Прикладная математика и механика. Том XXV, 1961
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

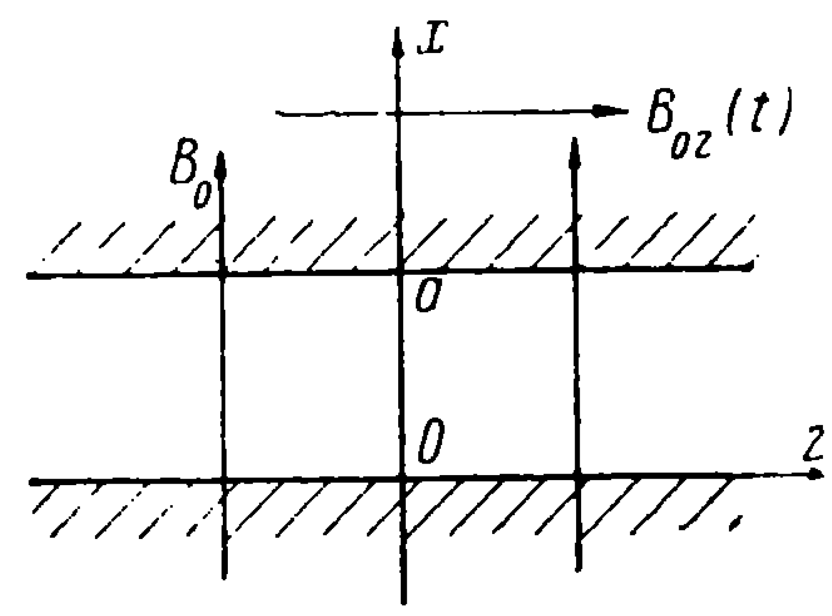
О НЕКОТОРЫХ ВОЗМОЖНОСТЯХ УСКОРЕНИЯ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ С ПОМОЩЬЮ СКРЕЩЕННЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

И. Б. Чекмарев, Я. С. Уфлянд

(Ленинград)

При теоретическом изучении основное внимание уделялось либо применению скрещенных магнитного и электрического полей [1, 2, 3, 4], либо использованию бегущего магнитного поля [5, 6, 7].

Ниже изучается разгон несжимаемой электропроводной жидкости при помощи постоянного поперечного и переменного во времени продольного магнитного поля.



В § 1 рассматривается неустановившееся течение вязкой несжимаемой проводящей среды в плоском канале, помещенном в поперечное однородное магнитное поле, причем движение возникает в результате проникновения из стенок в жидкость переменного продольного магнитного поля. С помощью преобразования Лапласа получено общее решение задачи. В случае линейной зависимости напряженности внешнего продольного магнитного поля от времени найдены простые формулы распределения скорости и напряженностей магнитного и электрического полей в поперечном сечении канала для предельного режима равномерного движения среды.

Детальное исследование переходного режима выполнено в § 2, где изучается аналогичная задача для невязкой жидкости. При этом оказывается, что при достаточно малых значениях магнитного числа Рейнольдса переходной режим имеет апериодический характер. Рассмотрен также случай равномерно ускоренного движения среды.

В § 3 изучается разгон невязкой проводящей жидкости в канале кольцевого сечения.

Ввиду сложности полученных формул, результаты приведены только для предельного режима равномерного движения.

§ 1. Разгон вязкой жидкости в плоском канале. Рассмотрим следующую задачу. Бесконечно длинный плоский канал, высота которого равна a, заполнен несжимаемой вязкой электропроводной жидкостью. Верхняя стенка канала считается непроводящей, а нижняя — идеально проводящей. Имеется поперечное однородное магнитное поле B_0, параллельное оси x (фиг. 1).

В момент времени $t = 0$ в области верхней стенки создается одно родное, параллельное оси z магнитное поле $B_{0z}(t)$, закон изменения которого считается известным. В результате проникания в проводящую жидкость этого магнитного поля в ней индуцируются электрическое поле E_y и ток j_y.

Поперечное магнитное поле B_0 и ток j_y образуют поле объемных сил, под действием которых проводящая жидкость приходит в движение.

