

ЗАДАЧА О ПОРШНЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ГРУНТОВ

С. С. Григорян, Ф. Л. Черноусько

(Москва)

Задача об одномерных движениях с плоскими волнами среды, в которой зависимость напряжения от деформации имеет сложный (нелинейный, иногда и необратимый) характер, изучалась многими авторами. Можно отметить здесь работы Доннелла [1], Тейлора [2], Кармана и Дюве [3], Х. А. Рахматулина [4, 5, 6], Г. С. Шапиро [7], Г. И. Баренблатта [8], Уайта и Гриффиса [9, 10], Г. Я. Галина [11], Г. М. Ляхова и Н. И. Поляковой [12, 13] и др.

Весьма интересной была работа Х. А. Рахматулина [4], в которой обнаружена и изучена волна разгрузки. В работе Г. И. Баренблатта [8] была, по-видимому, впервые установлена четкая зависимость качественных особенностей решения задачи о поршне для нелинейно-упругого материала от дифференциальных свойств диаграммы напряжение-деформация. В частности, в этой работе было построено решение с медленной ударной волной, которое, как выяснилось впоследствии, может быть использовано для объяснения некоторых качественных эффектов, наблюдающихся при распространении взрывных волн в грунте [14-16]. В работе Г. Я. Галина [11] было дано обобщение результатов работы [8] для случая, когда напряжении зависит не только от деформации, но также от температуры. Большинство работ этого направления имело в виду приложение результатов к нелинейно-упругим материалам и упруго-пластическим металлам. В этих работах принималось, что задана связь между осевыми напряжением и деформацией в том или ином виде, и дальше решалась возникающая при такой постановке математическая задача. Вопрос о том, из какой системы общих уравнений трехмерного движения в частном случае одномерных движений возникает изучаемая задача, в этих работах не рассматривался.

Ниже последовательно изучается одномерная автомодельная задача о движении грунта, возникающем при вдвигании в грунт или выдвигании из него с постоянной скоростью поршня, на основе общей системы уравнений динамики грунтов, содержащейся в работах [14, 15]. Так же, как и в работе [17], здесь проводится рассмотрение без конкретизирования функций — характеристик среды; поэтому получающиеся при этом результаты носят общий характер. В результате проведенного анализа установлены следующие качественные результаты.

1. Ограничение на вид функции $F(p)$, сформулированное в работе [17], является необходимым и здесь, правда, по другой причине — это ограничение является здесь необходимым условием вещественности скорости звука при движениях с разрежением в условиях пластического сдвига.

2. Разрывное изменение скорости звука с изменением плотности при переходе от упругой деформации сдвига к пластической как при движении с разрежением, так и при движении со сжатием, приводит в зависимости от дифференциальных свойств характеристик среды либо к возможности существования двух центрированных волн сжатия (или разрежения), разделенных областью поступательного движения, либо к возможности существования двух ударных волн сжатия (или разрежения), распространяющихся друг за другом с разными скоростями¹.

¹ Отметим, что в решениях, построенных в работах [4], [7], [12] и др., возникновение центрированных волн, разделенных областью поступательного движения, связано с аппроксимацией гладкой кривой напряжение-деформация ломаной, т. е. является следствием приближенного способа решения задачи, тогда как здесь это — свойство точного решения, связанное с определенным физическим механизмом.

3. Возможно существование ударных волн разрежения при определенных дифференциальных свойствах характеристик среды.

4. Экспериментально установленный [10] вид функции $F(p) = (kp + b)^2$ оказывается в некотором смысле оптимальным — он позволяет свести вопрос о существовании тех или иных ударных или непрерывных простых волн к исследованию дифференциальных свойств одной только функции $p = f(\rho, \rho_*)$.

5. Наличие излома диаграммы $p = p(\rho)$ при переходе с ветви $\rho_* = \text{const}$ на ветвь $\rho = \rho_*$ также приводит к возможности существования дополнительных ударных или непрерывных волн сжатия.

§ 1. Система уравнений, описывающая движение среды, в случае одномерных движений с плоскими волнами имеет вид [17]

$$\begin{aligned} \rho \frac{du}{dt} - \frac{\partial \sigma}{\partial x} &= 0, & \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \\ \frac{d(\sigma + p)}{dt} + \lambda (\sigma + p) &= \frac{4}{3} G \frac{\partial u}{\partial x} \\ p &= f(\rho, \rho_*) e(\rho_* - \rho) e(\rho - \rho_0) \equiv f^\circ(\rho, \rho_*) \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_*}{dt} &= \frac{d\rho}{dt} e(\rho - \rho_*) e\left(\frac{d\rho}{dt}\right) \\ \lambda &= \frac{2GW - F'(p) dp/dt}{2F(p)} e[J_2 - F(p)] e\left[2GW - F'(p) \frac{dp}{dt}\right] \\ 2GW &= 2G(\sigma + p) \frac{\partial u}{\partial x}, & J_2 &= \frac{3}{4}(p + \sigma)^2 \end{aligned}$$

В этих формулах приняты те же обозначения, что и в работе [17]. Боковое главное напряжение $\sigma_{yy} = \sigma_1$ определяется по формуле

$$\sigma_1 = -p - \frac{1}{2}(p + \sigma) \quad (1.2)$$

Если движение сопровождается сжатием элемента среды, то естественно считать, что $\sigma < \sigma_1$, т. е., учитывая (1.2), $\sigma + p < 0$. При растяжении элемента $\sigma + p > 0$.

Если сдвиг протекает упруго, то $\lambda = 0$ и $J_2 < F(p)$. Поэтому при упругом сдвиге должны иметь место неравенства

$$-\frac{2}{3}\sqrt{3F(p)} < p + \sigma < \frac{2}{3}\sqrt{3F(p)} \quad (1.3)$$

Переход к пластическому сдвигу при сжатии элемента соответствует превращению в равенство левого из неравенств (1.3), а при разрежении — правого.

Третье из соотношений (1.1) при помощи второго из них можно преобразовать к виду

$$\frac{d}{dt} \left(\sigma + p + \frac{4}{3} \int \frac{G d\rho}{\rho} \right) + \lambda (\sigma + p) = 0 \quad (1.4)$$

Задача о поршне автомодельна, ибо система уравнений среды не содержит никаких постоянных, имеющих размерности, отличные от размерностей напряжения и плотности. Если через V обозначить скорость поршня, то будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma &= kS(\xi), & p &= kP(\xi), & \rho &= \rho_1 R(\xi), & \rho_* &= \rho_1 R_*(\xi) \\ u &= VU(\xi), & G &= G_0 g(R), & f^\circ(\rho, \rho_*) &= k f_*^\circ(R, R_*) \\ F(p) &= k^2 F(P), & J_2 &= k^2 I_2, & \xi &= x/Vt \end{aligned} \quad (1.5)$$

где ρ_1 , G_0 , k — характерные для среды значения плотности, модуля сдвига и давления (считаем модуль G зависящим от плотности).

Тогда система (1.1), (1.4) перейдет в систему обыкновенных дифференциальных уравнений автомодельного движения (штрих означает дифференцирование по ξ)

$$\begin{aligned} R(U - \xi)U' - \frac{1}{m^2}S' &= 0, & (U - \xi)R' + RU' &= 0 \\ (U - \xi)\left(S + P + \frac{4}{3}n \int \frac{g(R)dR}{R}\right)' + \lambda_*(S + P) &= 0 \\ R_*' &= R'e(R - R_*)e\left[\frac{1}{t}(U - \xi)R'\right] \\ \lambda_* &\equiv \lambda t, P = f_*(R, R_*), & I_2 &= \frac{3}{4}(S + P)^2 \\ m^2 &= \rho_1 \frac{V^2}{k}, & n &= \frac{G_0}{k} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Соотношения (1.2), (1.3) сохраняют свой вид в новых обозначениях. Если сдвиг происходит упруго, то $\lambda = 0$, и третье из уравнений (1.6) переходит в

$$(U - \xi)\left(S + P + \frac{4}{3}n \int \frac{g(R)dR}{R}\right)' = 0 \quad (1.7)$$

При пластическом сдвиге $\lambda > 0$, и

$$S + P = \pm \frac{2}{3}\sqrt{3F(P)} \quad (1.8)$$

причем верхний знак соответствует разрежению, нижний — сжатию.

В рассматриваемой автомодельной задаче все величины, в том числе и R_* , являются функциями ξ . В части области определения решения R_* может меняться с изменением ξ , и тогда $R_* = R$, в остальных частях этой области R_* будет постоянной. Поэтому P в каждой из этих частей будет однозначной функцией лишь R . Следовательно, при интегрировании системы (1.6), (1.7), (1.8) можно считать, что $P = P(R)$. Зависимость P от R_* и изменение R_* становятся существенными только при переходе через значения ξ , при которых либо решение терпит разрыв, либо происходит переход из области, где $R_* = \text{const}$, в область, где $R_* = R$.

