

К ОЦЕНКЕ КРИТИЧЕСКОГО ЧИСЛА РЕЙНОЛЬДСА ДЛЯ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ДВУМЯ ВРАЩАЮЩИМИСЯ СФЕРИЧЕСКИМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

Ю. К. Братухин

(Пермь)

Исследование потери устойчивости в замкнутом потоке в нелинейной постановке пока проведено лишь в случае движения жидкости между двумя цилиндрами, вращающимися с разными угловыми скоростями [1]. В этой задаче уравнения для основного ламинарного движения могут быть решены точно для любого числа Рейнольдса.

Для течения между двумя вращающимися цилиндрами («течение Тейлора») Тейлор показал теоретически, что ламинарное течение перестает быть устойчивым при некотором критическом числе Рейнольдса, и был теоретически же определен вид возмущения, срывающего ламинарное течение. Затем в классических экспериментах Тейлор показал, что после срыва основного потока при Рейнольдсе немного выше критического получается новое стационарное течение, вид которого почти не отличается от срывающего устойчивость нормального возмущения, а интенсивность как будто бы пропорциональна $\sqrt{R - R_*}$. Как известно [2], последняя зависимость должна иметь место в открытых потоках, но для «интенсивности» нестационарного движения, возникающего после срыва стационарного потока, явления срыва устойчивости имеют явно нелинейную природу. Теоретическое исследование нелинейных уравнений гидродинамики для течения Тейлора провел Стюарт [3] методом, сходным с методом Ландау для открытых потоков. Однако недавно было обнаружено [4], что задачу Тейлора нельзя считать типичной задачей для замкнутого потока.

Ниже рассматривается задача об устойчивости движения жидкости в полости, имеющей форму шарового слоя, задача решается приближенно методом малых возмущений, для проектирования экспериментов дается оценка критического числа Рейнольдса. Предполагается, что внешняя граница — стенка шарового слоя радиуса r_2 неподвижна, а внутренняя — радиуса r_1 вращается с угловой скоростью

$$\Omega = \Omega \mathbf{n} \quad (\mathbf{n}^2 = 1) \quad (0.1)$$

За характерные величины принимаются: радиус внутреннего шара r_1 , скорость ν/r_1 , момент сил $r_1, \rho \nu^2$, при этом ν — кинематическая вязкость, ρ — плотность жидкости. Тогда число Рейнольдса

$$R = r_1^2 \Omega / \nu \quad (0.2)$$

Расчеты проводились для $r_2/r_1 \equiv a = 2$. Решение ищется по степеням числа Рейнольдса. Сходимость такого разложения при малых числах Рейнольдса доказана в [5]. Так как вычисления делаются очень громоздкими при переходе к более высоким степеням R , пришлось ограничиться членами, пропорциональными R^2 . Полученные этим методом оценки, конечно, непригодны для $r_2 \gg r_1$ или $r_2 - r_1 \ll r_1$.

§ 1. Основное ламинарное течение. Уравнения стационарного движения в принятых безразмерных величинах примут вид

$$(\mathbf{U} \nabla) \mathbf{U} = - \nabla P - \text{rot rot } \mathbf{U}, \quad \text{div } \mathbf{U} = 0 \quad (1.1)$$

$$\mathbf{U}|_{s_1} = R \mathbf{n} \times \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{U}|_{s_2} = 0 \quad (\mathbf{r}_1 - \text{единичный вектор вдоль радиуса})$$

Решение их ищем в виде рядов

$$\mathbf{U} = R \mathbf{U}_1 + R^2 \mathbf{U}_2 + \dots, \quad P = R P_1 + R^2 P_2 + \dots \quad (1.2)$$

Первое приближение известно [2]

$$\mathbf{U}_1 = \alpha(r) \mathbf{n} \times \mathbf{r}, \quad \alpha(r) = \frac{1}{a^3 - 1} \left(\frac{a^3}{r^3} - 1 \right) \quad (1.3)$$

Для второго приближения получаем из (1.1) и (1.2) уравнения

$$\nabla P_2 + \text{rot rot } \mathbf{U}_2 = - (\mathbf{U}_1 \nabla) \mathbf{U}_1, \quad \text{div } \mathbf{U}_2 = 0, \quad \mathbf{U}_2|_{s_1, s_2} = 0 \quad (1.4)$$

Решения этих уравнений удобно вести в сферических координатах r, ϑ, φ . Обозначим через r_1, ϑ_1 и φ_1 координатные векторы и разложим правую часть по векторным шаровым функциям [6]. Вычисление дает

$$(\mathbf{U}_1 \nabla) \mathbf{U}_1 = \alpha^2 r \left[\frac{2}{3} (Y_2 - 1) \mathbf{r}_1 + \frac{1}{3} r \nabla Y_2 \right] \quad \left(Y_2 = \frac{1}{2} (3 \cos^2 \vartheta - 1) \right) \quad (1.5)$$