Будем считать для простоты, что физические свойства жидкости (ρ, η, σ) постоянны, а магнитная проницаемость μ одинакова для жидкости и стенок. Предположим также, что можно пренебречь током смещения (см. [8], стр. 237, 270).

Тогда в области верхней стенки магнитное поле описывается уравнениями

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}^* = 0, \qquad \operatorname{div} \mathbf{B}^* = 0 \qquad (x > a) \tag{1.1}$$

а в области, занятой жидкостью, поведение полей и среды определяется уравнениями:

$$\begin{gathered}\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \eta \triangle \mathbf{v}, \qquad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \\ \mathbf{j} = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{B} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \qquad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad (0 < x < a)\end{gathered} \tag{1.2}$$

Так как в рассматриваемом случае все величины зависят только от одной координаты x, то из систем (1.1)—(1.2) получаем соотношения:

$$h_x^* = 1, \qquad h_z^* = h_0(\tau) \qquad (\xi > 1) \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial h}{\partial \xi} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}, \qquad j = -\frac{\partial h}{\partial \xi} = R_m(e + u), \qquad \frac{\partial h}{\partial \tau} = -\frac{\partial e}{\partial \xi} \qquad (0 < \xi < 1) \tag{1.4}$$

Здесь введены безразмерные переменные

$$u = \frac{v_z}{v_a}, \qquad \xi = \frac{x}{a}, \qquad \tau = \frac{tv_a}{a}, \qquad h = \frac{B_z}{B_0} \tag{1.5}$$

$$e = \frac{E_y}{B_0 v_a}, \qquad j = \frac{\mu a j_y}{B_0}, \qquad R = \frac{\rho v_a a}{\eta}, \qquad R_m = \sigma\mu v_a a$$

($v_a = B_0 / \sqrt{\mu\rho}$ — скорость волн Альфвена)

Система (1.4) должна решаться при следующих начальных и граничных условиях

$$u = 0, \quad h = 0, \quad e = 0 \qquad \text{при } \tau = 0 \tag{1.6}$$

$$\begin{gathered} u = 0, \quad e = 0, \qquad \text{при } \tau > 0, \quad \xi = 0 \\ u = 0, \quad h = h_0(\tau) \qquad \text{при } \tau > 0, \quad \xi = 1 \end{gathered} \tag{1.7}$$

Применяя к уравнениям (1.4) преобразование Лапласа, получаем

$$pU = \frac{dH}{d\xi} + \frac{1}{R} \frac{d^2 U}{d\xi^2}, \qquad J = -\frac{dH}{d\xi} = R_m(E + U), \qquad pH = -\frac{dE}{d\xi} \tag{1.8}$$

причем граничные условия (1.7) примут вид

$$\begin{gathered} E = U = 0 \qquad \text{при } \xi = 0 \\ H = H_0, \quad U = 0 \qquad \text{при } \xi = 1 \end{gathered} \tag{1.9}$$

Из системы (1.8) последовательным исключением находим следующее уравнение для изображения скорости

$$\frac{d^4 U}{d\xi^4} - [RR_m + (R + R_m)\, p] \frac{d^2 U}{d\xi^2} + RR_m p^2 U = 0 \tag{1.10}$$

где $RR_m = \dfrac{B_0{}^2 a^2 \sigma}{\eta} = M^2$ (M — число Гартмана)

Решая уравнения (1.10) и (1.8) и определяя постоянные интегрирования с помощью граничных условий (1.9), получаем для изображений скорости и напряженностей полей следующие формулы

$$U = H_0 \frac{\operatorname{sh} m \operatorname{sh} n\xi - \operatorname{sh} n \operatorname{sh} m\xi}{\left(p - \frac{n^2}{R}\right)\frac{\operatorname{sh} m \operatorname{ch} n}{n} - \left(p - \frac{m^2}{R}\right)\frac{\operatorname{sh} n \operatorname{ch} m}{m}} \tag{1.11}$$