Так как $U - \xi \neq 0$ (в противном случае нарушилось бы второе из уравнений (1.6)), из (1.7) имеем

$$S = -P - \frac{4}{3}n \int \frac{g(R)dR}{R} + \text{const} \quad (1.9)$$

В силу сказанного выше относительно зависимости P от R видно, что как в случае упругого сдвига, так и в случае пластического сдвига, S является однозначной функцией R ((1.8) и (1.9)). Это весьма упрощает задачу, которая сводится к интегрированию системы из двух обыкновенных уравнений

$$(U - \xi)R' + RU' = 0, \quad (U - \xi)RU' + \frac{1}{m^2}a^2R' = 0 \quad (1.10)$$

где

$$a^2 = a_e^2 = -\frac{dS_e}{dR} = P'(R) + \frac{4}{3}n \frac{g(R)}{R} \quad (1.11)$$

для случая упругого сдвига и

$$a^2 = a_p^2 = - \frac{dS_p}{dR} = P'(R) \left[1 \mp \frac{F'(P)}{\sqrt{3F(P)}} \right] \quad (1.12)$$

для случая пластического сдвига.

Величина a / m играет роль скорости звука. Из формул (1.11) и (1.12) видно, что при непрерывном переходе из области с упругим сдвигом в область с пластическим сдвигом скорость звука, вообще говоря, изменяется скачком. Ниже увидим, что с этим обстоятельством связаны интересные особенности рассматриваемых движений среды.

Далее из (1.12), видно, что при

$$F'(P) > \sqrt{3F(P)} \quad (1.13)$$

скорость звука при пластическом сдвиге в условиях разрежения (верхний знак) становится мнимой величиной. Любопытно отметить, что это же условие в квазистатической задаче с центральной симметрией, рассмотренной в работе [17], приводило к возникновению предельных линий; поэтому принятое там требование, чтобы функция $F(P)$ не обладала свойством (1.13), является необходимым и здесь при рассмотрении динамической задачи. Отметим здесь еще раз, что функция $F(P)$, построенная по результатам опытов для песчаного грунта в работе [16], удовлетворяет этому требованию.

Уравнения (1.10), как это хорошо известно, имеют общее решение

$$U = \text{const}, \quad R = \text{const} \quad (1.14)$$

определяющее поступательный поток, и особое решение — центрированную простую волну

$$U = \xi \pm \frac{1}{m} a, \quad U = \mp \frac{1}{m} \int \frac{a(R) dR}{R} \quad (1.15)$$

Решение задачи о поршне, так же как и решение общей задачи о распаде произвольного разрыва в грунте, можно сконструировать, пользуясь решениями (1.14) и (1.15), с учетом того, что зависимость a от R различна в упругой и пластической (по сдвигу) областях ((1.11), (1.12)). Для такого рода построений необходимо изучить соотношения на поверхностях разрыва, которые, вообще говоря, обязательно будут возникать в изучаемых задачах. Поверхности разрыва исследуются несколько ниже. Сейчас рассмотрим некоторые свойства решения (1.15).

Выбором положительного направления оси x можно добиться того, чтобы решение (1.15) имело всегда вид

$$U = \xi - \frac{1}{m} a, \quad U = \frac{1}{m} \int_{R_0}^R \frac{a(R) dR}{R} + U_0 \quad (1.16)$$

Здесь R_0 , U_0 — произвольные постоянные. Это решение описывает волну, бегущую в положительном направлении оси Ox . Пусть в этой волне происходит сжатие, т. е.

$$dR / dt = R'(\xi) (U - \xi) / t = - a R'(\xi) / mt > 0$$

Это возможно, если $R'(\xi) < 0$, или $1 / R'(\xi) < 0$. Пользуясь (1.16), получаем

$$\frac{1}{R'(\xi)} = \frac{d\xi}{dR} = \frac{1}{m} \left(\frac{da}{dR} + \frac{a}{R} \right) = \frac{1}{mR} \frac{d(aR)}{dR}$$

Значит, простая волна будет волной сжатия только, если $d(aR) / dR < 0$. При $d(aR) / dR > 0$ она будет волной разрежения.

Рассмотрим сначала случай упругого сдвига. Пользуясь формулой (1.11), будем иметь

$$\frac{d(a_e R)}{dR} = \frac{1}{2a_e R} \frac{d(a_e R)^2}{dR} = \frac{1}{2a_e R} \left\{ R^2 P''(R) + 2RP'(R) + \right. \\ \left. + \frac{4}{3} n [g(R) + Rg'(R)] \right\} \equiv \frac{1}{2a_e R} A_e(R) \quad (1.17)$$

Если $A_e(R) > 0$, то простая волна будет волной разрежения. Естественно считать, что модуль сдвига не убывает с ростом плотности, т. е. $g'(R) \geq 0$. Поэтому для того, чтобы была возможна простая волна сжатия, необходимо, чтобы существовала такая область изменения R , в которой $P''(R) < 0$. В противном случае простая волна будет волной разрежения. Так, например, если объемная деформация протекает по линейно-упругой схеме, то

$$P(R) = C(1 - R_0/R), \quad C = \text{const}, \quad A_e = \frac{4}{3} n (g + Rg') > 0$$

т. е. простая волна будет волной разрежения.

Если перейти от R к $\theta = 1 - R_0/R$, то выражение для A_e примет вид

$$A_e(\theta) = (1 - \theta)^2 \left\{ P_{\theta\theta}''(\theta) + \frac{4}{3} n \left[\frac{g(\theta)}{1 - \theta} \right]' \right\} \quad (1.18)$$

Из этой формулы видно, что (при условии $g_{\theta}'(\theta) \geq 0$) необходимым условием существования простой волны сжатия является $P_{\theta\theta}'' < 0$. Отметим здесь, что этого условия вовсе недостаточно для существования таких волн. Достаточным условием является неравенство $A_e < 0$.

В случае, когда сдвиг происходит пластически, будем иметь, используя формулу (1.12),

$$\frac{d(a_p R)}{dR} = \frac{1}{2a_p R} \frac{d(a_p R)^2}{dR} = \frac{1}{2a_p R} \left[(2RP' + R^2P'') \times \right. \\ \left. \times \left(1 \mp \frac{F'}{\sqrt{3F}} \right) \mp \frac{1}{2} (RP')^2 \frac{2FF'' - (F')^2}{2F\sqrt{3F}} \right] \equiv \frac{1}{2a_p R} A_p(R) \quad (1.19)$$

В переменной θ имеем

$$A_p(\theta) = (1 - \theta)^2 \left[P_{\theta\theta}'' \left(1 \mp \frac{F'}{\sqrt{3F}} \right) \mp (P_{\theta}')^2 \frac{2FF'' - (F')^2}{2F\sqrt{3F}} \right] \quad (1.20)$$

Если происходит сжатие при пластическом сдвиге, то нужно выбирать нижний знак. Поэтому простая волна сжатия с пластическим сдвигом может существовать только при условии

$$P_{\theta\theta}'' \left(1 + \frac{F'}{\sqrt{3F}} \right) + (P_{\theta}')^2 \frac{2FF'' - (F')^2}{2F\sqrt{3F}} < 0 \quad (1.21)$$

а простая волна разрежения с пластическим сдвигом — при условии

$$P_{\theta\theta}'' \left(1 - \frac{F'}{\sqrt{3F}} \right) - (P_{\theta}')^2 \frac{2FF'' - (F')^2}{2F\sqrt{3F}} > 0 \quad (1.22)$$

Отметим простые случаи, когда волны того или иного вида заведомо не существуют или существуют. Если $2FF'' - (F')^2 > 0$, то при $P_{\theta\theta}'' > 0$

не существует волны сжатия, а при $P_{00}'' < 0$ не существует волны разрежения. Если $2FF'' - (F')^2 < 0$, то при $P_{00}'' > 0$ существует волна разрежения, а при $P_{00}'' < 0$ существует волна сжатия. В промежуточном случае $2FF'' - (F')^2 \equiv 0$ можно сделать более точное утверждение: при $P_{00}'' > 0$ существует волна разрежения и не существует волны сжатия, а при $P_{00}'' < 0$ — наоборот. Интересно отметить, что именно этот промежуточный случай и имеет место для песчаного грунта, для которого функция $F(p)$, построенная экспериментально [16], имеет вид

$$F(p) = (kp + b)^2 \quad (1.23)$$

Определим условия, при которых простая волна при пластическом сдвиге фактически может возникнуть. Для этого нужно вычислить λ по формулам (1.1). Пользуясь этими формулами, а также формулами (1.5), (1.6), (1.8), (1.16), (1.11), (1.12), получаем:

$$\begin{aligned} \lambda_* = \lambda t &= \pm \frac{3a_p R'(\xi)}{2\sqrt{3F(P)}} \left[\frac{4}{3} n \frac{g(R)}{R} \pm \frac{F'(P)}{\sqrt{3F(P)}} P'(R) \right] \times \\ &\times e \left\{ \pm R'(\xi) \left[\frac{4}{3} n \frac{g(R)}{R} \pm \frac{F'(P)}{\sqrt{3F(P)}} P'(R) \right] \right\} = \\ &= \pm \frac{3a_p R'(\xi)}{2\sqrt{3F(P)}} (a_e^2 - a_p^2) e \left[\pm R'(\xi) (a_e^2 - a_p^2) \right] \end{aligned} \quad (1.24)$$

