1 \quad (1.13)$$

Общее вещественное решение системы уравнений (1.3) вида (1.4) записывается в форме

$$\varphi(x, y, t) = \sum_{j=1}^2 \operatorname{Re} \int_{\theta_j}^{\lambda_j} \lambda_j P_j(\xi) \omega_j(\xi) d\xi, \quad \psi(x, y, t) = \sum_{j=1}^2 \operatorname{Re} \int_{\theta_j}^{\lambda_j} \xi Q_j(\xi) \omega_j(\xi) d\xi \quad (1.14)$$

Если необходимо получить однородные нулевого измерения решения той же системы уравнений, то в равенстве (1.9) следует положить  $k_j \equiv 0$ .

При этом получим

$$\delta_j = 1 - \theta_j \xi + \lambda_j(\theta_j) \eta = 0 \quad \left(\xi = \frac{x}{t}, \quad \eta = \frac{y}{t}\right) \quad (1.15)$$

Это равенство устанавливает соответствие между упомянутой выше римановой поверхностью и областью на плоскости  $\xi\eta$ , где определены

функции  $\theta_1(\xi, \eta)$  и  $\theta_2(\xi, \eta)$ . Это — двулистная область, составленная из двух отдельных областей, соответствующих плоскостям  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , склеенных вдоль кюр, соединяющих точки разветвления  $(\xi_k^\circ, \eta_k^\circ)$ . Последние суть образы на плоскости  $\xi\eta$  точек разветвления  $\theta_k^\circ$ . Границы этих областей находятся как огибающие прямых (1.15) при вещественных  $\theta_j$  и  $\lambda_j$ . Решая уравнение (1.10), получим

$$\lambda_j = \left[ \frac{a+d-L\theta^2}{2ad} + (-1)^j \sqrt{\left(\frac{a+d-L\theta^2}{2ad}\right)^2 - \left(\frac{1}{a} - \theta^2\right)\left(\frac{1}{d} - \theta^2\right)} \right]^{1/2}$$

Под радикалом внутри скобок понимается ветвь, положительная при вещественных  $\theta$ , а под внешними — ветви, положительные на верхних берегах разрезов  $(-1/\sqrt{a}, 1/\sqrt{a})$ ,  $(-1/\sqrt{d}, 1/\sqrt{d})$ . Вне этих разрезов на вещественной оси (при  $c < a - d$ )  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  принимают чисто мнимые значения. Таким образом, точкам римановой поверхности, лежащим на упомянутых разрезах, соответствуют на плоскости  $\xi\eta$  точки кривых конуса лучей; бесконечно удаленная точка — началу выбранной системы отсчета. Указанная выше двулистная область на плоскости  $\xi\eta$  будет одновременно областью комплексности для функций  $\theta_1$  и  $\theta_2$ . В пространстве  $xyt$  она определяет внутренность характеристического конуса системы (1.3), построенного в точке  $x=y=t=0$ .

§ 2. Задача Лэмба. Предполагая сначала, что на границе анизотропной полуплоскости  $y \leq 0$  действует распределенная нагрузка

$$\sigma_y = -N(x, t), \quad \tau_{xy} = -T(x, t) \quad \text{при } y=0 \quad (2.1)$$

отличная от нуля в двумерном интервале  $0 < t < t_0$ ,  $-l_1 < x < l_1$  и имеющая ограниченный импульс, вводим новую нагрузку

$$N_\varepsilon(x, t) = \frac{1}{\varepsilon^2} N\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon}\right), \quad T_\varepsilon(x, t) = \frac{1}{\varepsilon^2} T\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon}\right) \quad (2.2)$$

отличную от нуля в интервале  $0 < t < \varepsilon t_0$ ,  $-\varepsilon l_1 < x < \varepsilon l_1$ , и соответствующее ей решение  $\varphi_\varepsilon(x, y, t)$  и  $\psi_\varepsilon(x, y, t)$ . Нетрудно показать, что в пределе при  $\varepsilon \rightarrow 0$  получим однородные нулевого измерения функции  $\varphi$  и  $\psi$ , соответствующие действию мгновенного импульса. Таким образом, для решения задачи необходимо найти однородное нулевого измерения решение системы уравнений (1.3), обращающее в нуль в точках границы среды при  $t > 0$  напряжения  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$ , т. е. комбинации

$$\begin{aligned} (\delta_1 - 1) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \gamma_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - (1 + \gamma_1 - \delta_1) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= 0 \\ 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= 0 \quad \left( \delta_1 = \frac{c}{d}, \gamma_1 = \frac{a}{d} \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Решение ищем в форме (1.14). При этом граничные условия будут удовлетворены, если определенные в верхней полуплоскости аналитические функции  $\Phi_j, \Psi_j$  найдем из соотношений

$$\sum_{j=1}^2 \operatorname{Re} \{ [(c-d)\theta^2 + a\lambda_j^2] \Phi_j' + (a+d-c)\theta\lambda_j \Psi_j' \} = 0 \quad (2.4)$$

$$\sum \operatorname{Re} \{ -20\lambda_j \Phi_j' + (\lambda_j^2 - \theta^2) \Psi_j' \} = 0$$

Подставляя значения  $\Phi_j'$  и  $\Psi_j'$  из (1.12), получим

$$\operatorname{Re} [\lambda_1 S_1 \omega_1 + \lambda_2 S_2 \omega_2] = 0, \quad \operatorname{Re} \theta [M_1 \omega_1 + M_2 \omega_2] = 0 \quad (2.5)$$

Отсюда при помощи обычных рассуждений выводим

$$\lambda_1 S_1 \omega_1 + \lambda_2 S_2 \omega_2 = i\alpha, \quad \theta [M_1 \omega_1 + M_2 \omega_2] = i\beta \quad (2.6)$$

где

$$\begin{aligned} S_j &= [(\delta_1 - 1) \theta^2 + \gamma_1 \lambda_j^2] P_j + (1 + \gamma_1 - \delta_1) Q_j \\ M_j &= -2\lambda_j^2 P_j + (\lambda_j^2 - \theta^2) Q_j \end{aligned} \quad (j = 1, 2) \quad (2.7)$$

Определив  $\omega_j$  из (2.6) и подставив в (1.12), найдем

$$\begin{aligned} \Phi_1' + \Phi_2' &= i \sum_{j=1}^2 \frac{\lambda_j P_j M_{3-j} \alpha + \lambda_j \lambda_{3-j} P_{3-j} S_j \beta}{(\lambda_j - \lambda_{3-j}) \Delta(\theta_j)} \\ \Psi_1' + \Psi_2' &= i \sum_{j=1}^2 \frac{\theta_j Q_j M_{3-j} \alpha + \lambda_j S_j Q_{3-j} \beta}{(\lambda_j - \lambda_{3-j}) \Delta(\theta_j)} \end{aligned} \quad \Delta(\theta_j) = \theta_j \sum_{k=1}^2 \frac{\lambda_k S_k M_{3-k}}{(\lambda_k - \lambda_{3-k})} \quad (2.8)$$

Так как непосредственное определение постоянных  $\alpha$  и  $\beta$  оказывается трудной задачей, то избирается косвенный путь. Строим решение той же задачи при помощи последовательного применения преобразований Фурье и Лапласа подобно тому, как сделано в работе [3], и затем сравниваем с решением (2.8); приводим окончательный результат

$$\begin{aligned} \varphi &= -\frac{N_{\rightarrow}}{\pi d_1} \int_0^{\infty} R_1^{\circ\circ}(y, t, k) \frac{\cos kx}{k} dk + \frac{T_{\rightarrow}}{\pi d_1} \int_0^{\infty} R_2^{\circ\circ}(y, t, k) \frac{\sin kx}{k} dk \\ \psi &= \frac{N_{\rightarrow}}{\pi d_1} \int_0^{\infty} S_1^{\circ\circ}(y, t, k) \frac{\sin kx}{k} dk + \frac{T_{\rightarrow}}{\pi d_1} \int_0^{\infty} S_2^{\circ\circ}(y, t, k) \frac{\cos kx}{k} dk \end{aligned} \quad (2.9)$$