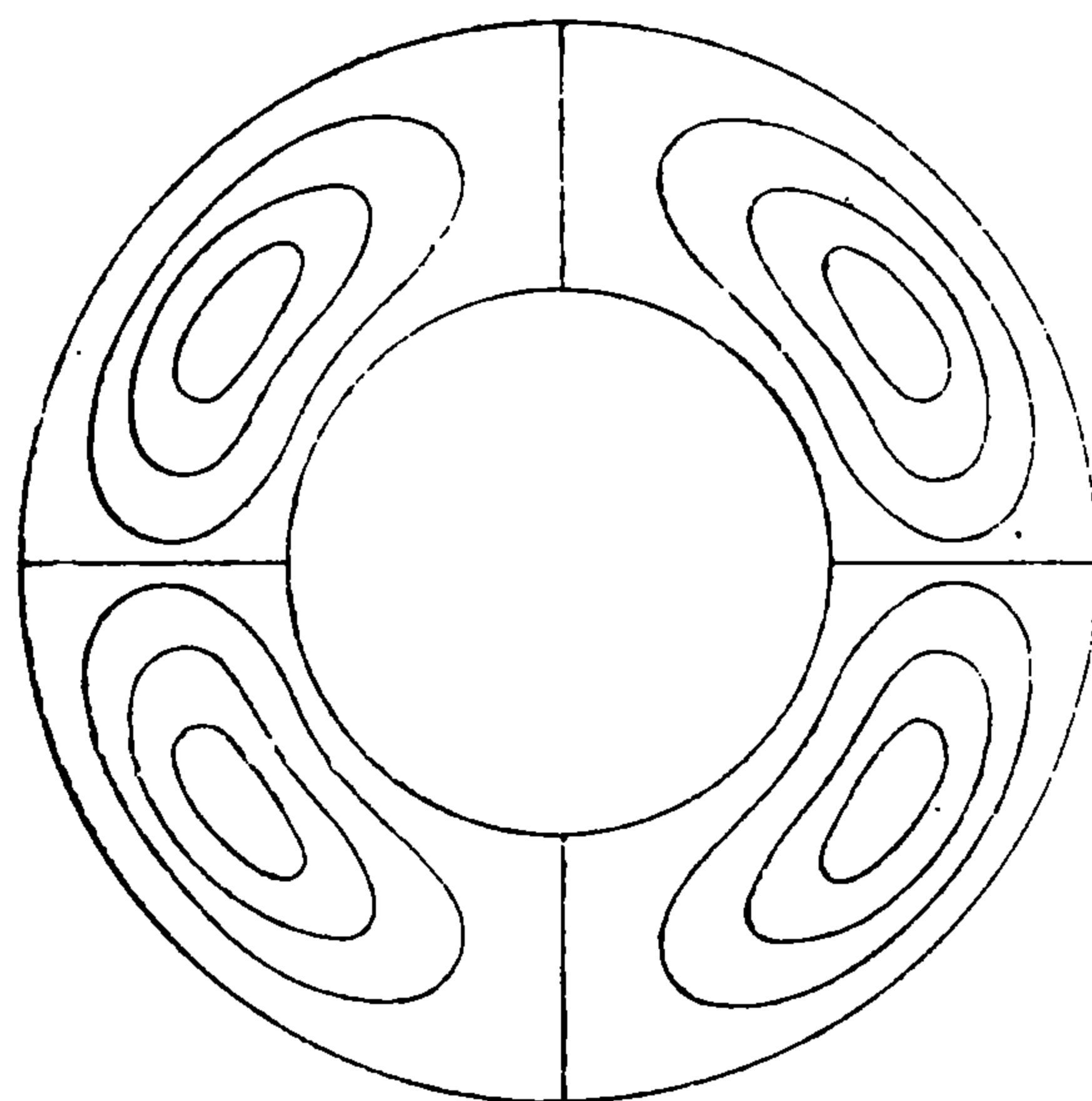
Так как оператор в левой части (1.4) инвариантен относительно вращений, то решение должно иметь вид

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_2 &= F(r) \mathbf{r}_1 Y_2 + G(r) r \nabla Y_2 \\ P_2 &= P(r) + Q(r) Y_2 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Подстановка выражений (1.5) и (1.6) в (1.4) дает

$$\begin{aligned} P' &= \frac{2}{3} r \alpha^2 \\ -r^2 Q' - 6F + 6(rG)' &= \frac{2}{3} r^3 \alpha^2 \\ -Q - F' + (rG)'' &= \frac{1}{3} r^2 \alpha^2 \\ (r^2 F)' - 6rG &= 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} F(1) &= 0, & F(a) &= 0 \\ G(1) &= 0, & G(a) &= 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$



Фиг. 1

Для определения функции G исключим Q и F , после чего элементарные вычисления дают

$$F = \frac{a^6}{2(a^3 - 1)^2} \frac{1}{r^4} \left[-\frac{C_2}{2} + r + C_4 r^2 + \frac{r^4}{a^3} + \frac{C_3 r^5}{3} + \frac{C_1 r^7}{5} \right] \quad (1.9)$$

Четыре коэффициента C определяются из (1.8)

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 + C_3 &= 1 - \frac{2}{a^3}, & \frac{1}{5} C_1 - \frac{1}{2} C_2 + \frac{1}{3} C_3 + C_4 &= -1 - \frac{1}{a^3} \\ a^3 C_1 + \frac{1}{a^4} C_2 + a C_3 &= -\frac{1}{a^3}, & \frac{a^3}{5} C_1 - \frac{1}{2a^4} C_2 + \frac{a}{3} C_3 + \frac{1}{a^2} C_4 &= -\frac{2}{a^3} \end{aligned}$$

Для $a = 2$ получается (1.10)

$$F = \frac{2}{25039r^4} (r - 1)^2 (2 - r)^2 (832 + 452r + 78r^2 + 13r^3) \quad (1.11)$$

Добавочную к основному потоку скорость \mathbf{U}_2 можно представить в виде

$$\mathbf{U}_2 = \text{rot} \left[-\frac{rF}{6} \mathbf{r} \times \nabla Y_2 \right] \quad (1.12)$$

«Линия тока» для \mathbf{U}_2 в плоскости меридиана, уравнения которых $r^2 F \sin^2 \vartheta \cos \vartheta = \text{const}$, представлены на фиг. 1. Это добавочное движение ни в коем случае нельзя смешивать с тем, которое возникает при потере устойчивости. Оно существует всегда, но экспериментально может быть незаметно при малых числах Рейнольдса. Отношение поправки \mathbf{U}_2 к \mathbf{U}_1 порядка одной тысячной.