$$H = H_0 \frac{\left(p - \frac{n^2}{R}\right)\frac{\operatorname{sh} m \operatorname{ch} n\xi}{n} - \left(p - \frac{m^2}{R}\right)\frac{\operatorname{sh} n \operatorname{ch} m\xi}{m}}{\left(p - \frac{n^2}{R}\right)\frac{\operatorname{sh} m \operatorname{ch} n}{n} - \left(p - \frac{m^2}{R}\right)\frac{\operatorname{sh} n \operatorname{ch} m}{m}} \tag{1.12}$$

$$E = -pH_0 \frac{\left(p - \frac{n^2}{R}\right)\frac{\operatorname{sh} m \operatorname{sh} n\xi}{n^2} - \left(p - \frac{m^2}{R}\right)\frac{\operatorname{sh} n \operatorname{sh} m\xi}{m^2}}{\left(p - \frac{n^2}{R}\right)\frac{\operatorname{sh} m \operatorname{ch} n}{n} - \left(p - \frac{m^2}{R}\right)\frac{\operatorname{sh} n \operatorname{ch} m}{m}} \tag{1.13}$$

где (1.14)

$$m = \frac{1}{2}\left[\sqrt{RR_m + (\sqrt{R} + \sqrt{R_m})^2 p} + \sqrt{RR_m + (\sqrt{R} - \sqrt{R_m})^2 p}\right]$$

$$n = \frac{1}{2}\left[\sqrt{RR_m + (\sqrt{R} + \sqrt{R_m})^2 p} - \sqrt{RR_m + (\sqrt{R} - \sqrt{R_m})^2 p}\right]$$

Оригиналы изображений находятся с помощью формулы обращения

$$u = \frac{1}{2\pi i}\int_L U \exp p\tau\, dp, \quad h = \frac{1}{2\pi i}\int_L H \exp p\tau\, dp, \quad e = \frac{1}{2\pi i}\int_L E \exp p\tau\, dp \tag{1.15}$$

Остановимся далее на случае, когда напряженность внешнего магнитного поля меняется по закону $h_0 = \alpha\tau$ $(H_0 = \alpha/p^2)$. Так как U, H и E при этом будут однозначными функциями p, то оригиналы находятся путем суммирования вычетов в полюсах $p = 0$, $p = p_n$, где p_n — корни знаменателя в формулах (1.11)—(1.13).

Исследование этих корней было проведено в работе авторов [9], где для них были получены приближенные выражения. Здесь приводятся лишь формулы предельного режима равномерного движения жидкости, которые находятся вычислением вычетов в полюсе $p = 0$:

$$\frac{u_0}{\alpha} = \frac{\xi \operatorname{sh} M - \operatorname{sh} M\xi}{\operatorname{sh} M}, \qquad \frac{h_0}{\alpha} = \tau - \frac{M(\operatorname{ch} M - \operatorname{ch} M\xi)}{R \operatorname{sh} M} \tag{1.16}$$

$$\frac{e_0}{\alpha} = -\xi, \qquad \frac{j_0}{\alpha} = -R_m \frac{\operatorname{sh} M\xi}{\operatorname{sh} M}$$

Таким образом, с помощью скрещенных магнитных полей — однородного поперечного и линейно меняющегося во времени продольного — можно создать равномерно движущийся поток жидкости.

§ 2. Разгон идеальной жидкости в плоском канале. Рассмотрим поставленную в § 1 задачу для случая невязкой электропроводной жидкости. При $\eta = 0$ система уравнений (1.8) примет вид

$$pU = \frac{dH}{d\xi}, \qquad J = -\frac{dH}{d\xi} = R_m(E + U), \qquad pH = -\frac{dE}{d\xi} \tag{2.1}$$

причем граничные условия будут следующие:

$$E = 0 \text{ при } \xi = 0, \qquad H = H_0 \text{ при } \xi = 1 \tag{2.2}$$

Из (2.1) находим уравнение

$$\frac{d^2H}{d\xi^2} - \frac{p^2}{1 + p/R_m} H = 0 \tag{2.3}$$

решение которого возьмем в форме

$$H = c_1 \operatorname{ch} \frac{p\xi}{\sqrt{1 + p / R_m}} + C_2 \operatorname{sh} \frac{p\xi}{\sqrt{1 + p / R_m}} \tag{2.4}$$