В волне сжатия $R'(\xi) < 0$, и в формуле (1.24) следует брать нижний знак, а в волне разрежения $R'(\xi) > 0$, и в формуле (1.24) нужно брать верхний знак. В обоих случаях движение допустимо, т. е. $\lambda > 0$, только при

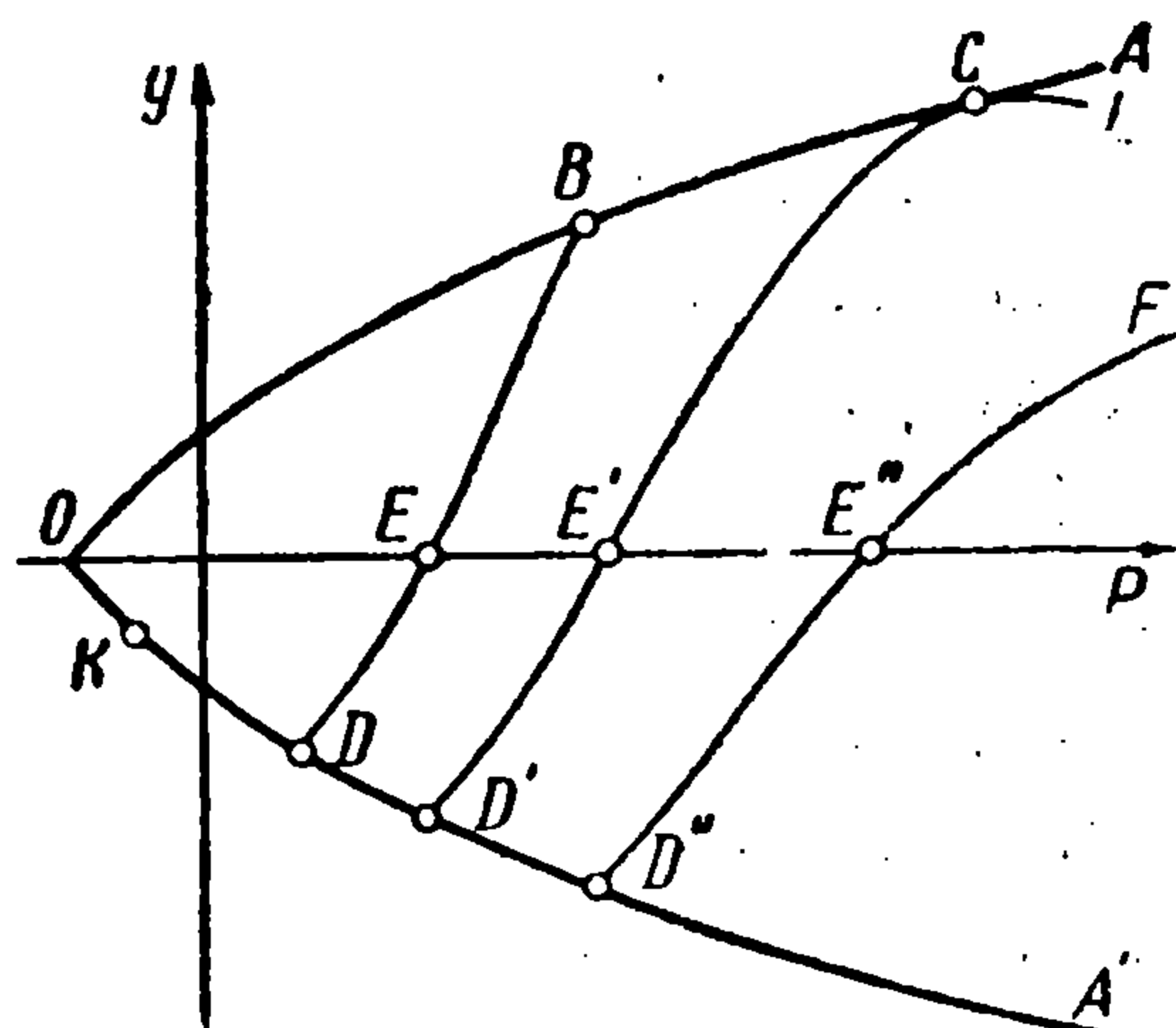
$$a_e > a_p \quad (1.25)$$

или, что то же, при

$$\frac{4}{3} n \frac{g(R)}{R} \pm \frac{F'(P)}{\sqrt{3F(P)}} P'(R) > 0 \quad (1.26)$$

При разрежении (верхний знак) это неравенство выполнено всегда, а при сжатии (нижний) оно может и выполняться, и не выполняться в зависимости от свойств функций $g(R)$, $F(P)$ и $P(R)$. При больших значениях P это неравенство обязательно будет нарушено, ибо $F' < \sqrt{3F}$ (см. выше), $g(R)$ естественно считать ограниченной величиной, а $P'(R)$ может достигать значительной величины при приближении R к предельному значению R_∞ с ростом P . Условие (1.26) и сделанные из него выводы совпадают с таковыми для квазистатической задачи (см. [17], ф-ла (2.4)). Таким образом, видим, что в точности так же, как и в квазистатическом случае, рассмотренном в работе [17], здесь, в динамической задаче, в непрерывном движении пластический сдвиг, раз возникнув, в условиях разрежения будет сохраняться всегда при любой степени дальнейшего разрежения, а в условиях сжатия может исчезнуть и перейти в упругий сдвиг, если дальнейшее сжатие будет значительным. Возможен, конечно, и такой случай (т. е. возможен такой выбор функций $g(R)$, $F(P)$ и $P(R)$), когда сдвиг в волне сжатия не может быть пластическим ни при каких сжатиях, т. е. когда неравенство (1.26) с нижним знаком не выполнено ни при каких значениях R .

Удобно изобразить эти результаты графически. На фиг. 1 в плоскости переменных $y = -(S + P)$, P линии OA , OA' изображают пределы пластичности (линии (1.8)), линии DEB , $D'E'CL$, $D''E''F$ — три из множества линий, определяемых упругим соотношением (1.9). Каждая из таких линий определяется заданием начальной точки P_{00} , R_{00} , а следовательно, и выбранной тем самым зависимостью P от R , и начальным значением $S = S_{00}$. Точка C — точка, в которой выполняется условие (1.26) с нижним знаком. Процесс деформации элемента среды в плоскости y, P описывается следующим образом. Если начальное состояние изображается точкой E (т. е. $S_{00} = -P_{00}$) и происходит разрежение, то точка, изображающая состояние элемента, перемещается по кривой ED (упругий сдвиг) и дальше по DO (пластический сдвиг). Процесс завершается достижением состояния разрыхления (точка K), при котором $R = R_0$, $P = P_0$ и, значит, $S = S_0$, после чего точка скачком переходит



Фиг. 1

в начало координат: $P = 0$, $S = 0$, что соответствует снятию напряжений при разрыхлении. Если из начального состояния E происходит деформация сжатия, то точка перемещается по кривой EB , затем по BA до достижения точки C , после чего движется по CL . Движению по EB соответствует упругая деформация сдвига, по BC — пластическая, по CL — снова упругая. Может случиться, вообще говоря, что при движении точки по CL она снова выйдет на кривую OA , т. е. снова начнется пластическая деформация сдвига, затем снова она сойдет с нее в некоторой точке типа C , т. е. снова начнется упругая сдвиговая деформация, и т. д. Однако при значительном продвижении вправо, как это уже выше отмечалось, деформация станет и останется в дальнейшем все время упругой. Координаты точек D , B , C , K легко находятся, если выбрана зависимость $P = P(R)$ и заданы функции $F(P)$ и $g(R)$.