Здесь  $d_1 = \rho d$ , где  $\rho$  — плотность среды (принимаемая за единицу),  $N_{\rightarrow}$ ,  $T_{\rightarrow}$  — нормальная и тангенциальная составляющие импульса

$$\begin{aligned} R_1^{\circ\circ} &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \sum_{j=1}^2 \frac{\lambda_j^{\circ\circ} P_j^{\circ\circ} M_{3-j}^{\circ\circ}}{\lambda_j^{\circ\circ} - \lambda_{3-j}^{\circ\circ}} e^{\vartheta} \frac{d\zeta}{\Delta^{\circ\circ}(\zeta)} \\ R_2^{\circ\circ} &= \frac{1}{2\lambda_j} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \sum_{j=1}^2 \frac{\lambda_j^{\circ\circ} P_j^{\circ\circ} \lambda_{3-j}^{\circ\circ} S_{3-j}^{\circ\circ} l^{\vartheta}}{\lambda_j^{\circ\circ} - \lambda_{3-j}^{\circ\circ}} \frac{d\zeta}{\Delta^{\circ\circ}(\zeta)} \\ S_1^{\circ\circ} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \sum_{j=1}^2 \frac{Q_j^{\circ\circ} M_{3-j}^{\circ\circ} e^{\vartheta}}{\lambda_j^{\circ\circ} - \lambda_{3-j}^{\circ\circ}} \frac{d\zeta}{\Delta^{\circ\circ}(\zeta)}, \quad S_2^{\circ\circ} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \sum_{j=1}^2 \frac{Q_j^{\circ\circ} \lambda_{3-j}^{\circ\circ} S_{3-j}^{\circ\circ} l}{\lambda_j^{\circ\circ} - \lambda_{3-j}^{\circ\circ}} \frac{d\zeta}{\Delta^{\circ\circ}(\zeta)} \\ \vartheta &= \vartheta(\zeta) = (\zeta t - \lambda_j^{\circ\circ} y^{\circ}) k \end{aligned} \quad (2.10)$$

Функции  $\lambda_j^{\circ\circ}$ ,  $M_j^{\circ\circ}$ ,  $S_j^{\circ\circ}$ ,  $P_j^{\circ\circ}$ ,  $Q_j^{\circ\circ}$  получаются из  $\lambda_j$ ,  $M_j$ ,  $S_j$ ,  $P_j$ ,  $Q_j$ , введенных ранее, заменой  $\theta$  на  $i/\zeta$ . Для отыскания  $\alpha$  и  $\beta$  достаточно вычислить исходя из обоих решений, например,  $\partial\varphi/\partial x$ . На основании решения (2.9) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial x} &= \frac{N_{\rightarrow}}{\pi d_1} \int_0^{\infty} \int_{l_2} \sum_{j=1}^2 \frac{\lambda_j^{\circ\circ} P_j^{\circ\circ} M_{3-j}^{\circ\circ} e^{\theta^{\circ\circ}}}{(\lambda_j^{\circ\circ} - \lambda_{3-j}^{\circ\circ}) (ix - \lambda_j^{\circ\circ} y + \zeta t)} \frac{d\zeta dk}{i\Delta^{\circ\circ}(\zeta)} + \\ &+ T_{\rightarrow} \int_0^{\infty} \int_{l_2} \sum_{j=1}^2 \frac{\lambda_j^{\circ\circ} \lambda_{3-j}^{\circ\circ} P_j^{\circ\circ} S_j^{\circ\circ} e^{\theta^{\circ\circ}} d\zeta dk}{(\lambda_j^{\circ\circ} - \lambda_{3-j}^{\circ\circ}) (ix - \lambda_j^{\circ\circ} y + \zeta t) \Delta^{\circ\circ}(\zeta)} \\ \theta^{\circ\circ} &= \theta^{\circ\circ}(\zeta) = (ix - \zeta t - \lambda_j^{\circ\circ} y) k \end{aligned} \quad (2.11)$$

Меняя порядок интегрирования и выбирая контур  $l_2$  так, чтобы правее его оказались только особенности, соответствующие корням уравнения  $ix - \lambda_j^{\circ\circ}y + \zeta t = 0$ , и пользуясь леммой Жордана и теоремой о вычетах, получим, перейдя к переменной  $\theta$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \sum_{j=1}^2 \left\{ -\frac{N_{\rightarrow}}{\pi d_1} \operatorname{Re} \frac{\lambda_j P_{3-j} M_{3-j}}{(\lambda_j - \lambda_{3-j}) \delta_j'} \frac{i}{\Delta(\theta_j)} - \frac{T_{\rightarrow}}{\pi d_1} \operatorname{Re} \frac{\lambda_j \lambda_{3-j} P_j S_{3-j}}{(\lambda_j - \lambda_{3-j}) \delta_j'} \frac{i}{\Delta(\theta_j)} \right\} \quad (2.12)$$

$$\delta_j' = -x + \lambda_j'(\theta_j) y$$

Сравнивая это выражение с тем, которое легко получить на основании решения (2.8), находим

$$\alpha = -\frac{N_{\rightarrow}}{\pi d_1}, \quad \beta = -\frac{T_{\rightarrow}}{\pi d_1} \quad (2.13)$$

Этим завершается решение поставленной задачи. Определитель  $\Delta(\theta)$  записывается в виде

$$\Delta(\theta) = -c\theta(\theta^2 + \lambda_1^2)(\theta^2 + \lambda_2^2) \sqrt{a^{-1} - \theta^2} R(\theta)$$

$$R(\theta) = \{[a^2 - (c-d)^2]\theta^2 - a\} \sqrt{d^{-1} - \theta^2} - a \sqrt{a^{-1} - \theta^2} \quad (2.14)$$

Функция Релея  $R(\theta)$  для анизотропной среды изучена в работе [1]. Она имеет два вещественных симметричных корня, определяющих скорость распространения в данной среде поверхностных волн Релея. Качественная картина движения анизотропной среды аналогична той, которую имеем для изотропного тела. Возмущение, возникшее в начале координат в момент  $t = 0$ , распространяется затем на всю полуплоскость, затухая постепенно во всех внутренних точках. С течением времени почти вся энергия возмущения концентрируется вблизи поверхности тела и доносится на весьма далекие расстояния в виде поверхностных волн Релея. При  $c = a - d$  из формул (2.8) получаем известное решение задачи Лэмба для изотропной среды.

