Прикладная математика и механика. Том XXV, 1961
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

НЕУСТАНОВИВШИЙСЯ ВИХРЕВОЙ ПОТОК ВОКРУГ РЕШЕТКИ ТОНКИХ ВИБРИРУЮЩИХ ПРОФИЛЕЙ

Г. С. Самойлович

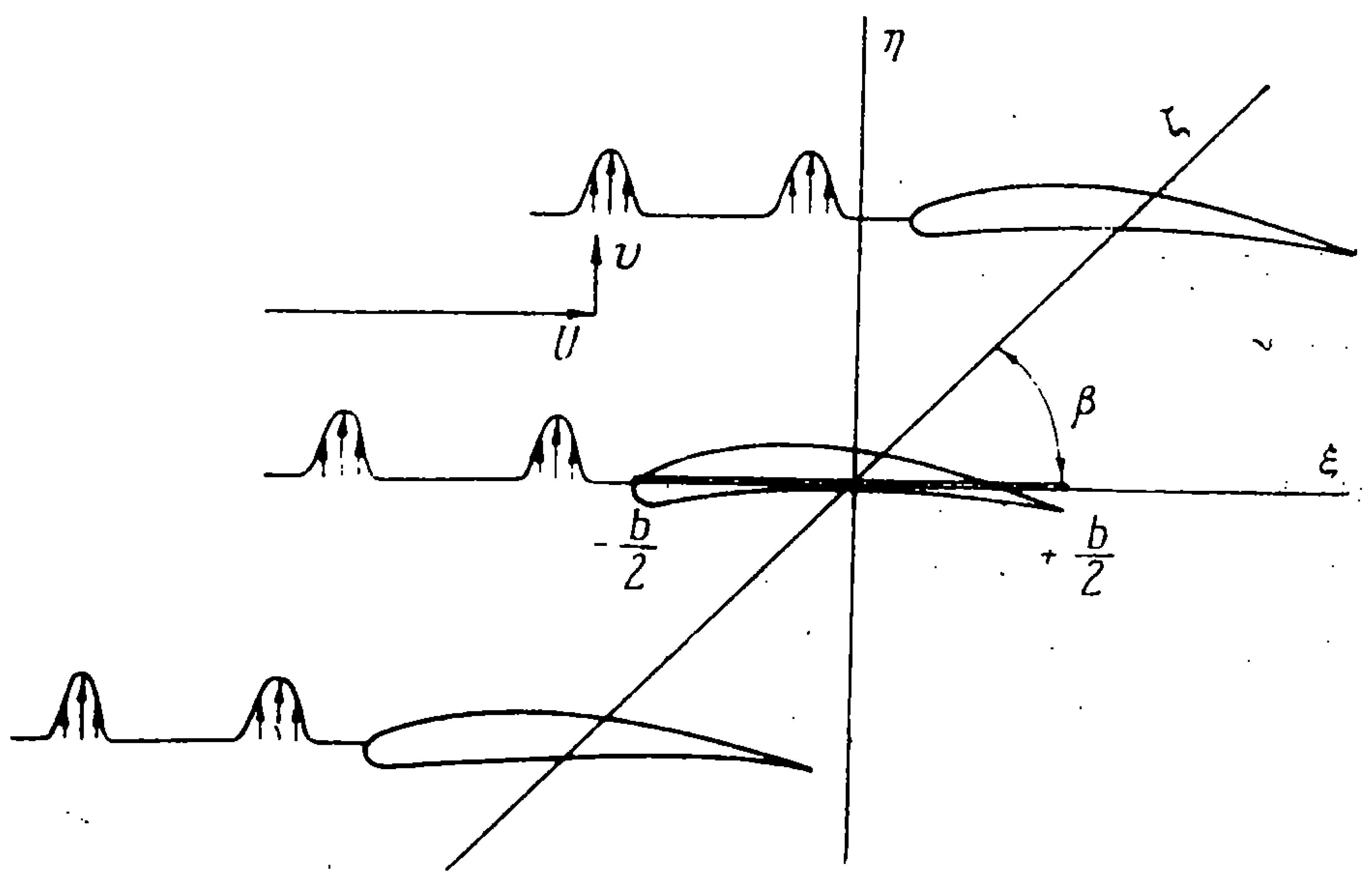
(Москва)

В работе [1] рассмотрено решение задачи обтекания решетки тонких вибрирующих профилей при помощи потенциала ускорений, для которого вводится представление в виде ряда.