§ 2. Декременты в неподвижной жидкости. Для исследования устойчивости найдем сначала декременты нормальных возмущений при $R = 0$, т. е. в неподвижной жидкости, а затем вычислим их изменение при увеличении R .

Известно [4], что в неподвижной жидкости нормальные возмущения затухают по закону $\exp(-\lambda t)$, причем λ вещественны. Для поля скоростей нормальных возмущений \mathbf{u} получаются уравнения [4]

$$-\lambda \mathbf{u} + \nabla p + \text{rot rot } \mathbf{u} = 0, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u}|_{s_1, s_2} = 0 \quad (2.1)$$

Задача имеет шаровую симметрию, поэтому возмущение удобно разложить по векторным шаровым функциям [6]

$$\mathbf{u} = f(r) Y \mathbf{r}_1 + g(r) r \nabla Y + h(r) \mathbf{r} \times \nabla Y, \quad p = q(r) Y \quad (2.2)$$

Здесь $Y \equiv Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = P_l^{(m)}(\vartheta) \exp(im\varphi)$ — шаровые функции порядка l . Отметим, что $g = h = 0$ при $l = 0$. Из-за полной шаровой симметрии ясно, что декременты не будут зависеть от числа m (ориентировка возмущений в пространстве безразлична). Поэтому дальше в этом параграфе $m = 0$, а индекс l опускается. Подставляя (2.2) в (2.1), получим

$$-\lambda f + p' + \frac{l(l+1)}{r^2} [f - (gr)'] = 0 \quad (2.3)$$

$$-\lambda g + \frac{p}{r} + \frac{1}{r} [f - (gr)']' = 0$$

$$f' + \frac{2}{r} f - \frac{l(l+1)}{r} g = 0 \quad (2.4)$$

$$\lambda h + h'' + \frac{2}{r} h' - \frac{l(l+1)}{r^2} h = 0$$

причем все три функции f , g и h обращаются в нуль при $r = 1$ и $r = a$. Очевидно, что функции h определяются независимо от f и g , так, что возмущения будут двух типов: при φ -возмущениях

$$\mathbf{u} = h(r) \mathbf{r} \times \nabla Y \quad (2.5)$$

частицы не выходят из своего шарового слоя, тогда как при r -возмущениях

$$\mathbf{u} = f(r) Y \mathbf{r}_1 + g(r) r \nabla Y \quad (2.6)$$

частицы жидкости имеют радиальную составляющую скорости.

Из (2.4) видно, что

а) φ -возмущение выражается через функции Бесселя полуцелого индекса, т. е. через тригонометрические функции

$$h(r) = C_1 \psi_1(\lambda^{1/2} r) + C_2 \psi_2(\lambda^{1/2} r) \quad (2.7)$$

где [7]

$$\psi_1(z) = (-)^l z^l \left(\frac{d}{z dz} \right)^l \left[\frac{\sin z}{z} \right], \quad \psi_2(z) = z^l \left(\frac{d}{z dz} \right)^l \left[\frac{\cos z}{z} \right] \quad (l = 1, 2, \dots) \quad (2.8)$$

Граничные условия дают

$$C_1 \psi_1(\lambda^{1/2}) + C_2 \psi_2(\lambda^{1/2}) = 0, \quad C_1 \psi_1(\lambda^{1/2} a) + C_2 \psi_2(\lambda^{1/2} a) = 0 \quad (2.9)$$

Отсюда для λ получается уравнение

$$\psi_1(\lambda^{1/2}) \psi_2(\lambda^{1/2} a) = \psi_1(\lambda^{1/2} a) \psi_2(\lambda^{1/2}) \quad (2.10)$$

Для каждого l получается бесконечно возрастающая последовательность декрементов и наименьший из них для каждого l будет дальше обозначаться λ_l .

Легко показать, что $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$. Действительно, наименьшее собственное значение задачи (2.4) равно минимуму выражения

$$Q_l [h] = \left(\int_1^a [r^2 h'^2 + l(l+1)h^2] dr \right) / \left(\int_1^a r^2 h^2 dr \right) \quad (2.11)$$

если функции сравнения обращаются в нуль на концах интервала $[1, a]$. Так как очевидно, что $Q_l [h] < Q_{l+1} [h]$ (функции сравнения для всех l одни и те же), то ясно, что

$$\min Q_l \leq \min Q_{l+1} \quad (2.12)$$

Итак, наименьший декремент φ -возмущения получается при $l = 1$. Численное решение уравнения (2.10) дает при $a = 2$

$$\lambda_1 = 10.80, \quad C_2 / C_1 = 2.120, \quad u = -h(r) \sin \vartheta \varphi_1 \quad (2.13)$$

б) Рассмотрим r -возмущения. Чтобы решить систему (2.3), определим сначала давление. Из (2.1) получается (индекс l опускаем)

$$\nabla^2 p = p'' + \frac{2}{r} p' - \frac{l(l+1)}{r^2} p = 0 \quad (2.14)$$

Отсюда

$$p = Ar^l + \frac{B}{r^{l+1}} \quad (A, B = \text{const}) \quad (2.15)$$

После этого, исключив g из (2.3), получим

$$f'' + \frac{4}{r} f' + \left[\lambda - \frac{l(l+1)-2}{r^2} \right] f = lAr^{l-1} - \frac{(l+1)B}{r^{l+2}} \quad (2.16)$$