§ 3. Задача Лэмба при смешанных граничных условиях. Граничные условия принимаем такими же, как в работе [4]

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= 0 \quad \text{при } y = 0, \quad -\infty < x < \infty \\ \sigma_y &= 0 \quad \text{при } x > 0, \quad v = 0 \quad \text{при } x < 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Из условия равенства нулю напряжения  $\tau_{xy}$  в точках границы имеем

$$\theta(M_1 \omega_1 + M_2 \omega_2) = i\beta \quad (3.2)$$

Положим

$$\lambda_1 S_1 \omega_1 + \lambda_2 S_2 \omega_2 = A(\theta), \quad \operatorname{Re} A(\theta) = 0 \quad (\theta > 0) \quad (3.3)$$

и будем считать искомой функцию  $A(\theta)$ , которую предположим ограниченной на бесконечности. Третье граничное условие дает

$$\sum_{j=1}^2 (\lambda_j^2 P_j + \theta^2 Q_j) \omega_j = B(\theta), \quad \operatorname{Re} B(\theta) = 0 \quad (\theta < 0) \quad (3.4)$$

Из равенства (3.1) и (3.3) находим

$$\omega_j(\theta) = -\frac{\lambda_{3-j} S_{3-j} i\beta - \theta M_{3-j} A(\theta)}{(\lambda_j - \lambda_{3-j}) \Delta(\theta_j)} \quad (3.5)$$

Подставляя в (3.4) получим

$$T_1^\circ A(\theta) - T_2^\circ i\beta = B(\theta) \quad (3.6)$$

где

$$T_1^\circ(\theta) = \sum_{j=1}^2 \frac{\lambda_j P_j + \theta^2 Q_j}{\lambda_j - \lambda_{3-j}} \frac{\theta M_{3-j}}{\Delta(\theta)}, \quad T_2^\circ(\theta) = \sum_{j=1}^2 \frac{\lambda_j^2 P_j + \theta^2 Q_j \lambda_{3-j} S_{3-j}}{\lambda_j - \lambda_{3-j}} \frac{S_{3-j}}{\Delta(\theta)} \quad (3.7)$$

Для последующего удобно заменить постоянные  $a, d, c$ , соответственно на  $a^{-2}, d^{-2}, c^{-2}$ . Итак, искомая аналитическая в верхней полуплоскости функция  $A(\theta)$  удовлетворяет на вещественной оси условиям

$$\operatorname{Re} A(\theta) = 0 \quad (\theta > -a), \quad \operatorname{Re} [T_1^\circ A(\theta) - T_2^\circ i\beta] = 0 \quad (\theta < -a) \quad (3.8)$$

Так как  $P_j, Q_j, S_j, M$  вещественны при вещественных значениях  $\theta$ , то в силу значения определителя  $\Delta(\theta)$  и выбора ветвей  $\lambda_j$  и радикалов  $\sqrt{a^2 - \theta^2}$  и  $\sqrt{d^2 - \theta^2}$  (они считаются положительными на верхних берегах разрезов  $(-a, a), (-d, d)$ ) функция  $T_2^\circ$  вещественна, а  $T_1^\circ$  — чисто мнима при  $\theta < -d$ . Следовательно, при  $\theta < -d$  имеем:  $\operatorname{Im} A(\theta) = 0$ , т. е. функция  $A(\theta)$  аналитически продолжается через этот участок оси. Обозначая через  $f$  ее вещественное значение на отрезке  $(-d, -a)$ , получим

$$A(\theta) = \frac{\sqrt{d+\theta}}{2\pi i} \int_{-d}^{-a} \frac{f(\xi) d\xi}{\sqrt{d+\xi}(\xi-\theta)} = \sqrt{d+\theta} \chi(\theta) \quad (3.9)$$

Под радикалом  $\sqrt{d+\theta}$  понимается ветвь, положительная на верхнем берегу разреза  $\theta > -d$ . Для функции  $\chi(\theta)$  на верхнем берегу отрезка  $(-d, -a)$  имеем

$$\frac{\chi^+}{(\lambda_1 - \lambda_2) \Delta(\theta)} + \frac{\bar{\chi}^+}{(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2) \bar{\Delta}(\theta)} = 2 \frac{\operatorname{Re} T_2^\circ i\beta}{\sqrt{d+\theta} Q_0(\theta)} \quad (3.10)$$

$$Q_0 = \sum_{j=1}^2 (-1)^{3-j} (\lambda_j^2 P_j + \theta^2 Q_j) M_{3-j}$$

Учитывая значение  $\Delta(\theta)$  и то, что  $\bar{\chi}^+ = -\chi^-$ , где  $\chi^-$  — значение  $\chi(\theta)$  на упомянутом отрезке снизу, получим

$$\chi^+ = G\chi^- + g \quad (3.11)$$

$$G(\theta) = -G_1(\theta) = -\frac{(\lambda_1 - \lambda_2) R(\theta)}{(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2) \bar{R}(\theta)}, \quad g(\theta) = \frac{2\operatorname{Re} i T_2^\circ (\lambda_1 - \lambda_2) \Delta(\theta)}{\sqrt{d+\theta} Q_0(\theta)} \beta$$

Таким образом, приходим к известной граничной задаче, решение которой, удовлетворяющее всем условиям, записывается в виде

$$\chi(\theta) = \beta \frac{X_0(\theta)}{2\pi i} \int_{-d}^{-a} \frac{g_1(\xi) (\lambda_1 - \lambda_2) \Delta(\xi)}{X_0^+(\xi) (\xi - \theta)} d\xi + X_0(\theta) i\beta_1 \quad (3.12)$$

$$g_1(\theta) = \frac{2\operatorname{Re} i T_2^\circ}{\sqrt{d+\theta} Q_0(\theta)}, \quad X_0(\theta) = \frac{1}{\sqrt{d+\theta} \sqrt{a+\theta}} \exp \frac{1}{2\pi i} \int_{-d}^{-a} \frac{\ln G_1 d\xi}{\xi - \theta}$$

По формулам (2.8) находим

$$\Phi_1' + \Phi_2' = \sum_{j=1}^2 \frac{(\theta_j M_{3-j} A(\theta) - \lambda_{3-j} S_{3-j} i\beta) \lambda_j P_j}{(\lambda_j - \lambda_{3-j}) \Delta(\theta_j)}$$

$$\Psi_1' + \Psi_2' = \sum_{j=1}^2 \frac{(\theta_j M_{3-j} A(\theta) - \lambda_{3-j} S_{3-j} i\beta) \theta_j Q_j}{(\lambda_j - \lambda_{3-j}) \Delta(\theta_j)} \quad (3.13)$$

Постоянную  $\beta_1$  найдем из условия ограниченности решения при  $\theta = -c_0$ , где  $c_0^{-1}$  — скорость волны Релея. Согласно (3.13) имеем

$$\sum_{j=1}^2 \frac{\theta M_{3-j} \lambda_j P_j}{\lambda_j - \lambda_{3-j}} A(\theta) - \sum_{j=1}^2 \frac{\lambda_j \lambda_{3-j} P_j S_{3-j}}{\lambda_j - \lambda_{3-j}} i\beta = 0 \quad \text{при } \theta = -c_0 \quad (3.14)$$

При этом, как нетрудно проверить, в силу того, что  $\Delta(-c_0) = 0$ , обратится в нуль и числитель в выражении для  $\Psi_1' + \Psi_2'$ , что позволяет выразить постоянную  $\beta_1$  через  $\beta$  и записать

$$A(\theta) = i\beta A_0(\theta) \quad (3.15)$$

Подставляя в (3.13), получим

$$\Phi_1' + \Phi_2' = i\beta \sum_{j=1}^2 \frac{(\theta_j M_{3-j} A_0(\theta) - \lambda_{3-j} S_{3-j}) \lambda_j P_j}{(\lambda_j - \lambda_{3-j}) \Delta(\theta)} \quad (3.16)$$

$$\Psi_1' + \Psi_2' = i\beta \sum_{j=1}^2 \frac{(\theta_j M_{3-j} A_0(\theta) - \lambda_{3-j} S_{3-j}) \theta_j Q_j}{(\lambda_j - \lambda_{3-j}) \Delta(\theta_j)} \quad (3.17)$$

В виду того, что при больших  $\theta$  член с  $A_0(\theta)$  исчезает и выражение (3.17) стремится к решению, соответствующему действию только касательной составляющей импульса, то  $\beta = -T_{\rightarrow} / \pi d_1$ . Тем самым решение задачи доводится до конца. Нетрудно проверить, что при  $c^{-2} = a^{-2} - d^{-2}$  мы приходим к результату, полученному для изотропного тела в работе [4].