Находя из (2.1) с помощью (2.4) выражения для U и E и определяя постоянные интегрирования с помощью граничных условий (2.2), получаем для U, H и E следующие формулы

$$U = \frac{H_0}{\sqrt{1 + p / R_m}} \frac{\operatorname{sh} \vartheta\xi}{\operatorname{ch} \vartheta}, \qquad H = H_0 \frac{\operatorname{ch} \vartheta\xi}{\operatorname{ch} \vartheta} \tag{2.5}$$

$$E = -H_0 \sqrt{1 + p / R_m}\, \frac{\operatorname{sh} \vartheta\xi}{\operatorname{ch} \vartheta} \qquad \left(\vartheta = \frac{p}{\sqrt{1 + p / R_m}}\right)$$

Пусть, как и выше, $h_0 = \alpha\tau$. Тогда нахождение u, h и e сводится к вычислению вычетов в полюсах

$$p = 0, \ p_{1k} = -\frac{\lambda_k^2}{2R_m} + \frac{\lambda_k}{2R_m} \sqrt{\lambda_k^2 - 4R_m^2} \tag{2.6}$$

$$p_{2k} = -\frac{\lambda_k^2}{2R_m} - \frac{\lambda_k}{2R_m} \sqrt{\lambda_k^2 - 4R_m^2} \qquad \left(\lambda_k = \frac{2k+1}{2} \pi\right)$$

Производя вычисления, получаем для распределения скорости и напряженностей магнитного и электрического полей в жидкости:

$$\frac{u}{\alpha} = \xi - 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin \lambda_k \xi}{\lambda_k} \exp\left(-\frac{\lambda_k^2 \tau}{2R_m}\right) \times$$
$$\times \left[\frac{1}{\sqrt{\lambda_k^2 - 4R_m^2}} \operatorname{sh}\left(\frac{\lambda_k \tau}{2R_m} \sqrt{\lambda_k^2 - 4R_m^2}\right) + \frac{1}{\lambda_k} \operatorname{ch}\left(\frac{\lambda_k \tau}{2R_m} \sqrt{\lambda_k^2 - 4R_m^2}\right)\right] \tag{2.7}$$

$$\frac{h}{\alpha} = \tau - 4R_m \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos \lambda_k \xi}{\lambda_k^2} \exp\left(-\frac{\lambda_k^2 \tau}{2R_m}\right) \times$$
$$\times \frac{1}{\sqrt{\lambda_k^2 - 4R_m^2}} \operatorname{sh}\left(\frac{\lambda_k \tau}{2R_m} \sqrt{\lambda_k^2 - 4R_m^2}\right) \tag{2.8}$$

$$\frac{e}{\alpha} = -\xi + 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin \lambda_k \xi}{\lambda_k} \exp\left(-\frac{\lambda_k^2 \tau}{2R_m}\right) \left[\frac{1}{\lambda_k} \operatorname{ch}\left(\frac{\lambda_k \tau}{2R_m} \sqrt{\lambda_k^2 - 4R_m^2}\right) -\right.$$
$$\left. - \frac{1}{\sqrt{\lambda_k^2 - 4R_m^2}} \operatorname{sh}\left(\frac{\lambda_k \tau}{2R_m} \sqrt{\lambda_k^2 - 4R_m^2}\right)\right] \tag{2.9}$$

Первые слагаемые в формулах (2.7)—(2.9) соответствуют предельному режиму равномерного движения жидкости, остальные — переходному режиму. Из этих результатов вытекает, что переходной режим при $R_m < \pi / 4$ носит апериодический характер, тогда как при $R_m > \pi / 4$ он содержит конечное число затухающих колебаний.

Следует отметить, что в отличие от вязкой жидкости здесь в режиме установившегося движения плотность тока в жидкости равна нулю.

Рассмотрим также случай изменения напряженности внешнего магнитного поля по закону $h_0 = \beta\tau^2$.

Для предельного режима получаем зависимости (2.10)

$$\frac{u_0}{\beta} = 2\left(\tau - \frac{1}{R_m}\right)\xi, \qquad \frac{h_0}{\beta} = \tau^2 - 1 + \xi^2, \qquad \frac{e_0}{\beta} = -2\xi\tau, \qquad \frac{j_0}{\beta} = -2\xi$$

Как видно из формул (2.10), в этом случае с помощью скрещенных магнитных полей создается равномерно-ускоренный поток жидкости в канале.