Ниже выводится интегральное представление комплексного потенциала ускорений. Разбор частных случаев отсутствует; это сделано в работе [1], где дана и библиография. Здесь в качестве частного случая рассмотрена только задача обтекания решетки неустановившимся вихревым потоком (решетка в вертикальном порыве скорости).

§ 1. Рассмотрим решетку тонких малоизогнутых профилей, расположенных в плоскости комплексной переменной $\zeta = \xi + i\eta$ (фиг. 1). Ось решетки наклонена под углом β к оси абсцисс. Шаг профилей обозначим t, а хорду профилей примем равной $b = 2$.

Рассмотрим задачу обтекания решетки потоком несжимаемой жидкости, набегающим под малым углом атаки. Набегающий поток в общем случае может быть вихревым. Профили решетки могут совершать колебания с малой амплитудой.



Фиг. 1

Составляющую скорости по оси ξ в бесконечности перед решеткой обозначим U и примем ее постоянной. Составляющая скорости по оси η в бесконечности перед решеткой может меняться во времени. В согласии со сказанным выше примем, что в потоке $v \ll U$ (за исключением особых точек на носиках профилей).

Тогда уравнения Эйлера для неустановившегося движения могут быть линеаризованы и представлены в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U\frac{\partial u}{\partial \xi} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \xi} = a_\xi, \qquad \frac{\partial v}{\partial t} + U\frac{\partial v}{\partial \xi} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \eta} = a_\eta \tag{1.1}$$

К уравнениям (1.1) нужно присоединить уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \tag{1.2}$$

В этих уравнениях под u следует понимать дополнительную к U составляющую скорости.

Для решения задачи введем комплексный потенциал ускорений

$$w(\zeta) = \varphi + i\psi, \qquad a_\xi - ia_\eta = \frac{dw}{d\zeta} \tag{1.3}$$

Потенциал ускорений связан с давлением очевидным соотношением

$$\varphi = -\rho p + \mathrm{const} \tag{1.4}$$

Постоянную в этой формуле можно отбросить; при этом под p нужно понимать избыточное давление над давлением в бесконечности перед решеткой.

Дифференцируя первое уравнение (1.1) по ξ, а второе по η, складывая полученные выражения и учитывая уравнение неразрывности (1.2), как известно, получим уравнение Лапласа $\Delta\varphi = 0$.

Дифференцируя первое уравнение (1.1) по η, а второе по ξ и вычитая одно выражение из другого, получим

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + U\frac{\partial \Omega}{\partial \xi} = 0 \qquad \left(\Omega = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\right]\right) \tag{1.5}$$

Здесь Ω — угловая скорость вращения частиц жидкости. Интеграл уравнения (1.5) должен иметь следующий вид:

$$\Omega = \Omega\left(\tau - \frac{\xi}{U}\right) \tag{1.6}$$

Условие (1.6) показывает, что вихри, набегающие на решетку из бесконечности, а также вихри, возникающие на профилях при изменении циркуляции, должны сноситься вниз по потоку со скоростью U, не меняя своей интенсивности.

Пусть профили решетки колеблются и, вообще говоря, подвержены некоторой малой деформации. Координаты точек профилей могут быть заданы, как функция абсциссы и времени $f = f(\xi, \tau)$.

Тогда вертикальная составляющая скорости на профиле из условий непроницаемости должна быть равна (в линейной постановке)

$$v = \frac{\partial f}{\partial \tau} + U\frac{\partial f}{\partial \xi} \tag{1.7}$$

Граничное значение вертикальной составляющей ускорения согласно второму уравнению (1.1) будет

$$a_\eta = \frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2} + 2U\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \tau} + U^2\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \tag{1.8}$$

При решении задачи с помощью потенциала ускорений граничное условие (1.8) удовлетворяется тем, что производная $\partial\varphi/\partial\eta = a_\eta$ искомой функции φ должна на контуре принимать заданное значение. Граничное условие для скорости (1.7) достаточно удовлетворить только в одной произвольной точке контура, так как в остальных точках контура условие (1.7) удовлетворится автоматически (при удовлетворении граничного условия для ускорения).

Кроме этого граничного условия при обтекании с циркуляцией, будем требовать на задней кромке удовлетворения условия Чаплыгина — Жуковского, которое в данном случае с учетом (1.4) равносильно требованию непрерывности функции φ на задней кромке.

Давление в бесконечности перед решеткой будем полагать постоянным и тогда $\varphi = 0$.

Ввиду того, что профили будут тонкими и малоизогнутыми, а амплитуда их колебаний мала, граничные условия на контуре профилей можно перенести на верхние и нижние берега разрезов, совпадающих с хордами профилей.