§ 2. Перейдем к изучению поверхностей разрыва в рассматриваемых движениях. Закон сохранения массы и теорема количества движения приводят к следующим условиям на поверхности ударной волны:

$$\rho_1 (D - u_1) = \rho_2 (D - u_2) \quad (2.1)$$

$$\sigma_1 + \rho_1 (D - u_1) u_1 = \sigma_2 + \rho_2 (D - u_2) u_2$$

где D — скорость ударной волны, индекс 1 относится к частицам до ударной волны, индекс 2 — к частицам за ней. В рассматриваемых автомодельных движениях скорость ударной волны постоянна, т. е. на ударной волне параметр $\xi = \xi_* = \text{const}$. Поэтому, пользуясь безразмерными переменными (1.5), получим из (2.1)

$$\xi_* = \frac{R_2 U_2 - R_1 U_1}{R_2 - R_1}, \quad S_2 - S_1 = -m^2 R_1 R_2 \frac{(U_2 - U_1)^2}{R_2 - R_1} \quad (2.2)$$

Ударные волны, используемые при конструировании решений задач, должны удовлетворять необходимому условию устойчивости, заключающемуся в том, что скорость волны относительно частиц впереди нее должна быть не меньше скорости малых возмущений в этих частицах, а скорость волны относительно частиц за ней — не более скорости малых возмущений там [14]. В рассматриваемом случае роль квадрата скорости малых возмущений играет величина — $d\sigma / d\rho$. В общем случае мыслимы скачки, связывающие любые две точки области возможных состояний грунта на плоскости p, ρ . Примем следующую гипотезу, ограничивающую возможные ударные волны. Будем предполагать, что точки плоскости p, ρ , соответствующие двум сторонам ударной волны, могут только либо находиться на кривой с одним и тем же значением параметра ρ_* , либо, если это не так, то, по крайней мере, одна из них обязательно должна находиться на кривой $p = p_* = f^c(\rho_*, \rho_*)$ (по поводу обозначений см. формулы (1.1), а также [15]).

При этом вторая из этих возможностей может реализоваться только в скачках уплотнения.

Это предположение оправдывается следующими соображениями. В исходных представлениях модели о характере объемной деформации [15] принято, что точка на плоскости p, ρ , изображающая состояние частицы, в процессе объемной деформации может двигаться при $\rho < \rho_*$ только по кривой $\rho_* = \text{const}$, а при $\rho = \rho_*$ — по кривой $p = p_*$. Значит, попасть из точки $p_1, \rho_1 < \rho_{*1}$ в точку $p_2, \rho_2 < \rho_{*2} > \rho_{*1}$ можно только, двигаясь сначала вверх по линии $\rho_* = \rho_{*1}$, затем по линии $p = p_*$ до достижения $\rho_* = \rho_{*2}$, а потом вниз по линии $\rho_* = \rho_{*2}$. Последний этап здесь представляет разгрузку.

Рассматривая движение внутри тонкого слоя, который при решении задачи заменяется поверхностью разрыва (т. е. рассматривая структуру ударной волны), будем принимать, что процесс объемной деформации внутри этого слоя протекает по только что описанным линиям. Чтобы это было возможно, необходимо допустить, что обязательно существуют силы типа вязкости, не учитываемые уравнениями модели, наличие которых необходимо для того, чтобы линия на плоскости $p, 1/\rho$, соединяющая точки, соответствующие двум сторонам ударной волны, могла уклониться от отрезка прямой, соединяющей эти точки. Однако процесс деформации, протекающий внутри тонкого слоя (ударной волны) по такой схеме, будет содержать этап разрежения, если рассматриваемый скачок в целом является скачком уплотнения. Если же скачок в целом является скачком разрежения, то рассмотрение структуры скачка приводит к заключению, что этот скачок может связывать только точки, лежащие на линии с одним и тем же значением ρ_* . Таким образом, наша гипотеза по существу эквивалентна (в рамках рассматриваемой модели) предположению о том, что внутри скачков уплотнения уплотнение частицы происходит монотонно.

Перейдем теперь к вопросу о скоростях малых возмущений, которые нужно использовать при изучении устойчивости ударных волн. В общем случае неавтомоделных малых возмущений скорость распространения этих возмущений будет определяться также формулами (1.11) и (1.12)

с учетом, однако, что $P'(R)$ должно быть заменено на

$$\frac{dP}{dR} = \left(\frac{\partial P}{\partial R}\right)_{R_*} + \left(\frac{\partial P}{\partial R_*}\right)_R \frac{dR_*}{dR} = \left(\frac{\partial P}{\partial R}\right)_{R_*} + \left(\frac{\partial P}{\partial R_*}\right)_R e(R - R_*) e\left(\frac{dR}{dt}\right) \quad (2.3)$$

где буквы у скобок показывают, какой аргумент фиксирован при дифференцировании. Если $R < R_*$, то скорости малых возмущений нагружения и разгрузки совпадают, если же $R = R_*$, то эти скорости будут различны. Если рассматриваемая волна является скачком разрежения, то, как это установлено принятой выше гипотезой, обе точки плоскости PR , соответствующие двум сторонам скачка, находятся на одной и той же линии $R_* = \text{const}$. При этом в точке за скачком обязательно $R_2 < R_*$, а в точке перед скачком либо $R_1 = R_*$, либо тоже $R_1 < R_*$. Если $R_1 = R_*$, то в точке перед скачком скорости малых возмущений сжатия и разрежения будут различны. Однако скорость скачка должна превышать обе эти скорости в соответствии с требованиями устойчивости скачка. Поэтому можно окончательно утверждать, что для устойчивости скачков разрежения нужно, чтобы скорость скачка была не меньше скорости малых возмущений в частицах перед скачком и не больше такой скорости в частицах за скачком, при условии, что эти скорости малых возмущений вычисляются при $R_* = \text{const}$.

При рассмотрении скачков уплотнения возможны следующие четыре случая, когда плотности в точках перед скачком и за ним удовлетворяют (1) условиям $R_1 < R_2 < R_{*1}$, (2) условиям $R_1 < R_2 = R_{*1}$, (3) условиям $R_1 < R_{*1} < R_2 = R_{*2}$ и (4) условиям $R_1 = R_{*1} < R_2 = R_{*2}$.

В случае (1), очевидно, условия устойчивости скачка формулируются точно так же, что и выше для скачка разрежения. В случае (2) в частицах за скачком имеются опять две скорости малых возмущений. Скорость скачка обязательно должна быть не более скорости малых возмущений там, вычисленной при условии $R_* = \text{const}$, однако она может превышать скорость малых возмущений, определенную при $R = R_*$.

Это допущение оправдывается следующими соображениями. Если вблизи точки пересечения линий $R_* = \text{const}$ и $R = R_*$ заменить сколь угодно малый кусок кривой $R_* = \text{const}$ так, чтобы она гладко (без излома) переходила бы в кривую $R = R_*$, то для устойчивых скачков обязательно будет выполнено условие $R_2 < R_{*1}$, причем R_2 будет сколь угодно мало отличаться от R_{*1} . Тем самым случай (2) сведется к случаю (1). Совершив теперь предельный переход (устремив длину сглаживающего участка кривой $R_* = \text{const}$ к нулю), получим случай (2) и при этом условия устойчивости ударной волны останутся совпадающими с условиями для случая (1). В случае (3) в частице за скачком опять скорость малых возмущений имеет два значения. Условие устойчивости требует, чтобы скорость волны не превышала бы оба значения, а так как скорость возмущений нагрузки (т. е. вычисленных при условии $R = R_*$) является меньшей из двух значений, то для устойчивости нужно, чтобы скорость волны не превышала именно скорость малых возмущений нагрузки. Условие в частице перед скачком такое же, как и в случаях (1) и (2). Наконец, в случае (4) условие устойчивости в частице за скачком совпадает с условием устойчивости для случая (3), а для частицы перед

скачком положение аналогично случаю (2). Здесь также путем сглаживания перехода от кривой $R_* = \text{const}$ к кривой $R = R_*$ сводим случай (4) к случаю (3) и в результате предельного перехода устанавливаем, что для устойчивости достаточно, чтобы скорость волны относительно частицы перед ней была бы не меньше скорости малых возмущений там, определенной при условии $R = R_*$.

Легко объединить все эти случаи в следующем простом правиле. Если ударная волна сжатия (разрежения) производит уплотнение (разрежение) среды от значения плотности R_1 до значения R_2 , то для того, чтобы она была устойчивой, скорость ее относительно частиц должна быть не менее скорости малых возмущений в частице перед волной и не более скорости малых возмущений в частице за волной, причем указанные скорости малых возмущений вычисляются по зависимости P от R , которая единственным возможным образом соединяет точки P_1, R_1 и P_2, R_2 . Это правило весьма упрощает рассмотрение ударных волн, ибо оно позволяет отвлечься от зависимости P от R и R_* и каждый раз иметь дело лишь с единой зависимостью $P = P(R)$, соединяющей точки, изображающие состояния частиц впереди и за скачком.