§ 4. Отражение плоской волны от прямолинейной границы. К такой же, но только однородной задаче Гильберта приходим, рассматривая отражение ступенчатой плоской волны от прямолинейной границы. Падающей волной задаемся в виде

$$\begin{aligned} \varphi_1^\circ(\Omega_1^\circ) + \varphi_2^\circ(\Omega_2^\circ) &= \sum_{j=1}^2 \lambda_j^\circ P_j^\circ \omega_j(\Omega_j^\circ) \\ \Omega_j^\circ &= t - \theta_0 x - \lambda_j(\theta_0) y \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\psi_1^\circ(\Omega_1^\circ) + \psi_2^\circ(\Omega_2^\circ) = \sum_{j=1}^2 \theta_0 Q_j^\circ \omega_j(\Omega_j^\circ)$$

где  $\omega_j$  — ветви произвольной функции, однозначной на указанной выше римановой поверхности. Граничные условия выбираем смешанными (фиг. 1)<sup>1</sup>. Отраженные волны, соответствующие различным краевым условиям, имеющим место при  $x > 0$  и  $x < 0$ , легко строятся. Решение получаем в виде

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \sum_{j=1}^2 (\varphi_j^\circ + \varphi_{-j}^\circ + \varphi_{j-3}^{\circ\circ}), \quad \psi_1 + \psi_2 = \sum_{j=1}^2 (\psi_j^\circ + \psi_{-j}^\circ + \psi_{j-3}^{\circ\circ}) \quad (4.2)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_j &= -\lambda_j^\circ P_j^\circ \omega_j(\Omega_j^\circ) + \lambda_j^\circ P_j^\circ C_j \omega_j(\Omega_{-j}^\circ) + \lambda_{3-j}^\circ P_{3-j}^\circ D_{3-j} \omega_j(\Omega_{j-3}^\circ) \\ \psi_j &= \theta_0 Q_j^\circ \omega_j(\Omega_j^\circ) + \theta_0 Q_j^\circ C_j \omega_j(\Omega_{-j}^\circ) + \theta_0 Q_{3-j}^\circ D_{3-j} \omega_j(\Omega_{j-3}^\circ) \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\lambda_j^\circ = \lambda_j(\theta_0), \quad P_j^\circ = P_j(\theta_0), \quad Q_j^\circ = Q_j(\theta_0), \quad \Omega_{-j}^\circ = t - \theta_0 x + \lambda_j^\circ, \dots$$

Значения постоянных  $C_j$  и  $D_j$  зависят от граничных условий

<sup>1</sup> На фиг. 1 и 3 точки  $\xi_k^\circ$  образы на плоскости  $xu$  в момент  $t$  точек разветвления  $\theta_k^\circ$ .

Так, для границы, свободной от напряжений

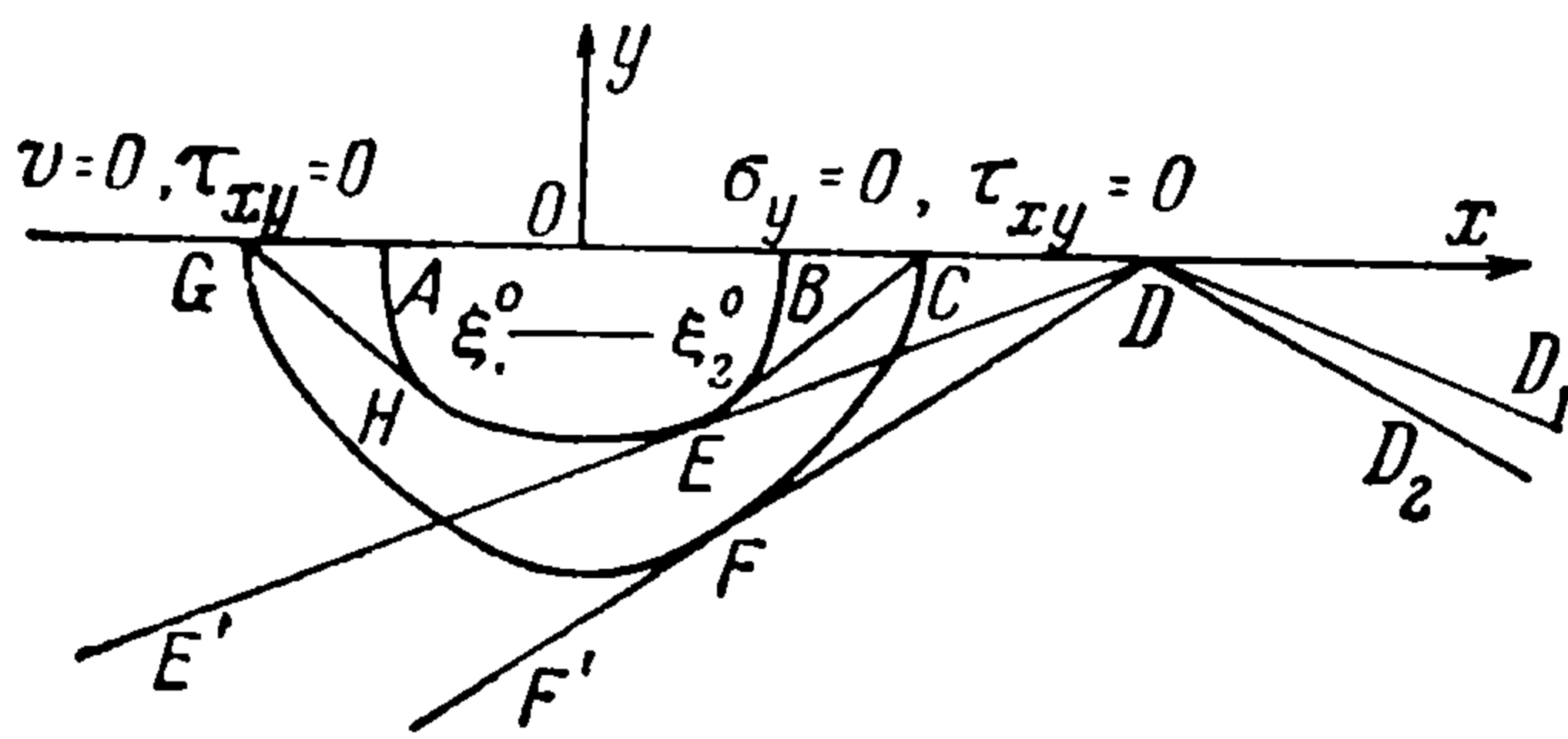
$$C_j = \frac{\lambda_j^\circ S_j^\circ M_{3-j}^\circ + \lambda_{3-j}^\circ S_{3-j}^\circ M_j^\circ}{(\lambda_j^\circ - \lambda_{3-j}^\circ) \Delta^\circ}, \quad D_{3-j} = -\frac{2\lambda_j^\circ S_j^\circ M_j^\circ}{(\lambda_j^\circ - \lambda_{3-j}^\circ) \Delta^\circ}$$