Решение задачи состоит в определении неустановившихся полей скоростей, ускорений, давлений, завихренностей и подсчете сил и моментов, действующих на профили в решетке.

Ввиду линейности задачи поля скоростей c, ускорений a, давлений p и завихренностей Ω для общего случая движения жидкости можно рассматривать как сумму соответствующих полей, вызванных различными причинами. Будем рассматривать следующие поля.

1) Заданное поле потока. Поток движется со скоростью U и сносит заданную систему свободных вихрей. Поле скоростей, наводимое вихрями, может быть восстановлено обычным образом. Давление в жидкости будет постоянным.

2) Поле возмущений c, a и p, вызванное установившимся обтеканием решетки профилей с заданной толщиной и кривизной со скоростью U при среднем угле атаки.

3) Поле возмущений c, a, p и Ω, вызванное неустановившимся обтеканием решетки профилей нулевой толщины и кривизны. Поле возмущений вызывается: а) пульсациями скорости набегающего потока, б) вибрацией и деформацией профилей и в) наличием вихревой пелены, сбегающей с профилей при неустановившемся обтекании.

Так как φ должно удовлетворять уравнению Лапласа, можно применить конформное преобразование и решать задачу в параметрической плоскости. При помощи функции

$$\zeta = \sin\beta z - \frac{i}{q}\frac{\cos\beta}{\operatorname{ch} q}\ln\left(\operatorname{ch} qz + \sqrt{\operatorname{sh}^2 qz - \operatorname{sh}^2 q}\right)\operatorname{ch}^{-1} q \qquad \left(q = \frac{\pi b}{2t}\right) \tag{1.9}$$

отобразим решетчатую область $\zeta = \xi + i\eta$ на параметрическую решетчатую область $z = x + iy$.

Решетке разрезов в плоскости ζ будет соответствовать в плоскости z также решетка разрезов, но расположенных без выноса ($\beta = \pi / 2$). Длина разрезов останется равной $b = 2$, а шаг $-t$.

По условию $d\zeta / dz = 0$ в плоскости z находятся точки, соответствующие краям разрезов в плоскости ζ

$$\operatorname{sh} qx_{1,2} = \pm \sin\beta \operatorname{sh} q \tag{1.10}$$

§ 2. Найдем выражение для комплексного потенциала ускорений в области z вне решетки разрезов, расположенных без выноса ($\beta = \pi / 2$). Пусть осью решетки будет ось y и начало координат лежит в центре одного из разрезов.

В работе [1] показано, что комплексный потенциал ускорений в данном случае можно представить в виде ряда [1]

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[\frac{1}{q}\ln(\operatorname{ch} qz + \sqrt{\operatorname{sh}^2 qz - \operatorname{sh}^2 q}) - z\right]^n + iB\sqrt{\frac{\operatorname{sh} q(z-1)}{\operatorname{sh} q(z+1)}} \quad (2.1)$$

$$q = \pi b / 2t$$

Здесь A_n и B — постоянные (относительно z) величины. Тогда комплексное ускорение дается рядом

$$a = \left(\frac{\operatorname{sh} qz}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 qz - \operatorname{sh}^2 q}} - 1\right) \sum_{n=1}^{\infty} nA_n \left[\frac{1}{q}\ln(\operatorname{ch} qz + \sqrt{\operatorname{sh}^2 qz - \operatorname{sh}^2 q}) - z\right]^{n-1} +$$

$$+ \frac{iqB \operatorname{sh} 2q}{2\operatorname{sh} q(z+1)\sqrt{\operatorname{sh} q(z-1)\operatorname{sh} q(z+1)}} \quad (2.2)$$

Последний член в (2.2) принимает на разрезах действительные значения. Коэффициенты A_n определяются по известным граничным значениям мнимой части комплексного ускорения на берегах разрезов.

На бесконечности функция, представляемая в (2.2) рядом, имеет порядок $1 / \operatorname{sh}^2 qz$. На верхнем и нижнем берегах разрезов мнимые части этой функции принимают одинаковые значения, равные граничному значению нормального ускорения. Действительные же части функции комплексного ускорения равны по величине, но обратны по знаку. Для представления этой составляющей комплексного ускорения можно воспользоваться методом, применяемым в теории тонкого крыла [2].

Периодическая аналитическая функция, стремящаяся в бесконечности перед и за решеткой к нулю, может быть представлена в решетчатой области интегралом, полученным из интеграла Коши

$$F(z) = \frac{q}{2\pi i}\int_L F(\zeta)\operatorname{cth} q(\zeta - z)\, d\zeta \quad (2.3)$$

Здесь интегрирование ведется вокруг одного из разрезов.