Сформулированное правило дает нам только условия устойчивости ударных волн. Для фактического существования тех или иных ударных волн, удовлетворяющих этому правилу, нужно, вообще говоря, выполнение дополнительных условий.

Определим для некоторых случаев условия, при которых можно установить заведомую устойчивость или неустойчивость волн. Пусть в ударной волне происходит сжатие от R_1 до R_2 . Условия устойчивости гласят

$$|\xi_* - U_1| = R_2 \left| \frac{U_2 - U_1}{R_2 - R_1} \right| \geq \frac{1}{m} a(R_1) \quad (2.4)$$

$$|\xi_* - U_2| = R_1 \left| \frac{U_2 - U_1}{R_2 - R_1} \right| \leq \frac{1}{m} a(R_2) \quad (2.5)$$

где, в силу сказанного выше, $a(R)$ можно определять по формулам (1.11), (1.12). Если в интервале $R_1 \leq R \leq R_2$, $d(aR)^2/dR \geq 0$, то в силу второй из формул (2.2) и формул (1.11), (1.12) имеем

$$\begin{aligned} m^2 R_1 R_2 \frac{(U_2 - U_1)^2}{R_2 - R_1} &= S_1 - S_2 = \int_{R_1}^{R_2} a^2(R) dR = \\ &= \int_{R_1}^{R_2} (aR)^2 \frac{dR}{R^2} \geq a^2(R_1) R_1^2 \int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{R^2} = \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} R_1^2 a^2(R_1) \end{aligned}$$

Отсюда следует, что условие (2.4) выполнено. Аналогично устанавливается, что выполнено и условие (2.5). Если же $d(aR)^2/dR \leq 0$, то точно так же показывается, что условия устойчивости не выполнены, т. е. что ударная волна сжатия в этом случае неустойчива. При разрежении, т. е. при $R_2 < R_1$, аналогично устанавливаем, что при $d(aR)^2/dR \leq 0$ в интервале $R_2 \leq R \leq R_1$ ударная волна разрежения устойчива, а при $d(aR)^2/dR \geq 0$ ($R_2 \leq R \leq R_1$) она неустойчива. Сравнивая полученные здесь результаты с результатами § 1, видим, что, если $d(aR)/dR \geq 0$,

то возможно существование непрерывных волн разрежения и устойчивых ударных волн сжатия. Если же $d(aR)/dR \leq 0$, то возможно существование непрерывных волн сжатия и устойчивых ударных волн разрежения.

Случай, когда величина $d(aR)/dR$ меняет знак в рассматриваемой области изменения R , является сложным и требует более детального рассмотрения.

§ 3. Займемся теперь построением решения задачи о поршне. Рассмотрим сначала случай, когда поршень производит разрежение — движется от среды влево. Здесь требуется построить решение уравнений (1.10), удовлетворяющее условиям: при $\xi = -1$ $U = -1$, а при $\xi \rightarrow \infty$ $U = 0$, $R = R_{00}$. Будем считать, что $d(a_e R)/dR \geq 0$ и $d(a_p R)/dR \geq 0$. При этих условиях, как установлено выше, могут существовать непрерывные волны разрежения и устойчивые скачки уплотнения, но не могут существовать устойчивые скачки разрежения. Для простоты примем, что в начальном состоянии $S_{00} = -P_{00}$. Пусть скорость поршня весьма мала. Тогда параметр m мал и будет малым все движение. Движение не может граничить с областью начального состояния покоя ударной волной сжатия, ибо в этом случае за волной может следовать либо поступательный поток, либо волна разрежения, но ни то ни другое невозможно, ибо ввиду устойчивости ударной волны ее скорость по частицам за ней меньше скорости звука там и поэтому в случае поступательного потока за скачком вторая граница области поступательного потока, движущаяся по частицам со скоростью звука, т. е. быстрее скачка, не могла отстать от скачка. В случае волны разрежения за скачком эта волна по той же причине догоняла бы скачок и ослабляла его, что противоречило бы вытекающему из автомодельности задачи постоянству интенсивности скачка. Итак, движение вблизи границы с областью начального состояния покоя обязательно будет волной разрежения, а так как в начальном состоянии $S_{00} = -P_{00}$, то сдвиг в этой волне будет происходить упруго. Если скорость поршня достаточно мала, то сдвиг будет упругим всюду в области движения, а решение будет состоять из отмеченной волны разрежения и области поступательного движения, примыкающей к волне разрежения и простирающейся до поршня. Ударных волн сжатия во внутренних участках области движения также не может быть (по тем же причинам, что и выше). Решение имеет вид

$$\begin{aligned}
 U &= 0, \quad R = R_{00} & (\xi_0 \leq \xi \leq +\infty) \\
 U &= -\frac{1}{m} \int_R^{R_{00}} \frac{a_e(R) dR}{R}, \quad U = \xi - \frac{1}{m} a_e(R) & (\xi_1 \leq \xi \leq \xi_0) \quad (3.1) \\
 U &= -1, \quad R = R_{\min} & (-1 \leq \xi \leq \xi_1)
 \end{aligned}$$

Постоянные параметры ξ_0 , ξ_1 и R_{\min} определяются из условий непрерывности решения на границах волны разрежения и областей поступательных потоков и условия на поршне

$$\xi_0 = \frac{1}{m} a_e(R_{00}), \quad \int_{R_{\min}}^{R_{00}} \frac{a_e(R)}{R} dR = m, \quad \xi_1 = -1 + \frac{1}{m} a_e(R_{\min}) \quad (3.2)$$

Из этих формул видно, что при малых скоростях поршня, т. е. при малых m , R_{\min} будет близко к R_{c0} и движение будет мало и сосредоточено в тонком слое между близкими поверхностями $\xi = \xi_0$ и $\xi = \xi_1$. С ростом скорости поршня разрежение будет увеличиваться, R_{\min} будет удаляться от R_{c0} , ширина волны разрежения будет расти. В дальнейшем либо будет достигнут предел упругости по сдвигу, и при еще больших скоростях поршня нужно будет строить решение с пластическим сдвигом, либо при упругом сдвиге будет достигнуто состояние, когда в области поступательного потока, примыкающей к поршню, напряжение обратится в нуль. Если частицы среды, непосредственно примыкающие к поршню, лишь свободно с ним соприкасаются, то дальнейшее увеличение скорости поршня не будет сказываться на движении среды, поршень оторвется от среды, и между поршнем и поверхностью грунта образуется вакуум. Если же частицы, непосредственно примыкающие к поршню, неразрывно связаны с ним («приклеены» к поршню), то увеличение скорости поршня будет сказываться на движении среды до тех пор, пока в области поступательного потока вблизи поршня давление P не достигнет минимально возможного значения $P_0 < 0$, ниже которого среда не может выдержать растягивающих напряжений. При скорости поршня, превышающей это критическое значение, уже в момент $t = 0$ будет происходить разрыв среды в сечении, непосредственно примыкающем к поршню, так что движение будет совпадать с движением, возникающим при скорости поршня, когда на поршне $S = 0$. Возможность построения решения со скачком, переводящим частицу из состояния предельного растяжения $P = P_0 < 0$, $R = R_0$, $S = S_0 > 0$ в состояние разрыхления $P = 0$, $S = 0$ отпадает, ибо, как это видно из второй формулы (2.2), на такой поверхности разрыва происходило бы уплотнение, что противоречит предположению о том, что за этой поверхностью $P = S = 0$ и происходит разрыхление.

Скорость поршня, при которой на поршне $S = 0$, определяется из условия

$$m = \int_{R_*}^{R_{c0}} \frac{a_e(R)}{R} dR \quad (3.3)$$

где плотность R_* определяется в силу (1.9) из условия

$$P(R_*) - \frac{4}{3} n \int_{R_*}^{R_{c0}} \frac{g(R)}{R} dR = 0 \quad (3.4)$$

Скорость же поршня, при которой для случая приклеенного поршня достигается предельное растяжение, определяется из условия

$$m = \int_{R_0}^{R_{c0}} \frac{a_e(R)}{R} dR \quad (3.5)$$

где R_0 — минимально возможная без разрыхления плотность [15]. Очевидно, $R_0 < R_*$. Конечно, все это будет иметь место, если при изменении плотности от R_{c0} до R_* и R_0 сдвиг все время остается упругим, т. е. точка на плоскости y, P остается выше линии OA' (фиг. 1). Если же существует значение плотности $R_D > R_*$, при достижении которого точка выходит на линию OA' , то при больших разрежениях, т. е. при больших скоростях