$$\Delta^\circ = \Delta(\theta_0) \quad (4.4)$$

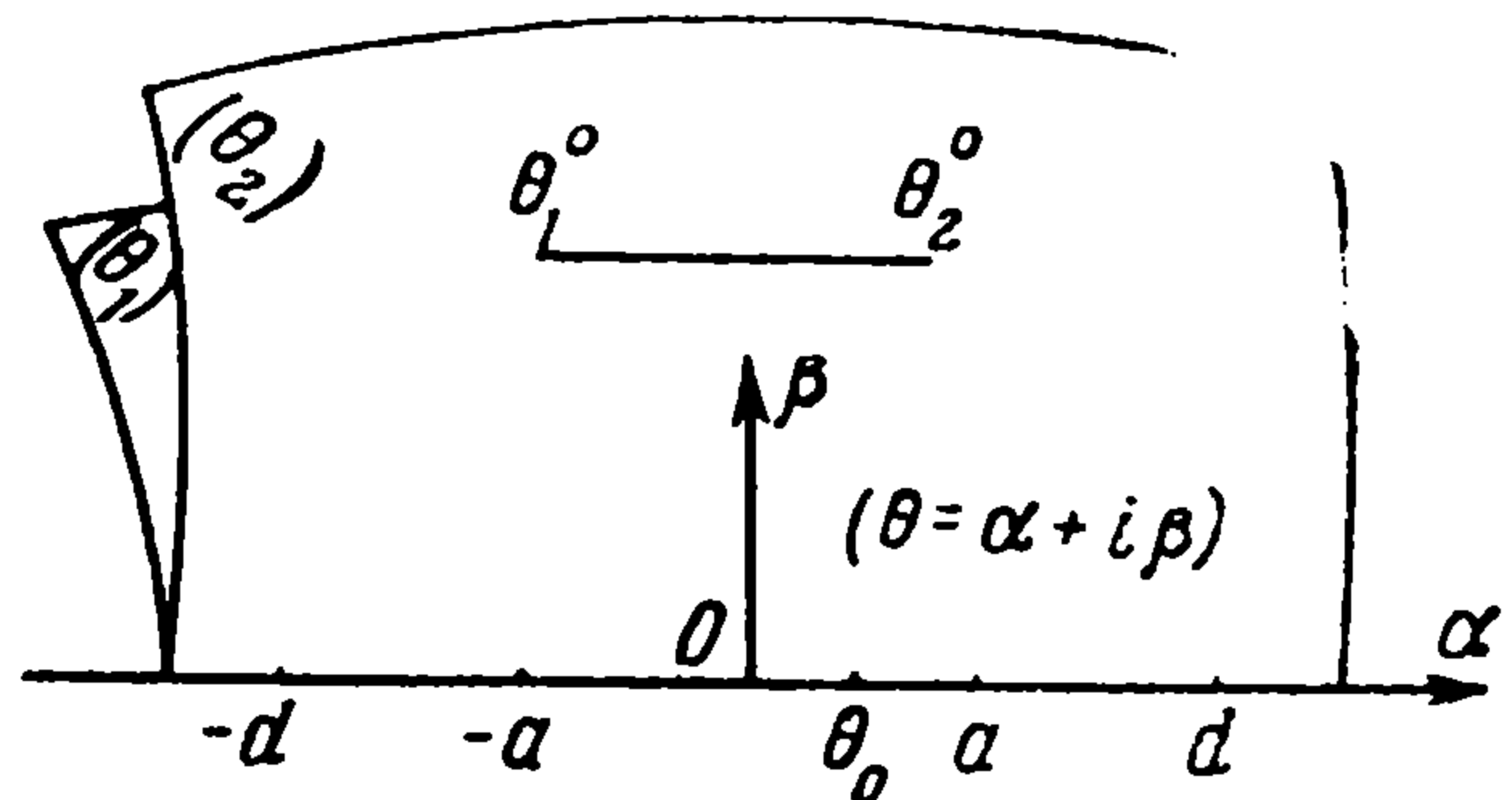
Для условий, имеющих место при  $x < 0$ , получим

$$C_1' = D_1' = -1, \quad C_2' = D_2' = 0 \quad (4.5)$$

В дальнейшем под функцией  $\omega_j$  будем понимать ступенчатую функцию  $\omega_0(\xi)$ , равную нулю при  $\xi < 0$  и единице, если  $\xi > 0$ . При этом в области  $CFD$  безвихревое возмущение, соответствующее корню  $\lambda_1$ , равно



Фиг. 1



Фиг. 2

$\Phi_1^\circ + \Phi_{-1}^\circ + \Phi_{-1}^{\circ\circ}$ , а в области  $CED$  такое же возмущение, но соответствующее корню  $\lambda_2$ , равно  $\Phi_2^\circ + \Phi_{-2}^\circ + \Phi_{-2}^{\circ\circ}$ . Аналогично, безвихревое возмущение в областях  $GFF'$  и  $GHEE'$  имеют интенсивности  $\Phi_1 + \Phi_{-1}' + \Phi_{-1}^{\circ\circ}$  и  $\Phi_2 + \Phi_{-2}' + \Phi_{-2}^{\circ\circ}$ . В тех же областях легко определяются интенсивности соответствующих эквиволуминальных возмущений  $\Psi_j^\circ + \Psi_{-j}^\circ + \Psi_{-j}^{\circ\circ}$  и  $\Psi_j^\circ + \Psi_{-j}' + \Psi_{-j}^{\circ\circ}$ . Функции  $\Phi_j(\theta_j)$  и  $\Psi_j(\theta_j)$ , описывающие возмущение в области  $OGFCBO$ , определены в верхних полуплоскостях римановой поверхности. Так как дуги  $CFG$  и  $BEA$  суть огибающие прямых  $t - \theta_j x + \lambda_j y = 0$  при вещественных  $\theta_j$  и  $\lambda_j$ , то точкам  $E$  и  $F$  на плоскости  $xy$  соответствует одна и та же точка  $\theta_0$ , лежащая на отрезке  $(-a, a)$  (фиг. 2). В этой точке однозначные и кусочно постоянные на упомянутом отрезке функции  $\Phi_1(\theta_1) + \Phi_2(\theta_2)$ ,  $\Psi_1(\theta_1) + \Psi_2(\theta_2)$  имеют конечные разрывы. Представляя их интегралами типа Коши и дифференцируя, легко найдем в окрестности  $\theta_0$

$$\Phi_1'(\theta) + \Phi_2'(\theta) \approx \frac{\alpha_0}{\pi i (\theta - \theta_0)}, \quad \alpha_0 = -2 \frac{\lambda_1^\circ S_1^\circ + \lambda_2^\circ S_2^\circ}{\Delta^\circ} \sum_{j=1}^2 \frac{\lambda_j^\circ P_j^\circ M_{3-j}^\circ}{\lambda_j^\circ - \lambda_{3-j}^\circ}$$

$$\Psi_1'(\theta) + \Psi_2'(\theta) \approx \frac{\beta_0}{\pi i (\theta - \theta_0)}, \quad \beta_0 = -2\theta_0 \frac{\lambda_1^\circ S_1^\circ + \lambda_2^\circ S_2^\circ}{\Delta^\circ} \sum_{j=1}^2 \frac{Q_j^\circ M_{3-j}^\circ}{\lambda_j^\circ - \lambda_{3-j}^\circ}$$

Из условия равенства нулю касательного напряжения на границе полуплоскости следует

$$\operatorname{Re}(M_1 \omega_1 + M_2 \omega_2) = 0 \quad (4.7)$$

Из равенства нулю нормального напряжения при  $x > 0$  выводим

$$\operatorname{Re}(\lambda_1 S_1 \omega_1 + \lambda_2 S_2 \omega_2) = 0 \quad (\theta > 0) \quad (4.8)$$

Отсутствие вертикального смещения при  $x < 0$  дает

$$\operatorname{Re}(T_1 \omega_1 + T_2 \omega_2) = 0, \quad T_j = \lambda_j^2 P_j + \theta^2 Q_j \quad (\theta < 0) \quad (4.9)$$

Так как в начале координат нет источника колебаний, то

$$M_1\omega_1 + M_2\omega_2 = 0$$

Положим  $\lambda_1 S_1\omega_1 + \lambda_2 S_2\omega_2 = A(\theta)$ ; имеем

$$\operatorname{Re} A(\theta) = 0, \quad \theta > 0$$

Выразив  $\omega_j$  через  $A(\theta)$  и подставив в (4.13), получим

$$\operatorname{Re} \frac{T_1 M_2 - T_2 M_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{A(\theta)}{\Delta(\theta)} = 0 \quad (\theta < 0) \quad (4.10)$$

Легко видеть, что  $\operatorname{Im} A(\theta) = 0$  при  $\theta < -d$ . Поэтому, согласно (3.9), имеем  $A = \sqrt{d + \theta} A_1$ , где

$$\operatorname{Re} \frac{T_1 M_2 - T_2 M_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{A_1(\theta)}{\Delta(\theta)} = 0 \quad (-d < \theta < -a) \quad (4.11)$$