с граничными условиями

$$f(1) = f(a) = f'(1) = f'(a) = 0 \quad (2.17)$$

Однородное уравнение, соответствующее (2.16), имеет решение

$$\frac{1}{r} [D_1 \psi_1 (\lambda^{1/2} r) + D_2 \psi_2 (\lambda^{1/2} r)] \quad (2.18)$$

и уравнение (2.16) легко решается методом вариации постоянных. Введем обозначения

$$\begin{aligned} I_1(r, \lambda) &= \int_1^r r^{l+2} \psi_1(\lambda^{1/2} r) dr, & I_3(r, \lambda) &= \int_1^r r^{-l+1} \psi_1(\lambda^{1/2} r) dr \\ I_2(r, \lambda) &= \int_1^r r^{l+2} \psi_2(\lambda^{1/2} r) dr, & I_4(r, \lambda) &= \int_1^r r^{-l+1} \psi_2(\lambda^{1/2} r) dr \end{aligned} \quad (2.19)$$

Интегралы (2.19) непосредственно вычисляются по известным формулам [8]. Тогда точное решение (2.16), удовлетворяющее условиям (2.17) на нижнем пределе, будет

$$f(r) = \frac{A}{r} (\psi_1 I_2 - \psi_2 I_1) + \frac{B}{r} (\psi_1 I_4 - \psi_2 I_3) \quad (2.20)$$

Условия (2.17) при $r = a$ приводят к уравнениям

$$\begin{aligned} A [\psi_1 (\lambda^{1/2} a) I_2 (\lambda, a) - \psi_2 (\lambda^{1/2} a) I_1 (\lambda, a)] + \\ + B [\psi_1 (\lambda^{1/2} a) I_4 (\lambda, a) - \psi_2 (\lambda^{1/2} a) I_3 (\lambda, a)] = 0 \\ A [\psi_1' (\lambda^{1/2} a) I_2 (\lambda, a) - \psi_2' (\lambda^{1/2} a) I_1 (\lambda, a)] + \\ + B [\psi_1' (\lambda^{1/2} a) I_4 (\lambda, a) - \psi_2' (\lambda^{1/2} a) I_3 (\lambda, a)] = 0 \end{aligned}$$

Штрих означает производную по r . Приравнивая нулю определитель этой системы, получим

$$I_1(\lambda, a) I_4(\lambda, a) = I_2(\lambda, a) I_3(\lambda, a) \quad (2.21)$$

Это условие определяет спектр декрементов λ . Практически невозможно вычислить изменение с R всех декрементов. Поэтому были и сначала вычислены наименьшие декременты для различных l , а затем из них отобраны те, которые по физическим соображениям должны с ростом R уменьшаться быстрее других. Для $a = 2$ наименьшие декременты для $l = 1, 2, 3, \dots$ оказались равными $\lambda_1 = 38,62$, $\lambda_2 = 37,49$, $\lambda_3 = 36,9$, $\lambda_4 = 37,2$, $\lambda_5 = 38,9$; дальше они резко растут с увеличением l .

Наиболее вероятно, что ламинарное течение будет сорвано возмущением, линии тока которого приближенно совпадают с линиями тока добавочной части U_2 основного течения. Этому условию удовлетворяет возмущение в случае $l = 2$. Именно для этого случая и были проведены численные расчеты, оправдавшие предположения. Для сравнения были проведены также вычисления для $l = 1$.

Ввиду громоздкости формулы (2.20) для численных расчетов желательно получить приближенные выражения для $f_1(r)$ и $f_2(r)$. Для этого приведем уравнения (2.3) к вариационной задаче. Исключая p и q , получим

$$(r^4 f'')'' - 2s(r^2 f')' + s(s-2)f = \lambda [(s-2)r^2 f - (r^4 f')'] \quad (2.22)$$

где для краткости положено $s = l(l+1)$. Наименьшее собственное значение λ_l равно минимуму выражения

$$\lambda_l(s) = \int_1^a [r^4 f''^2 + 2sr^2 f'^2 + s(s-2)f^2] dr / \int_1^a [r^4 f'^2 + (s-2)r^2 f^2] dr \quad (2.23)$$

при условии (2.17). Отсюда методом Ритца получим для $a = 2$

$$\begin{aligned} f_1(r) &= A_1 (r-1)^2 (2-r)^2 (1-0,446r), \\ f_2(r) &= A_2 (r-1)^2 (2-r)^2 (1-0,426r) \end{aligned} \quad (2.24)$$

Постоянные $A_1 = 6,39$ и $A_2 = 12,47$ для $a = 2$ определялись из нормировочного условия

$$\int_V u^2 dV = 1 \quad (V - \text{объем жидкости}) \quad (2.25)$$

§ 3. Декременты при медленном течении. При малых R нормальные возмущения можно разложить в ряд (индекс l опускаем)

$$u + u_1 R + u_2 R^2 + \dots \quad (3.1)$$

Для поля скоростей u_1 получается система уравнений [4]

$$\begin{aligned} -\lambda u_1 + \nabla p_1 + \text{rot rot } u_1 &= -[(U_1 \nabla) u + (u \nabla) U_1] \\ \text{div } u_1 &= 0, \quad u_1|_s = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

а) Рассмотрим φ -возмущение. Используя (1.3) и (2.13), разложим правую часть (3.2) по векторным шаровым функциям

$$(U_1 \nabla) u + (u \nabla) U_1 = -2ah \sin \vartheta n \times \varphi_1 = \frac{2ha}{3} [2(1-Y_2)r_1 - r \nabla Y_2] \quad (3.3)$$

В соответствии с (3.3) ищем решение (3.2) в виде

$$u_1 = \beta(r) Y_2 r_1 + \gamma(r) r \nabla Y_2, \quad p_1 = q_0 + q_2 Y_2 \quad (3.4)$$