поршня, решение нужно строить с учетом возникновения области с пластическим сдвигом. Покажем сначала, что переход в область с пластическим сдвигом не может произойти скачком. Этот скачок не может быть скачком уплотнения, ибо он оставлял бы частицу в упругой области, а для этого случая выше показано, что скачков уплотнения в решении существовать не может. Таким образом, скачок, если он есть, должен быть скачком разрежения. Он не может быть целиком в упругой области или целиком в пластической области, ибо тогда он был бы неустойчив. Значит, он может переводить частицу из упругой области в пластическую. Пользуясь (2.2), будем иметь, учитывая, что $a_p < a_e$

$$m^2 R_1 R_2 \frac{(U_2 - U_1)^2}{R_1 - R_2} = S_2 - S_1 = \int_{R_2}^{R_D} a_p^2(R) dR + \int_{R_D}^{R_1} a_e^2(R) dR < \\ < \int_{R_2}^{R_1} a_e^2(R) dR = \int_{R_2}^{R_1} (a_e R)^2 \frac{dR}{R^2} < a_e^2(R_1) R_1^2 \frac{R_1 - R_2}{R_1 R_2}$$

Отсюда получаем условие неустойчивости разрыва

$$|\xi_* - U_1| = R_2 \left| \frac{U_2 - U_1}{R_2 - R_1} \right| < \frac{1}{m} a_e(R_1)$$

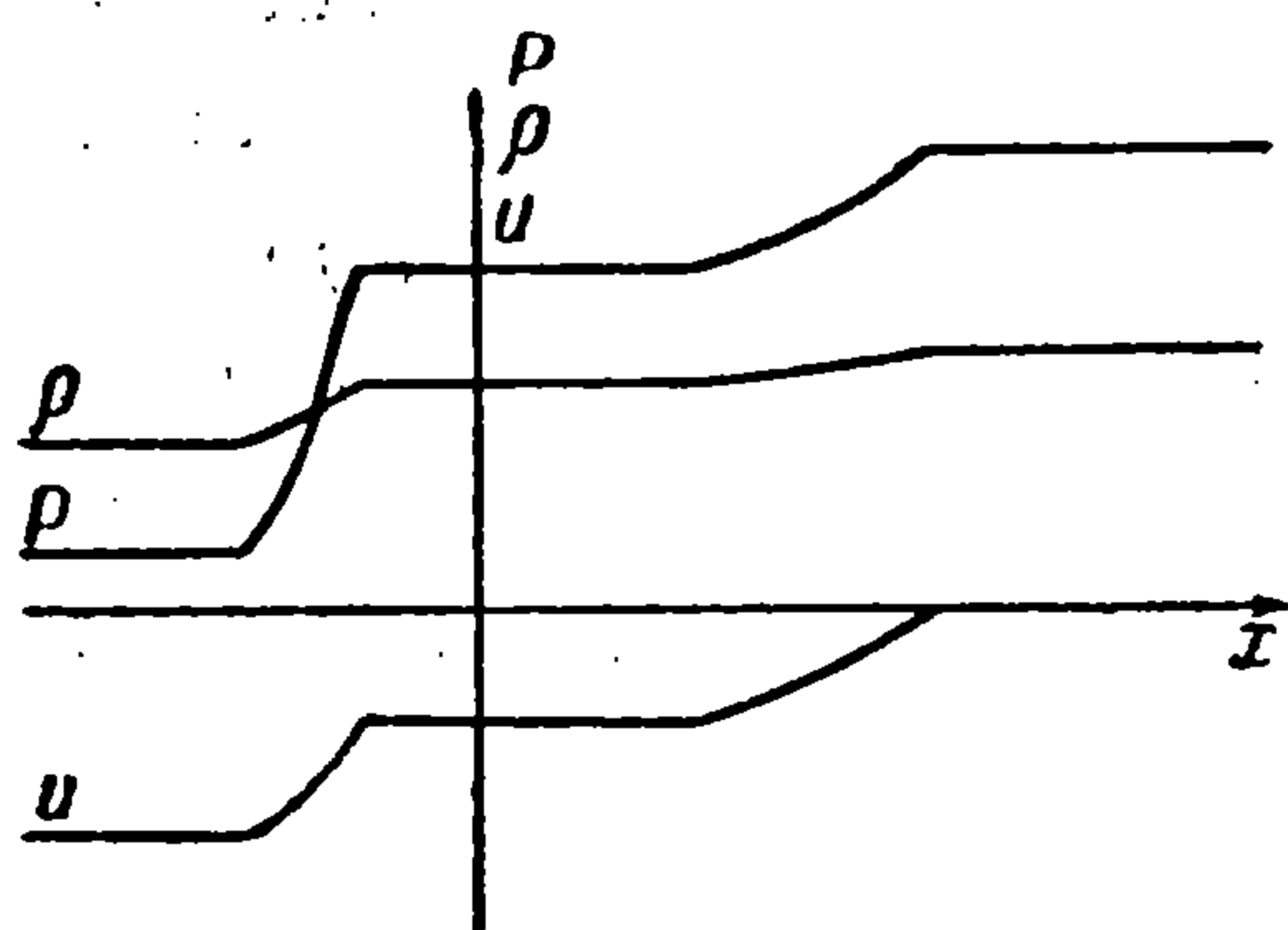
Итак, переход из области упругого сдвига в область пластического сдвига происходит непрерывно. Однако волна разрежения, которая обязательно имеется в пластической области, не может примыкать к волне разрежения из упругой области, ибо скорость звука при переходе из упругой области в пластическую терпит разрыв. Значит, между этими двумя волнами разрежения обязательно существует область поступательного движения. Окончательно решение имеет вид

$$\begin{aligned} U = 0, \quad R = R_{00} & \quad (\xi_0 \leq \xi \leq +\infty) \\ U = -\frac{1}{m} \int_R^{R_{00}} \frac{a_e(R)}{R} dR, \quad U = \xi - \frac{1}{m} a_e(R) & \quad (\xi_{De} \leq \xi \leq \xi_0) \\ U = U_D, \quad R = R_D & \quad (\xi_{Dp} \leq \xi \leq \xi_{De}) \\ U = -1 + \frac{1}{m} \int_{R_{\min}}^R \frac{a_p(R)}{R} dR, \quad U = \xi - \frac{1}{m} a_p(R) & \quad (\xi_1 \leq \xi \leq \xi_{Dp}) \\ U = -1, \quad R = R_{\min} & \quad (-1 \leq \xi \leq \xi_1) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Значение плотности R_D определится условием выхода в точку D (фиг. 1), а постоянные ξ_0 , ξ_{De} , ξ_{Dp} , ξ_1 , U_D , R_{\min} , определяемые из очевидных условий непрерывности, даются формулами

$$\begin{aligned} U_D = -\frac{1}{m} \int_{R_D}^{R_{00}} \frac{a_e(R)}{R} dR, \quad \int_{R_{\min}}^{R_D} \frac{a_p(R)}{R} dR + \int_{R_D}^{R_{00}} \frac{a_e(R)}{R} dR = m \\ \xi_0 = \frac{1}{m} a_e(R_{00}), \quad \xi_1 = -1 + \frac{1}{m} a_p(R_{\min}) \\ \xi_{De} = U_D + \frac{1}{m} a_e(R_D), \quad \xi_{Dp} = U_D + \frac{1}{m} a_p(R_D) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Здесь также с ростом скорости поршня $V R_{\min}$ будет убывать и достигнет сначала значения R_{**} , при котором $S = 0$, а затем и R_0 (для приклеенного поршня). Формулы для R_{**} и соответствующей скорости



Фиг. 2

будут

$$P(R_{**}) - \frac{2}{3} \sqrt{3F |P(R_{**})|} = 0$$

$$m = \int_{R_{**}}^{R_D} \frac{a_p(R)}{R} dR + \int_{R_D}^{R_{00}} \frac{a_e(R)}{R} dR \quad (3.8)$$

На фиг. 2 изображен примерный вид эпюр параметров движения для решения (3.6). Построенное решение, содержащее участок с пластическим сдвигом, обладает замечательным свойством. В нем имеются две центрированные волны разрежения, разделенные областью поступательного движения. Такого рода движения невозможны в газе и вообще в идеальной жидкости со скоростью звука, являющейся непрерывной функцией плотности. Подобные движения возникают в магнитной гидродинамике, где среда характеризуется двумя скоростями звука, что и делает возможным раздельное распространение двух центрированных волн разрежения в автомоделльной задаче.