Рассмотрим функцию

$$\Phi(z, \tau) = a(z, \tau)\sqrt{\operatorname{sh}^2 qz - \operatorname{sh}^2 q} \quad (2.4)$$

Эта функция будет периодической и в бесконечной дали от решетки стремится у нулю. На верхнем и нижнем берегах разрезов действительная часть этой функции, равная $a_y(x, \tau)\sqrt{\operatorname{sh}^2 q - \operatorname{sh}^2 qx}$, принимает одинаковые по величине и обратные по знаку значения. Мнимая часть, равная $a_x(x, \tau)\sqrt{\operatorname{sh}^2 q - \operatorname{sh}^2 qx}$, в соответствующих точках обоих берегов имеет одинаковые значения.

[1] В том случае, если плоскость z рассматривается как параметрическая, действительная часть комплексного потенциала должна быть равна нулю в точке $\operatorname{sh} qx = \sin\beta \operatorname{sh} q$, соответствующей задней кромке в плоскости ζ. Тогда последний член в (2.1) должен быть

$$\frac{\sqrt{1 + \sin^2\beta \operatorname{sh}^2 q}\operatorname{sh} qz + \sin\beta \operatorname{sh} q \operatorname{ch} qz}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 qz - \operatorname{sh}^2 q}}$$

Тогда, применив для представления функции $\Phi(z, \tau)$ интеграл (2.3) и выбрав за путь интегрирования контур разреза, получим вместо ряда в (2.2) интегральное представление функции через известные граничные значения нормального ускорения. Опустив промежуточную запись, приведем окончательное выражение для комплексного ускорения

$$a(z, \tau) = \frac{q}{\pi i} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 qz - \operatorname{sh}^2 q}} \int_{-1}^{+1} a_y(\xi, \tau) \sqrt{\operatorname{sh}^2 q - \operatorname{sh}^2 q\xi} \operatorname{cth} q(\xi - z)\, d\xi + \frac{iqB \operatorname{sh} 2q}{2 \operatorname{sh} q(z+1) \sqrt{\operatorname{sh} q(z-1) \operatorname{sh} q(z+1)}} \tag{2.5}$$

Комплексный потенциал ускорений w находится интегрированием (2.5) вдоль произвольной кривой от точки $z = +1$, где действительную часть w можно положить равной нулю, а несущественную мнимую постоянную можно отбросить

$$w(z, \tau) = \frac{q}{\pi i} \int_{+1}^{z} \frac{dz}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 qz - \operatorname{sh}^2 q}} \int_{-1}^{+1} a_y(\xi, \tau) \sqrt{\operatorname{sh}^2 q - \operatorname{sh}^2 q\xi} \operatorname{cth} q(\xi - z)\, d\xi + iB \sqrt{\frac{\operatorname{sh} q(z-1)}{\operatorname{sh} q(z+1)}} \tag{2.6}$$

Таким образом, комплексный потенциал ускорений содержит слагаемое, которое зависит только от нормального ускорения на контуре и слагаемое, определяемое через кинематические условия движения интегрированием (1.1).

Например, в случае гармонического колебательного процесса (вибрация профилей или набегание на решетку периодических вихревых следов) скорость и ускорение потока можно представить в виде

$$v'(z, \tau) = v(z) \exp j\omega\tau, \qquad a'(z, \tau) = a(z) \exp j\omega\tau$$

Здесь ω — частота колебательного процесса, j — мнимая единица, не взаимодействующая с мнимой единицей i.

Тогда интегрирование (1.1) при условии, что скорость далеко перед решеткой равна U, а нормальная скорость на передней кромке профиля равна $v_0 \exp j\omega\tau$, дает

$$v_0 U e^{j\omega\tau} = e^{jk} \int_{1}^{\infty} a(-z)\, e^{-jkz}\, dz \tag{2.7}$$

Здесь $k = \omega b / 2U$ — число Струхаля.

Дальнейшее решение задачи идет обычным путем [1]. Из (2.7) и (2.5) следует определить B. Отделив в (2.6) действительную (по i) часть, находим распределение давлений. Проинтегрировав распределение давлений по контурам профиля, определим неустановившуюся подъемную силу.