Проектируя (3.2) на оси сферических координат, находим (3.5)

$$-\frac{4h\alpha}{r} = q_0', \quad \frac{4h\alpha}{3} = q_2' + \frac{6\beta}{r^2} - \frac{6(\gamma r)'}{r^2} - \lambda_1\beta, \quad \frac{2h\alpha}{3} = \frac{q_2}{r} + \frac{\beta'}{r} - \frac{(\gamma r)''}{r} - \lambda_1\gamma$$

Уравнение непрерывности

$$\beta' + \frac{2\beta}{r} - \frac{6\gamma}{r} = 0 \quad (3.6)$$

Граничные условия

$$\beta(1) = \beta(a) = \gamma(1) = \gamma(a) = 0 \quad (3.7)$$

Для определения функций β и γ найдем сначала q_2 , для чего возьмем дивергенцию от обеих частей (3.2) и приравняем коэффициенты при шаровой функции Y_2 слева и справа. После небольших вычислений получим

$$q_2 = \frac{4}{3r^3} Z(r) + \frac{C}{2} r^2 + \frac{D}{3r^3} \quad \left(Z(r) \equiv \int h\alpha r^3 dr \right) \quad (3.8)$$

Исключая из (3.5) функцию γ , получим уравнение для β

$$\beta'' + \frac{4}{r}\beta' + \left(\lambda_1 - \frac{4}{r^2}\right)\beta = -\frac{4}{r^4}Z + Cr - \frac{D}{r^4} \quad (3.9)$$

$$\beta(1) = \beta(a) = \beta'(1) = \beta'(a) = 0$$

Решение однородного уравнения, соответствующего (3.9)

$$r^{-3/2} [a_1 J_{5/2}(\lambda_1^{1/2} r) + a_2 J_{-5/2}(\lambda_1^{1/2} r)]$$

Здесь $J_p(x)$ — функция Бесселя первого рода порядка p .

Таблица

r	Φ_1	Φ_2	Φ_3	β
1.0	0	0	0	0
1.1	+0.01718	-0.01312	+0.00541	+0.000103
1.2	+0.02522	-0.01827	+0.00759	+0.000283
1.3	+0.02258	-0.01661	+0.00631	+0.000341
1.4	+0.01237	-0.00840	+0.00237	+0.000279
1.5	-0.00072	+0.00202	-0.00222	+0.000161
1.6	-0.01146	+0.01075	-0.00606	+0.000034
1.7	-0.01682	+0.01495	-0.00765	-0.000037
1.8	-0.01562	+0.01364	-0.00679	-0.000040
1.9	-0.00872	+0.00788	-0.00409	-0.000033
2.0	0	0	0	0

Вариацией постоянных легко находим решение (3.9), удовлетворяющее условиям $\beta(1) = \beta'(1) = 0$

$$\beta(r) = 2\pi r^{-3/2} \left\{ J_{5/2}(\lambda_1^{1/2} r) \int_1^r r^{-3/2} J_{-5/2}(\lambda_1^{1/2} r) Z dr - \right.$$

$$\left. - J_{-5/2}(\lambda_1^{1/2} r) \int_1^r r^{-3/2} J_{5/2}(\lambda_1^{1/2} r) Z dr + \right.$$

$$\left. + \frac{C}{4\lambda_1^{1/2}} \left[\frac{2r^{5/2}}{\pi\lambda_1^{1/2}} + J_{5/2}(\lambda_1^{1/2} r) J_{-7/2}(\lambda_1^{1/2}) + J_{-5/2}(\lambda_1^{1/2} r) J_{7/2}(\lambda_1^{1/2}) \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{D}{4\lambda_1^{1/2}} \left[\frac{2r^{-5/2}}{\pi\lambda_1^{1/2}} + J_{5/2}(\lambda_1^{1/2} r) J_{-3/2}(\lambda_1^{1/2}) + J_{-5/2}(\lambda_1^{1/2} r) J_{3/2}(\lambda_1^{1/2}) \right] \right\} \quad (3.10)$$

Функция γ определяется из (3.6). Постоянные C и D , входящие в (3.10), должны быть найдены из условий $\beta(a) = \beta'(a) = 0$. Для $a = 2$ численные расчеты дают $C = -0.006374$, $D = -0.4531$. Значения β приведены в таблице.

Из уравнений для второй поправки к возмущению [4]

$$\begin{aligned} & -\lambda_1 \mathbf{u}_2 - \lambda_1^{(2)} \mathbf{u} + \nabla p_2 + \text{rot rot } \mathbf{u}_2 = \\ & = - [(\mathbf{U}_1 \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{U}_2 + (\mathbf{u}_1 \nabla) \mathbf{U}_1 + (\mathbf{U}_1 \nabla) \mathbf{u}_1] \end{aligned} \quad (3.11)$$

Определим поправку к декременту, для чего умножаем (3.11) на \mathbf{u} и интегрируем по всему объему жидкости V

$$\lambda_1^{(2)} = \int_V \mathbf{u} (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{U}_2 dV + \int_V \mathbf{u} (\mathbf{u}_1 \nabla) \mathbf{U}_1 dV + \int_V \mathbf{u} (\mathbf{U}_1 \nabla) \mathbf{u}_1 dV \quad (3.12)$$