Рассмотрим теперь случай, когда поршень движется влево, но $d(a_e R) / dR \leq 0$ и $d(a_p R) / dR \leq 0$. Будем опять строить решения, начиная от самых малых значений скорости поршня и затем повышая эту скорость. При малых скоростях движение будет малым и поэтому всюду в области движения сдвиг будет упругим. В силу принятых условий непрерывных волн разрежения и устойчивых ударных волн сжатия быть не может. Рассуждениями, вполне аналогичными приведенным выше, можно показать, что решение задачи не может содержать непрерывной волны сжатия. Поэтому окончательно получаем, что решение представляет собой поступательный поток, ограниченный со стороны области начального невозмущенного состояния скачком разрежения. Оно дается формулами

$$U = 0, \quad R = R_{00} \quad (\xi_0 \leq \xi \leq +\infty)$$

$$U = -1, \quad R = R_{\min} \quad (-1 \leq \xi \leq \xi_0) \quad (3.9)$$

Здесь постоянные R_{\min} и ξ_0 определяются из условий на поверхности скачка формулами

$$\int_{R_{\min}}^{R_{00}} a_e^2(R) dR = m^2 \frac{R_{00} R_{\min}}{R_{00} - R_{\min}}, \quad \xi_0 = \frac{R_{\min}}{R_{00} - R_{\min}} \quad (3.10)$$

Эти формулы будут решать задачу при $R_{\min} \geq R_D$, где R_D — плотность, при которой впервые достигается предел упругости по сдвигу, что имеет место, когда скорость поршня достигает значения V_D , определяемого из формулы

$$\int_{R_D}^{R_{00}} a_e^2(R) dR = m^2 \frac{R_{00} R_D}{R_{00} - R_D} \quad (3.11)$$

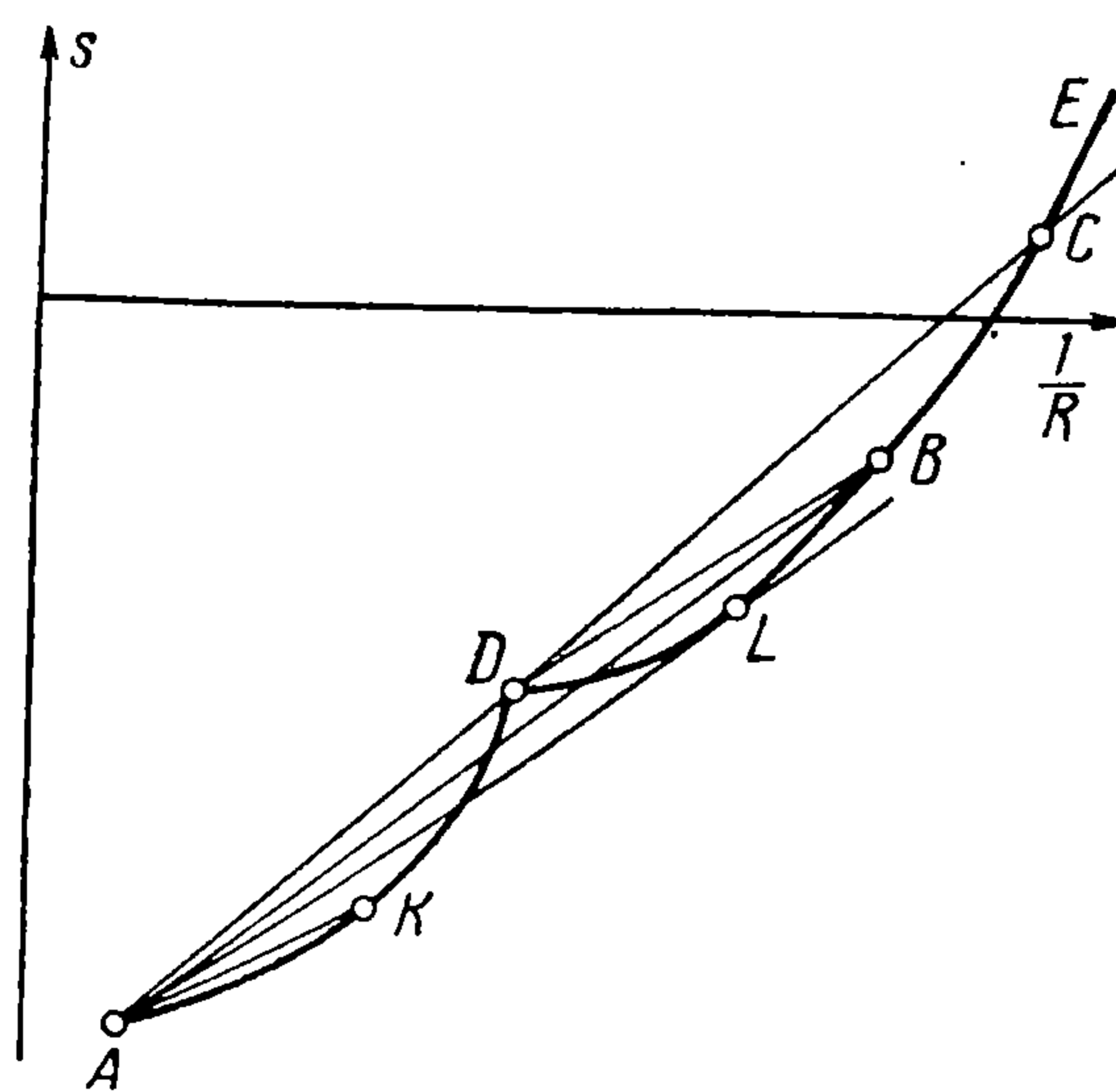
При бóльших значениях скорости решение будет содержать область с пластическим сдвигом.

Для построения решения при этих скоростях рассмотрим соотношение между скоростью звука при пластическом сдвиге при $R = R_D$ и скоростью скачка по частицам за ним при $V = V_D$. Для этих величин имеем формулы

$$\frac{1}{m} a_p(R_D) = \frac{1}{mR_D} \left(\frac{dS_p}{d\frac{1}{R}} \right)_D^{1/2}, \quad W_D \equiv |\xi_D - U_{2D}| = \frac{1}{mR_D} \sqrt{\frac{|S_D - S_{00}|}{|R_D^{-1} - R_{00}^{-1}|}} \quad (3.12)$$

Если скорость поршня незначительно превышает V_D , то, если построить решение по-прежнему с одной ударной волной, плотность за волной R_2 будет мало отличаться от R_D , $a_p(R_2)$ от $a_p(R_D)$ и W_2 от W_D . Поэтому, если $a_p(R_D)/m < W_D$, то и $a_p(R_2)/m < W_2$ при этих скоростях V . Это означает, что в так построенном решении ударная волна будет неустойчивой. Единственным возможным решением задачи при этих значениях скорости поршня будет решение, содержащее две ударные волны разрежения, идущие одна за другой. Решение дается формулами

$$\begin{aligned} U = 0, \quad R = R_{00} & \quad (\xi_D \leq \xi \leq +\infty) \\ U = U_D, \quad R = R_D & \quad (\xi_1 \leq \xi \leq \xi_D) \quad (3.13) \\ U = -1, \quad R = R_{\min} & \quad (-1 \leq \xi \leq \xi_1) \end{aligned}$$



Фиг. 3

Здесь постоянные U_D , ξ_D , R_{\min} , ξ_1 находятся из соответствующих условий на ударных волнах по формулам

$$\xi_D = -\frac{R_D U_D}{R_{00} - R_D}, \quad U_D = -\frac{1}{m} \sqrt{\frac{R_{00} - R_D}{R_{00} R_D}} \left(\int_{R_D}^{R_{00}} a_e(R) dR \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.14)$$

$$\int_{R_{\min}}^{R_D} a_p^2(R) dR = m^2 \frac{(1 + U_D)^2}{R_D - R_{\min}} R_D R_{\min}, \quad \xi_1 = \frac{R_D U_D + R_{\min}}{R_D - R_{\min}}$$

На фиг. 3 кривая AD изображает связь между S и $1/R$ при упругом сдвиге, кривая $DBCE$ — при пластическом. Точка A — начальное состояние, точка D — состояние за первой ударной волной (переходное состояние), точка B — состояние за второй ударной волной, точка K — состояние за ударной волной, когда $V < V_D$. При увеличении скорости поршня V точка, изображающая состояние за скачком, перемещается от точки A по AKD к точке D ; после достижения точки D скорость ударной волны и состояние среды за ней с дальнейшим ростом V более не меняются, но возникает вторая волна, и соответствующая ей точка движется от точки D по DBE . Если существует точка C (точка пересечения прямой AD с кривой DE), то при достижении этой точки вторая волна догоняет первую, и при бóльших значениях скорости V движение снова происходит с одной волной. Значение скорости, при котором это

происходит, определяется из соотношения

$$\xi_1(m_c) = \xi_D(m_c) \quad (3.15)$$

При $m > m_c$ решение определяется формулами

$$U = 0, \quad R = R_{00} \quad (\xi_0 \leq \xi \leq +\infty)$$

$$U = -1, \quad R = R_{\min} \quad (-1 \leq \xi \leq \xi_0)$$

$$\int_{R_{\min}}^{R_D} a_p^2(R) dR + \int_{R_D}^{R_{00}} a_e^2(R) dR = m^2 \frac{R_{00} R_{\min}}{R_{00} - R_{\min}} \quad (3.16)$$

$$\xi_0 = \frac{R_{\min}}{R_{00} - R_{\min}}$$

Здесь также при некоторой скорости поршня будет достигнуто состояние, при котором $S = 0$ на поршне, а также будет существовать значение скорости, при которой вблизи поршня будет достигнуто состояние предельного растяжения. Эти состояния могут быть достигнуты и до достижения состояния D , и до состояния C , и после состояния C (фиг. 3). В каждом из этих случаев легко написать формулы, определяющие значения скорости, при которых достигаются эти предельные состояния, подобные формулам (3.3)—(3.5), (3.8).