В случае установившегося обтекания решетки нормальное ускорение на контуре содержит только конвективный член, который по (1.8) равен

$$a_y(x) = U^2 \frac{d^2 f}{dx^2} = KU^2 \tag{3.1}$$

Здесь $K = K(x)$ — кривизны обтекаемого контура. Так как кривизна контура является известной, то по (2.5) можно найти поле ускорений и с помощью (2.7), положив $\omega = k = 0$, найти коэффициент B. Эти преобразования могут быть проделаны в общем виде.

Можно также обобщить задачу на случай, когда нормальные ускорения на верхнем и нижнем берегах разреза не равны (профили имеют разные кривизны выпуклой и вогнутой сторон).

§ 4. В случае неустановившегося вихревого потока решетку можно рассматривать как состоящую из профилей, имеющих нулевую толщину и кривизну (решетка пластин), так как влияние толщины и кривизны профилей может быть отнесено к установившемуся обтеканию.

Рассмотрим решетку пластин с нулевым выносом ($\beta = \pi / 2$), на которую из бесконечности с постоянной скоростью U периодически набегают волны завихренности, фронт которых перпендикулярен к направлению потока.

Рассмотрим заданные поля при отсутствии решетки.

Пусть вертикальная скорость меняется порывами, бегущими со скоростью U. Форма порывов задана функцией

$$v = v\left(\tau - \frac{x}{U}\right) \tag{4.1}$$

Эти порывы вызываются бегущими волнами завихренности

$$\Omega = \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x} \tag{4.2}$$

Согласно второму уравнению (1.1) вертикальные ускорения в потоке равны нулю

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial \tau} + U\frac{\partial v}{\partial x} \equiv 0 \tag{4.3}$$

Поле давлений полагаем всюду постоянным. Если в поток поместить решетку, то она вызовет возмущения, так как профили непроницаемы и на них нормальная составляющая скорости должна быть равна нулю.

Комплексный потенциал ускорений возмущенного движения по (2.6) равен ($a_y \equiv 0$)

$$w(z, \tau) = iB\sqrt{\frac{\operatorname{sh} q(z-1)}{\operatorname{sh} q(z+1)}} \tag{4.4}$$

Коэффициент B определяется из условия, что возмущенная вертикальная скорость на профиле равна $-v(\tau - x / U)$.

Рассмотрим случай вертикального порыва, когда скорость меняется по гармоническому закону

$$v = v_0 \exp j\omega\left(\tau - \frac{x}{U}\right) \tag{4.5}$$

Общий случай можно получить разложением порыва в ряд Фурье.

Воспользовавшись (2.7) при ускорении, определенном по комплексному потенциалу (4.4), получим

$$B = v_0 U e^{j\omega\tau} R(k, q) \qquad \left(R(k, q) = \frac{e^{jk}}{1 + jke^{jk} I(k, q)}\right) \tag{4.6}$$

Здесь [1]

$$I(k, q) = \int_1^{\infty} \left(\sqrt{\frac{\operatorname{sh} q (x+1)}{\operatorname{sh} q (x-1)}} - e^q \right) e^{-jkx} dx \tag{4.7}$$

Тогда поле давлений находится выделением действительной (по i) части из (4.4). В частности, распределение давления на профиле в решетке описывается выражением

$$p = \rho B \sqrt{\frac{\operatorname{sh} q (1-x)}{\operatorname{sh} q (1+x)}} \tag{4.8}$$

Примечателен тот факт, что закон распределения давления не зависит (в линейной постановке) от формы порыва и частоты набегания волн завихренности.

Неустановившаяся подъемная сила, действующая на профиль в решетке, находится интегрированием (4.8) по контуру профиля

$$L = -4 \rho B \frac{t}{b} \operatorname{sh} \frac{\pi b}{2t} \tag{4.9}$$

В частном случае при колебании одиночного крыла ($q = 0$) интеграл (4.7) выражается через функции Ганкеля

$$I(k, 0) = \int_1^{\infty} \left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1 \right) e^{-jkx} dx = -\frac{\pi}{2} [H_1^{(2)}(k) + jH_0^{(2)}(k)] - \frac{1}{jk} e^{-jk}$$

Функция (4.6) переходит в функцию

$$R(k, 0) = \frac{2j}{\pi k [H_1^{(2)}(k) + jH_0^{(2)}(k)]} \tag{4.10}$$

и дает решение задачи о крыле, находящемся в синусоидальном вертикальном порыве, полученное Сирсом [3].

Поступила 6 VII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Самойлович Г. С. Обтекание аэродинамической решетки тонких вибрирующих профилей. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 4.
2. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. Гостехиздат, 1950.
3. Sears W. R. Some aspects of non-stationary airfoil theory and its practical application, Journ. Aeron sci., 1941, № 2.