Функция  $A_1(\theta)$  имеет полюс первого порядка в точке  $\theta = \theta_0$ , а исходное решение, как раньше, должно быть ограничено при  $\theta = -c_0$ . Если введем новую функцию  $A_2 = (\theta - \theta_0) A_1 / (\theta - c_0)$ , то на верхнем берегу отрезка  $(-d, -a)$  получим

$$\operatorname{Re} \frac{T_1 M_2 - T_2 M_1}{\lambda_1 - \lambda_1} \frac{A_2^+(\theta)}{\sqrt{a^2 - \theta^2} R(\theta)} = 0 \quad (-d < \theta < -a) \quad (4.12)$$

Здесь  $A_2^+$  — значение функции  $A_2$  на отрезке  $(-d, -a)$  при подходе сверху. Обозначая через  $A_2^-$  ее граничные значения снизу на этом отрезке, легко установим, что  $\overline{A_2^+} = A_2^-$ . Это дает возможность свести вопрос к решению следующей однородной задачи Гильберта:

$$A_2^+ = G A_2^-, \quad G = - \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \frac{R(\theta)}{\overline{R(\theta)}} \quad (4.13)$$

общее решение которой имеет вид

$$A_2(\theta) = i\beta \frac{X_0(\theta)}{\sqrt{a + \theta} \sqrt{d + \theta}}, \quad X_0(\theta) = \exp \int_{-d}^{-a} \frac{\ln G_1}{\xi - \theta} d\xi, \quad G_1 = -G \quad (4.14)$$

где  $\beta$  — вещественная постоянная. Под радикалами понимаются ветви, положительные на верхних берегах разрезов  $\theta > -a$  и  $\theta > -d$ . Соответственно получаем для  $A_1(\theta)$

$$A_1(\theta) = i\beta \frac{\theta + c_0}{\theta - \theta_0} \frac{X_0^*(\theta)}{\sqrt{a + \theta} \sqrt{d + \theta}} \quad (4.15)$$

Постоянная находится из учета особенностей функций  $\Phi_1'(\theta) + \Phi_2'(\theta)$ ,  $\Psi_1'(\theta) + \Psi_2'(\theta)$  при  $\theta = \theta_0$ . Согласно (4.6), устремляя  $\theta$  к  $\theta_0$ , получим

$$\beta = \frac{2(\lambda_1^\circ S_1^\circ + \lambda_2^\circ S_2^\circ)}{\pi(\theta_0 + c_0)} \sqrt{a + \theta_0} \exp \left( - \frac{1}{2\pi i} \int_{-d}^{-a} \frac{\ln G_1}{\xi - \theta_0} d\xi \right) \quad (4.16)$$

Поставленная задача решена. Полагая  $c^{-2} = a^{-2} - d^{-2}$ , приходим к решению той же задачи для изотропного тела

$$G_1 = - \frac{F(\theta)}{\overline{F(\theta)}}, \quad F(\theta) = (d^2 - 2\theta^2)^2 + 4\theta^2 \sqrt{a^2 - \theta^2} \sqrt{d^2 - \theta^2} \\ \Phi_2'(\theta) = \Psi_1'(\theta) = 0 \quad (4.17)$$

$$\Phi_1'(\theta) = (a^{-2} - d^{-2}) \frac{d^2 - 2\theta^2}{F(\theta)} A(\theta), \quad \Psi_2'(\theta) = (a^{-2} - d^{-2}) \frac{\sqrt{a^2 - \theta^2}}{F(\theta)} A(\theta)$$

§ 5. Дифракция относительно жестко заделанной щели. Для изотропного тела эта задача рассматривалась в работах [5, 6]. Решение уравнений (1.1) типа (1.4) строим в перемещениях. Согласно [1], получим

$$u(x, y, t) = \operatorname{Re} [u_1(\theta_1) + u_2(\theta_2)] = \sum_{j=1}^2 \operatorname{Re} \int_{\theta_j}^{\theta_j} K(\xi) \lambda_j(\xi) \omega_j(\xi) d\xi \quad (5.1)$$

$$v(x, y, t) = \operatorname{Re} [v_1(\theta_1) + v_2(\theta_2)] = \sum_{j=1}^2 \operatorname{Re} \int_{\theta_j}^{\theta_j} L_j(\xi) \omega_j(\xi) d\xi$$

где

$$L_j(\xi) = a^{-2}\xi^2 + d\lambda_j^2(\xi) - 1, \quad K(\xi) = c^{-2}\xi \quad (5.2)$$

Переменные  $\theta_j$  определены соотношением (1.15). Упругая среда заполняет плоскость с разрезом  $y = 0, x > 0$ . При  $t < 0$  в части плоскости, где  $x < 0$ , движется плоская волна

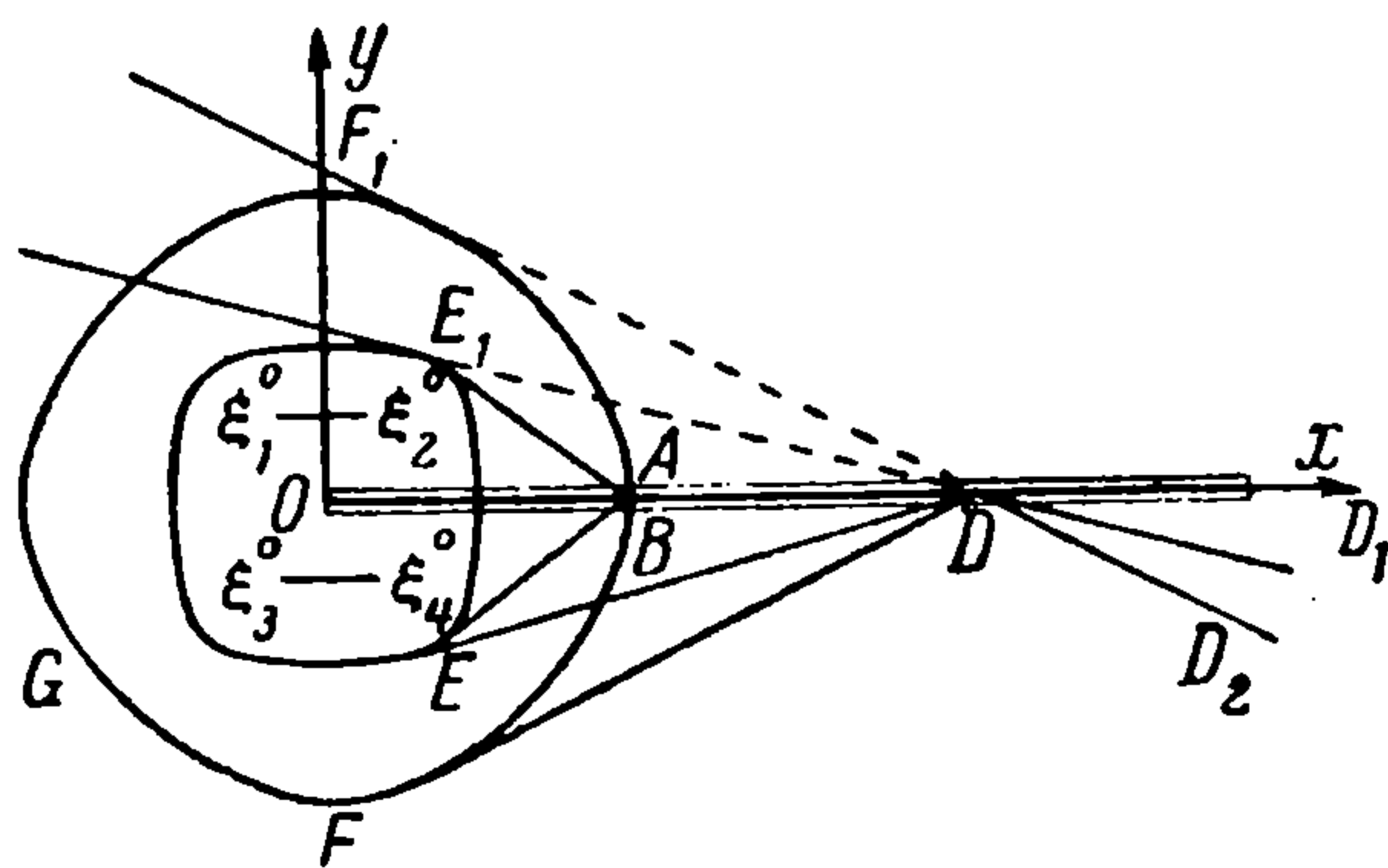
$$u^\circ(x, y, t) = -K(\theta_0) [\lambda_1^\circ \omega_1^\circ(\Omega_1^\circ) + \lambda_2^\circ \omega_1^\circ(\Omega_2^\circ)] \quad (5.3)$$