Если зависимости $a_e(R)$ и $a_p(R)$ таковы, что $a_p(R_D)/m \geq W_D$, то второй ударной волны не будет ни при каком значении V . Следует отметить, что для точек на диаграмме фиг. 3, расположенных между точками C и L (L — точка, в которой прямая, проведенная из A , касается кривой DE), кроме построенного выше решения, можно построить второе решение, в котором имеется только одна ударная волна, непосредственно соединяющая точки A и B . Эта волна, очевидно, устойчива. Однако, это решение следует отбросить, ибо для заданных точек A и B при условии, что в этих точках выполнены условия устойчивости, решение не зависит от вида кривой ADB в промежутке между A и B , и можно, в частности, кривую в этом промежутке задать так, чтобы на ударной волне не выполнялось необходимого термодинамического энергетического неравенства [19,20], так как от формы кривой ADB зависит работа деформации, фигурирующая в указанном неравенстве.

Случаи, когда величины $d(a_e R)/dR$ и $d(a_p R)/dR$ меняют знак в интересующем нас диапазоне изменения R , могут быть рассмотрены аналогичным образом. В решениях задачи о поршне будут при этом области с волнами разрежения и поступательными потоками, а также ударные волны разрежения.

Обращаем внимание на любопытное свойство построенного решения — оно может содержать две ударные волны, распространяющиеся с разными скоростями одна за другой. Это обстоятельство также связано с разрывным характером зависимости скорости звука от плотности, являющимся следствием перехода от упругих деформаций сдвига к пластическим. В обычных идеальных жидкостях это явление не может иметь места. Такое явление встречается в магнитной гидродинамике, где оно также связано с наличием двух скоростей звука.

Обратимся, наконец, к случаю, когда поршень движется вправо — производит сжатие. Рассуждения, проведенные выше для случая движения, производящего разрежение, полностью переносятся сюда. Отличие будет состоять в следующих двух обстоятельствах. При движении с разрежением скорость звука терпела разрыв только при переходе от упругого сдвига к пластическому. С этим, как установлено выше, связана возможность существования двух ударных или непрерывных волн разрежения. В движениях со сжатием скорость звука будет терпеть разрыв, кроме точки перехода от упругого к пластическому сдвигу, еще в точке, в которой в плоскости P, R происходит переход от сжатия по кривой $R_* = \text{const}$ на кривую $R = R_*$. В этой точке dP/dR терпит разрыв, как это видно из формулы (2.3), а, значит, терпит разрыв и скорость звука a ((1.11), (1.12)).

Далее, если при больших значениях P было бы $d(aR)/dR \leq 0$, то, как можно убедиться, анализируя формулы, дающие решение задачи, решение можно построить лишь для ограниченного сверху диапазона значений скорости поршня V . Но скорость поршня — задаваемая внешняя величина. Поэтому для того, чтобы задача, существование решения которой необходимо по физическим соображениям, была разрешима при любых V , необходимо предположить, что при значительном уплотнении обязательно $d(aR)/dR > 0$. Это условие заведомо будет выполнено, например, если при неограниченном возрастании давления P плотность среды R остается ограниченной.

При увеличении плотности R скорость звука как при переходе через предел упругости сдвига, так и при переходе через точку излома на диаграмме P, R , меняясь скачком, уменьшается. Это будет приводить к тому, что в случае, когда $d(aR)/dR < 0$, в решении задачи значениям плотности, при которых скорость звука терпит разрыв, будут соответствовать области поступательного движения, заключенные между областями с непрерывными волнами сжатия. А в случае, когда $d(aR)/dR > 0$, это будет приводить к увеличению числа ударных волн сжатия на единицу при переходе через каждое значение плотности, при которой скорость звука терпит разрыв. Рассуждения, устанавливающие эти факты, являются почти буквальным повторением аналогичных рассуждений, проведенных выше для случая разрежения. Таким образом, даже если всюду в области непрерывности скорости звука $a(R)$ выполнено условие $d(aR)/dR > 0$, при достаточно больших значениях скорости поршня могут существовать три ударные волны сжатия, идущие одна за другой с разными скоростями.

Если же функция $d(aR)/dR$ может несколько раз менять знак, то число ударных волн может быть еще больше.

Если при значениях R , близких к R_{00} , $d(aR)/dR < 0$, а при больших R $d(aR)/dR > 0$, то при малых скоростях поршня движение будет представлять собой непрерывную волну сжатия; с ростом скорости поршня за непрерывной волной возникнет скачок, который с увеличением скорости поршня будет перемещаться к головной части непрерывной волны, поглощая ее, так что с некоторого значения скорости поршня непрерывная волна сжатия исчезнет и останется один скачок.

Опыт показывает [16], что именно этот случай имеет место в действительности, поэтому при решении конкретных задач следует больше внимания уделять этому случаю.

Следует подчеркнуть, что поскольку при $P \rightarrow \infty$ обязательно $d(aR) / dR > 0$ (как это установлено выше), во всех случаях, начиная с некоторого значения скорости поршня, при всех больших значениях ее движение будет представлять поступательный поток, ограниченный со стороны невозмущенной среды единственной в решении задачи ударной волной.

Отметим, наконец, что переход от пластического сдвига снова к упругому при сжатии не может сопровождаться какими-либо качественными изменениями в решении задачи, так как из соотношений (1.25), (1.26) следует, что этот переход происходит с сохранением скорости звука непрерывной.

Поступила 6 VI 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Donnell L. H. Longitudinal wave transmission and impact. Trans. ASME, 1930, 52.
2. Taylor G. I. The plastic wave in a wire extended by an impact load. British Official Rep. R. C. 1942, 329.
3. Karman Th., Duwez P. On the propagation of plastic deformation in solids. J. Appl. Phys. 1950, 21.
4. Рахматулин Х. А. О распространении волны разгрузки. ПММ, 1945, т. IX, вып. 1.
5. Рахматулин Х. А. О распространении волны разгрузки вдоль стержня переменного предела упругости. ПММ, 1946, т. X, вып. 3.
6. Рахматулин Х. А. О распространении плоских волн в упругой среде при нелинейной зависимости напряжения от деформации. Уч. зап. МГУ, 1951, вып. 152.
7. Шапиро Г. С. Продольные колебания стержней. ПММ, 1946, т. X, вып. 5—6.
8. Баренблатт Г. И. О распространении мгновенных возмущений в среде с нелинейной зависимостью напряжений от деформации. ПММ, 1953, т. XVII, вып. 4.
9. White M. P., Griffis L. The permanent strain in a inform bar due to longitudinal impact. J. Appl. Mech. 1947, 14, № 4.
10. White M. P., Griffis L. The propagation of plasticity in uniaxial compression. J. Appl. Mech. 1948, 15, № 3.
11. Галин Г. Я. О распространении возмущений в средах с нелинейной зависимостью напряжений от деформаций и температуры. ДАН СССР, 1958, т. 120, № 4.
12. Ляхов Г. М., Полякова Н. И. Приближенный метод расчета ударных волн и их взаимодействий. Изв. АН СССР, ОТН, 1959, № 2.
13. Ляхов Г. М., Полякова Н. И. Распространение и взаимодействие волн сжатия и разрежения в упруго-пластических средах. Изв. АН СССР, ОТН, 1960, № 3.
14. Григорян С. С. Об общих уравнениях динамики грунтов. ДАН СССР, 1959, т. 124, № 2.
15. Григорян С. С. Об основных представлениях динамики грунтов. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 6.
16. Алексеенко В. Д., Григорян С. С., Новгородов А. Ф., Рыков Г. В. Некоторые экспериментальные исследования по динамике мягких грунтов. ДАН СССР, 1960, т. 133, № 6.
17. Григорян С. С., Черноусько Ф. Л. Одномерные квазистатические движения грунта. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 1.
18. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехиздат, М., 1953.
19. Григорян С. С., О постановке динамических задач для идеальных пластических сред. ПММ, 1955, т. XIX, вып. 6.
20. Галин Г. Я. Об условиях на поверхностях сильных разрывов для упругих и пластических тел. ПММ, 1955, т. XIX, вып. 3.