при условии

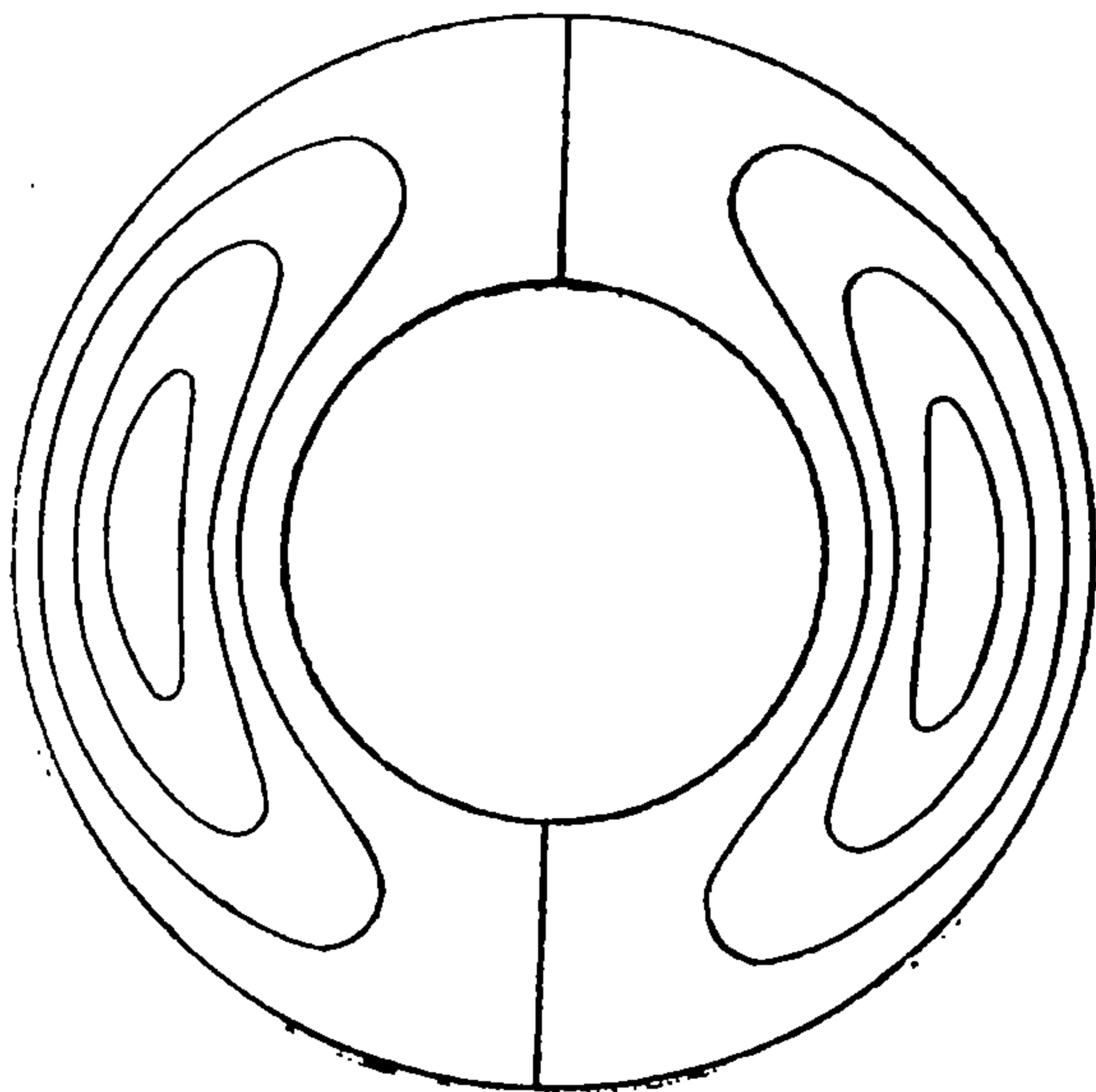
$$\int_V \mathbf{u}^2 dV = 1$$

После интегрирования по углам (3.12) получим

$$\begin{aligned} \lambda_1^{(2)} = \frac{8\pi}{15} \left\{ - \int_1^a (F + 3G) h^2 r dr + \int_1^a (\beta + 3\gamma) h a r^2 dr + \right. \\ \left. + \int_1^a [\beta (a r)' + 3\gamma a] h r^2 dr \right\} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Численное интегрирование для $a = 2$ дает $\lambda_1^{(2)} = -0.000212$. Декремент φ -возмущения с точностью до значения R^2

$$\lambda_1 = 10.80 \left[1 - \left(\frac{R}{226} \right)^2 \right] \quad (3.14)$$



Фиг. 2

б) Рассмотрим теперь r -возмущение. 1°. Возмущение в случае $l = 1$. Его линии тока в меридиональной плоскости определяются уравнением (фиг. 2)

$$f_1 r^2 \sin^2 \vartheta = \text{const} \quad (3.15)$$

и возмущение в некоторых областях полости противоположно основному потоку (фиг. 1).

Правую часть (3.2) разлагаем по векторным шаровым функциям

$$\begin{aligned} (\mathbf{U}_1 \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{U}_1 &= (f_1 r \alpha' + 2f_1 \alpha - 2g_1 \alpha) \sin \vartheta \cos \vartheta \varphi_1 = \\ &= \frac{1}{3} (f_1' a r - f_1 \alpha' r) \mathbf{r} \times \nabla Y_2 \end{aligned} \quad (3.16)$$

В соответствии с этим \mathbf{u}_1 ищем в виде

$$\mathbf{u}_1 = \Phi_2(\mathbf{r}) \mathbf{r} \times \nabla Y_2 \quad (3.17)$$

Проектируя (3.2) на ось φ_1 , получим

$$\Phi_2'' + \frac{2}{r} \Phi_2' + \left(\lambda_1 - \frac{6}{r^2} \right) \Phi_2 = \frac{1}{3} (f_1' a r - f_1 \alpha') \quad (3.18)$$