$$v^\circ(x, y, t) = L_1(\theta_0) \omega_1^\circ(\Omega_1^\circ) + L_2(\theta_0) \omega_2^\circ(\Omega_2^\circ)$$

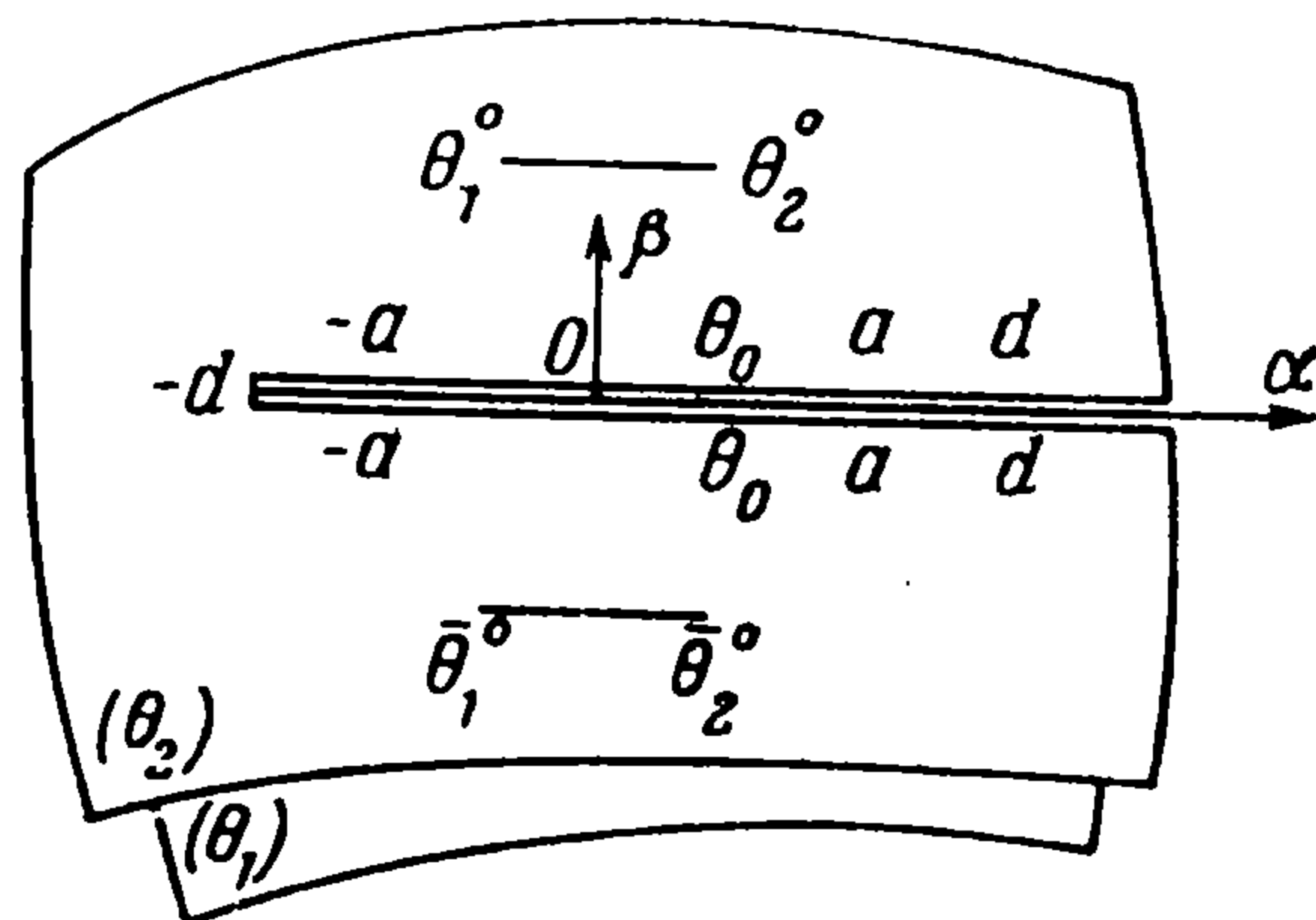
$$\Omega_j^\circ = t - \theta_0 x - \lambda_j^\circ y \quad (0 < \theta_0 < a)$$

достигающая в момент  $t = 0$  острия щели. Дифракционная картина при  $t > 0$  изображена на фиг. 3.

Отраженные плоские волны в окрестности нижнего края щели на-



Фиг. 3



Фиг. 4

ходим из учета граничных условий, рассматривая пакет плоских волн вида

$$u^{\circ\circ}(x, y, t) = \sum_{j=1}^2 K^\circ [-\lambda_j^\circ \omega_j^\circ(\Omega_j^\circ) + \lambda_j^\circ N_j \omega_j^\circ(\Omega_j^{\circ\prime}) + \lambda_{3-j}^\circ E_j \omega_j^\circ(\Omega_{3-j}^{\circ\prime\prime})]$$

$$v^{\circ\circ}(x, y, t) = \sum_{j=1}^2 [L_j^\circ \omega_j^\circ(\Omega_j^\circ) + L_j^\circ N_j \omega_j^\circ(\Omega_j^{\circ\prime}) + L_j^\circ E_j \omega_j^\circ(\Omega_{3-j}^{\circ\prime\prime})]$$

$$\Omega_j^{\circ\prime} = t - \theta_0 x + \lambda_j^\circ y, \quad K^\circ = K(\theta_0), \quad L_j^\circ = L_j^\circ(\theta_0) \quad (5.4)$$

Удовлетворяя условиям при  $y = 0$ , получим

$$N_j = \frac{\lambda_j^\circ L_{3-j}^\circ + \lambda_{3-j}^\circ L_j^\circ}{\lambda_j^\circ L_{3-j}^\circ - \lambda_{3-j}^\circ L_j^\circ}, \quad E_j = \frac{2\lambda_j^\circ L_j^\circ}{\lambda_j^\circ L_{3-j}^\circ - \lambda_{3-j}^\circ L_j^\circ} \quad (5.5)$$

Граничную задачу сформулируем для функций

$$u(\theta) = u_1(\theta) + u_2(\theta), \quad v(\theta) = v_1(\theta) + v_2(\theta) \quad \left(\theta = \frac{t}{x}\right) \quad (5.6)$$