Это уравнение интегрировалось численно. Функция Φ_2 для $a = 2$ записана в таблице. После интегрирования по углам в (3.12) получим

для этого случая

$$\lambda_1^{(2)} = \frac{8\pi}{15} \int_1^a [3\Phi_2 (f_1 - g_1) \alpha + f_1^2 F' + 3(F - G) \frac{f_1 g_1}{r} + 3f_1 g_1 G' + \frac{g_1^2}{r} (9G - F)] r^2 dr \quad (3.19)$$

при условии (2.25). Численное интегрирование для $a = 2$ дает $\lambda_1^{(2)} = 0.00358$. Декремент r -возмущения для $l = 1$ с точностью до R^2

$$\lambda_1 = 38.6 \left[1 + \left(\frac{R}{77} \right)^2 \right] \quad (3.20)$$

Таким образом, это возмущение затухает тем сильнее, чем больше R . Случай $l = 3$ аналогичен этому, и для него вычисления не проводились.

2°. *Возмущение в случае $l = 2$.* Этот случай исключительный в том отношении, что его линии тока, уравнение которых в меридиональной плоскости

$$f_2 r^2 \cos \vartheta \sin^2 \vartheta = \text{const} \quad (3.21)$$

параллельны линиям тока добавки к основному течению и почти не отличаются от них (фиг. 1). Поэтому можно заранее предполагать, что именно это возмущение сорвет ламинарный поток. Правую часть (3.2) разложим по шаровым векторным функциям

$$\begin{aligned} (\mathbf{U}_1 \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{U}_1 &= \left[\frac{3 \cos^2 \vartheta - 1}{2} (\alpha' f_2 + 2 \frac{\alpha f_2}{r}) - 6 \cos^2 \vartheta \frac{\alpha g_2}{r} \right] \mathbf{n} \times \mathbf{r} = \\ &= \frac{r}{5} (f_2' \alpha + f_2 \alpha' + \frac{4f_2 \alpha}{r}) \mathbf{r} \times \nabla Y_1 + \frac{r}{5} \left(\frac{2}{3} f_2' \alpha - f_2 \alpha' - \frac{2}{3} \frac{f_2 \alpha}{r} \right) \mathbf{r} \times \nabla Y_3 \end{aligned}$$

В соответствии с этим решение (3.2) ищется в виде

$$\mathbf{u}_1 = \Phi_1(r) \mathbf{r} \times \nabla Y_1 + \Phi_3(r) \mathbf{r} \times \nabla Y_3 \quad (3.23)$$

Проектируя (3.2) на ось φ_1 и приравнивая коэффициенты при одинаковых шаровых функциях, получим

$$\begin{aligned} \Phi_1'' + \frac{2}{r} \Phi_1' + \left(\lambda_2 - \frac{2}{r^2} \right) \Phi_1 &= -\frac{r}{5} \left(f_2' \alpha + f_2 \alpha' + \frac{4f_2 \alpha}{r} \right) \\ \Phi_3'' + \frac{2}{r} \Phi_3' + \left(\lambda_2 - \frac{12}{r^2} \right) \Phi_3 &= -\frac{r}{5} \left(\frac{2}{3} f_2' \alpha - f_2 \alpha' - \frac{2}{3} \frac{f_2 \alpha}{r} \right) \end{aligned}$$

Эти уравнения интегрировались численно. Значения функций Φ_1 и Φ_3 для $a = 2$ выписаны в таблице.

После интегрирования по углам в (3.12) получим

$$\begin{aligned} \lambda_2^{(2)} &= \frac{8\pi}{35} \int_1^a \left\{ f_2 \alpha \left(6\Phi_3 - \frac{7}{3} \Phi_1 \right) + g_2 \alpha \left(12\Phi_3 - 7\Phi_1 \right) + \right. \\ &\left. + \left[f_2^2 F' + 9 \frac{g_2^2}{r} G + 3 \left(f_2 g_2 G' + \frac{f_2 g_2 F}{r} + \frac{g_2^2 F}{r} - \frac{f_2 g_2 G}{r} \right) \right] \right\} r^2 dr \end{aligned}$$

при условии (2.25). Для $a = 2$ численное интегрирование дает $\lambda_2^{(2)} = -0.00367$. Декремент λ_2 для r -возмущения с точностью до R^2

$$\lambda_2 = 37.49 \left[1 - \left(\frac{R}{101} \right)^2 \right] \quad (3.24)$$

§ 4. *Некоторые заключения.* Поведение декрементов с увеличением R изображено на фиг. 3, где кривая 1 — φ -возмущения при $l = 1$, кривая 2 — r -возмущения при $l = 2$, кривая 3 — r -возмущения при $l = 1$. Декремент λ_1 для r -возмущения увеличивается с R , следовательно, ос-

новной поток устойчив относительно такого возмущения. Две другие кривые идут вниз, однако кривая 2 пересекает ось абсцисс при $R_* \approx 100$, в то время как кривая 1 при $R_*' \approx 230$. Это значит, что ламинарное течение

$$U = (\alpha n \times r)R + (FY_2 r_1 + Gr \nabla Y_2) R^2 \quad (4.1)$$

будет сорвано r -возмущением в случае $l = 2$

$$u = (f_2 Y_2 r_1 + g_2 r \nabla Y_2) + (\Phi_1 r \times \nabla Y_1 + \Phi_3 r \times \nabla Y_3) R \quad (4.2)$$

при числах Рейнольдса порядка 100.