т. е. отыскиваем значение этих сумм на вещественной оси, где переменные  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , определенные соотношением (1.15), совпадают. Функции  $u_j, v_j$ , описывающие возмущение в области  $AF_1GFB$ , определены в плоскостях  $\theta_j$  римановой поверхности, в которых проведены разрезы, соответственно, вдоль участков вещественной оси  $\theta_1 > -a$  и  $\theta_2 > -d$  (фиг. 4). При условии, что  $\omega_j^\circ(\xi)$  ступенчатая функция, равная нулю, если  $\xi < 0$ , и единице, если  $\xi > 0$ , функции  $\operatorname{Re} u(\theta)$  и  $\operatorname{Re} v(\theta)$  кусочно постоянны на краях разреза,

$$\operatorname{Re} u(\theta) = \operatorname{Re} v(\theta) = 0 \quad (\theta > \theta_0) \quad (5.7)$$

$$\operatorname{Re} u(\theta) = \alpha^\circ, \quad \operatorname{Re} v(\theta) = \beta^\circ \quad (-a < \theta < \theta_0)$$

где  $\theta_0$  на верхнем берегу соответствует точкам  $E, F$ , а на нижнем — точкам  $E_1$  и  $F_1$  (фиг. 3)

$$\alpha^\circ = u_1^\circ + u_2^\circ = k^\circ (\lambda_1^\circ + \lambda_2^\circ), \quad \beta^\circ = v_1^\circ + v_2^\circ = L_1^\circ + L_2^\circ \quad (5.8)$$

Проведя в плоскости  $\theta_1$  разрез на участке  $(-d, -a)$  и обозначая через  $f_1$  и  $f_2$ , соответственно, вещественные значения  $u(\theta)$  и  $v(\theta)$  на этом участке, легко, как в работе [5], получим

$$u'(\theta) = \frac{\alpha^\circ}{\pi i} \frac{1}{\theta - \theta_0} \frac{\sqrt{d + \theta_0}}{\sqrt{d + \theta}} + \frac{1}{\pi i \sqrt{d + \theta}} \int_{-d}^{-a} \frac{\sqrt{d + \xi} f_1'}{\xi - \theta} d\xi \quad (5.9)$$

$$v'(\theta) = \frac{\beta^\circ}{\pi i} \frac{1}{\theta - \theta_0} \frac{\sqrt{d + \theta_0}}{\sqrt{d + \theta}} + \frac{1}{\pi i \sqrt{d + \theta}} \int_{-d}^{-a} \frac{\sqrt{d + \xi}}{\xi - \theta} f_2' d\xi \quad (5.10)$$

Положим

$$A(\theta) = \frac{\alpha^\circ}{\pi i} \sqrt{d + \theta_0} + (\theta - \theta_0) \Phi^{\circ\circ}(\theta), \quad \Phi^{\circ\circ}(\theta) = \frac{1}{\pi i} \int_{-d}^{-a} \frac{\sqrt{d + \xi}}{\xi - \theta} f_1' d\xi$$

$$B(\theta) = \frac{\beta^\circ}{\pi i} \sqrt{d + \theta_0} + (\theta - \theta_0) \Psi^{\circ\circ}(\theta), \quad \Psi^{\circ\circ}(\theta) = \frac{1}{\pi i} \int_{-d}^{-a} \frac{\sqrt{d + \xi} f_2'}{\xi - \theta} d\xi$$

Согласно (5.1) имеем

$$K(\theta) [\lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2] = \frac{A(\theta)}{(\theta - \theta_0) \sqrt{d + \theta}}, \quad L_1 \omega_1 + L_2 \omega_2 = \frac{B(\theta)}{(\theta - \theta_0) \sqrt{d + \theta}} \quad (5.11)$$

Отсюда

$$\omega_1(\theta) = \frac{L_2 A(\theta) - K \lambda_2 B(\theta)}{(\theta - \theta_0) \sqrt{d + \theta} \Delta_1 K} \quad (5.12)$$

$$K \Delta_1(\theta) = \lambda_1 L_2 - \lambda_2 L_1 = \frac{\theta \sqrt{a^2 - \theta^2}}{a^2 b^2 c^2} (\lambda_2 - \lambda_1) [d^2 \sqrt{a^2 - \theta^2} + a^2 \sqrt{d^2 - \theta^2}]$$

Но функция  $\omega_1$  должна аналитически продолжаться через отрезок  $(-d, -a)$ , т. е. ее предельные значения на этом участке оси сверху и снизу должны удовлетворять условию  $\omega_1^+ = \omega_1^-$ , что приводит к равенству

$$L_2 \left( \frac{A^+}{\Delta_1^+} + \frac{A^-}{\Delta_1^-} \right) = k\lambda_2 \left( \frac{B^+}{\Delta_1^+} - \frac{B^-}{\Delta_1^-} \right) \quad (5.13)$$

Правая часть этого равенства вещественна, левая — чисто мнима, так как  $A^- = -\overline{A^+}$ ,  $B^- = -\overline{B^+}$ ,  $\Delta_1^- = -\overline{\Delta_1^+}$ , а  $L_2$  и  $K$  вещественны на упомянутом отрезке; поэтому оно эквивалентно следующим двум:

$$\begin{aligned} A^+ &= G'A^- \\ B^+ &= G_1'B^- \end{aligned} \quad \left( C' = -G_1' = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2 + \lambda_1} \frac{d^2 \sqrt{a^2 - \theta^2} + a^2 \sqrt{d^2 - \theta^2}}{d^2 \sqrt{a^2 - \theta^2} - a^2 \sqrt{d^2 - \theta^2}} \right) \quad (5.14)$$

Решения этих уравнений, ограниченные на бесконечности и в окрестности точки имеют вид

$$A(\theta) = i\alpha^{\circ\circ} \frac{\sqrt{d+\theta}}{\sqrt{a+\theta}} Y_0(\theta), \quad B(\theta) = i\beta^{\circ\circ} Y_0(\theta), \quad Y_0(\theta) = \exp \frac{1}{2\pi i} \int_{-d}^{-a} \frac{\ln G_1'}{\xi - \theta} d\xi \quad (5.15)$$

При этом функция  $\omega_1(\theta)$ , а вместе с ней и функции  $u_1'(\theta)$  и  $v_1'(\theta)$ , голоморфны в окрестности точки  $\theta = -d$  и допускает оценку

$$|\omega_1(\theta)| < \frac{N}{|\theta + d|^\gamma}$$

где  $N$  и  $\gamma$  — действительные постоянные,  $\gamma < 1$ . Следовательно, для этой функции точка  $\theta = -d$  будет устранимой особенностью. Постоянные  $\alpha^{\circ\circ}$  и  $\beta^{\circ\circ}$  находим из сравнения (5.10) и (5.15) при  $\theta = \theta_0$

$$\alpha^{\circ\circ} = -\alpha^{\circ} \frac{\sqrt{a+\theta_0}}{\pi Y_0(\theta_0)}, \quad \beta^{\circ\circ} = -\beta^{\circ} \frac{\sqrt{d+\theta_0}}{\pi Y_0(\theta_0)}$$

Если в качестве неизвестных принять функции  $\Phi^{\circ\circ}(\theta)$  и  $\Psi^{\circ\circ}(\theta)$ , то получим неоднородные уравнения, изученные в работе [5]. Однако при этом структура решения оказывается более сложной по сравнению с (5.13), где вопрос сводится к подсчету только одной функции  $Y_0(\theta)$ , допускающей табулирование [6].

Поступила 5 V 1961

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Свекло В. А. Упругие колебания анизотропного тела. Уч. зап. ЛГУ, 1949, вып. 17.
2. Ляв А. Математическая теория упругости. 1935.
3. Петрашень Г. И., Марчук Г. И., Огурцов К. И. О задаче Лэмба в случае полупространства. Уч. зап. ЛГУ, 1950, вып. 21.
4. Свекло В. А. Задача Лэмба при смешанных граничных условиях. ДАН СССР, 1954, т. ХСV, № 4.
5. Фридман М. М. Дифракция плоской упругой волны. Уч. зап. ЛГУ, 1949, вып. 17.
6. Филиппов А. Ф. Некоторые задачи дифракции плоских упругих волн. ПММ, 1956, т. XX, вып. 6.