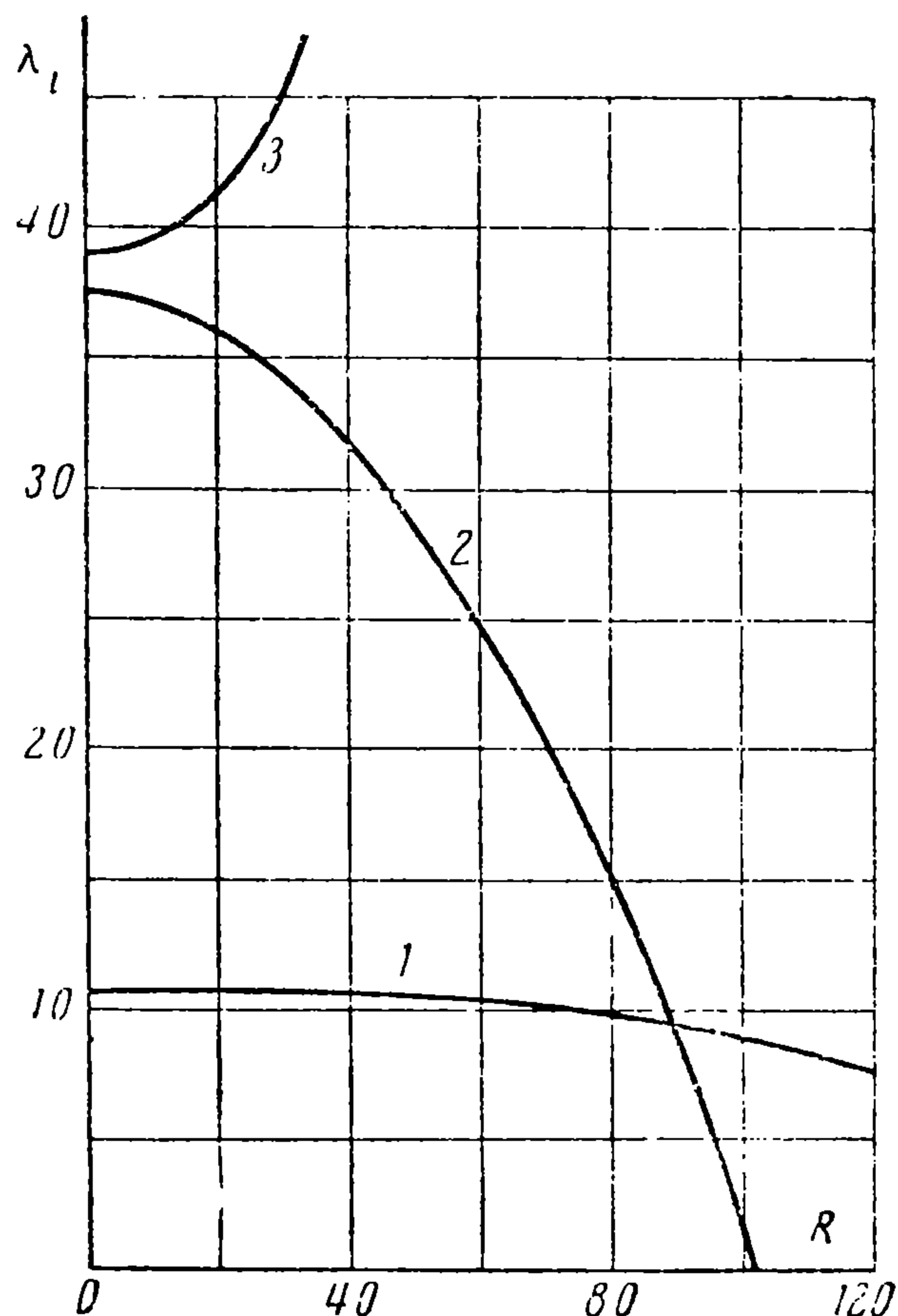
Качественно течения (4.1) и (4.2) не отличаются одно от другого. И в том, и в другом случае есть составляющая скорости по ϕ_1 , пропорциональная R . В меридиональной

плоскости линии тока для обоих движений также похожи. Таким образом, после срыва основного течения установится новое течение почти такого же вида. Как следует из нелинейной теории [4], новое стационарное движение будет

$$U + bu_2 (R - R_*) \quad (4.3)$$

Оно будет наблюдаться только при $R > R_*$, где оно устойчиво. Хотя и не вычислялись коэффициенты b , можно думать, что добавочное движение при $R > R_*$ будет направлено в ту же сторону, что и основной поток. При $R < R_*$ оно направлено против основного течения и не устойчиво.

Наблюдения этих явлений будут очень трудны, так как появление



Фиг. 3

нового движения можно заметить только по излому кривой, определяющей интенсивность течения в зависимости от R .

Пользуюсь случаем поблагодарить В. С. Сорокина за предоставление темы и ценную помощь.

Поступила 28 IV 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Taylor G. J. Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders. Phil. Trans. Roy. Soc., 1923. Ser. A, vol. 223, pp. 289—343.
2. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1953.
3. Stuart J. T. On the non-linear mechanics of hydrodynamic stability, J. of Fluid Mechanics, 1958, vol. 4, p. 1.
4. Сорокин В. С. Нелинейные явления в замкнутых потоках вблизи критического числа Рейнольдса. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 2.
5. Овсеенко Ю. Г. О движении вязкой жидкости между двумя вращающимися сферами. Изв. вузов, Математика, 1961, № 2.
6. Сорокин В. С. Замечания о шаровых электромагнитных волнах. ЖЭТФ, 1948, т. XVIII, стр. 228—235.
7. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций, М., ИИЛ, 1949.
8. Янке Е. и Эмде Ф. Таблицы функций. Физматгиз, 1959.