В заключение данного параграфа отметим следующее, вытекающее из формул (2.7)—(2.9) обстоятельство: в случае плоского неустановившегося движения идеальной несжимаемой жидкости в постоянном поперечном магнитном поле скорость, а также индуцированные электрическое и магнитное поля, представляются функциями вида [1]

$$f = \exp\left[i\lambda\xi - \frac{\lambda^2\tau}{2R_m} \pm \frac{\lambda\tau}{2R_m}\sqrt{\lambda^2 - 4R_m^2}\right] \tag{2.11}$$

(λ — произвольный параметр) удовлетворяющими уравнению

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{1}{R_m}\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \tau} - \frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2} = 0 \tag{2.12}$$

Решения этого уравнения для случая полупространства рассматривались в работе [10].

§ 3. Разгон идеальной жидкости в канале кольцевого сечения. Исследуем теперь возможность разгона невязкой проводящей жидкости в бесконечно длинном канале кольцевого сечения, который образован внутренним идеально проводящим цилиндром радиуса a и внешним непроводящим цилиндром радиуса b. Имеется радиальное магнитное поле $B_r = B_0 a/r$. Движение жидкости возникает в результате проникания продольного однородного магнитного поля $B_z(t)$, которое создается в области внешнего цилиндра сторонними кольцевыми токами.

Изучение неустановившегося продольного движения вязкой проводящей жидкости в кольцевом канале при наличии радиального магнитного поля представляет значительные математические трудности. В работе [11] удалось проинтегрировать соответствующие уравнения лишь в частном случае равных друг другу вязкого и магнитного чисел Рейнольдса. Поэтому ограничимся рассмотрением течения невязкой жидкости. Для области, занятой жидкостью, имеем следующие уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = -\frac{1}{\xi}j, \qquad j = -\frac{\partial h}{\partial \xi} = R_m\left(e + \frac{u}{\xi}\right), \qquad \frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial \xi}(\xi e) = -\frac{\partial h}{\partial \tau} \tag{3.1}$$

Здесь

$$u = \frac{v_z}{v_a}, \qquad \xi = \frac{r}{a}, \qquad \tau = \frac{t v_a}{a}, \qquad h = \frac{B_z}{B_0} \tag{3.2}$$

$$e = \frac{E_\varphi}{B_0 v_a}, \qquad j = \frac{j_\varphi \mu a}{B_0}, \qquad v_a = \frac{B_0}{\sqrt{\mu\rho}}, \qquad R_m = \sigma\mu v_a a$$

Начальные и граничные условия задачи имеют вид

$$u = 0, \qquad h = 0, \qquad e = 0 \qquad \text{при } \tau = 0 \tag{3.3}$$

$$e|_{\xi=1} = 0, \qquad h|_{\xi=\xi_0} = h_0(\tau) \qquad \text{при } \tau > 0 \qquad \left(\xi_0 = \frac{b}{a}\right) \tag{3.4}$$

Применяя преобразование Лапласа, из (3.1) получаем

$$pU = -\frac{1}{\xi}J, \qquad J = -\frac{dH}{d\xi} = R_m\left(E + \frac{U}{\xi}\right), \qquad \frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}(\xi E) = -pH \tag{3.5}$$

---

[1] При $R_m \to \infty$ эти решения переходят в волны Альфвена.

Из этой системы для изображения H находим

$$\left(1+\frac{R_m}{\xi^2 p}\right)\frac{d^2H}{d\xi^2}+\frac{1}{\xi}\left(1-\frac{R_m}{\xi^2 p}\right)\frac{dH}{d\xi}-R_m pH=0 \tag{3.6}$$

Подстановкой $x = R_m \sqrt{1+p\xi^2/R_m}$, получим уравнение Бесселя:

$$\frac{d^2H}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dH}{dx}-H=0 \tag{3.7}$$

решение которого имеет вид

$$H = C_1 I_0(x) + C_2 K_0(x) \tag{3.8}$$

Определяя C_1 и C_2 из преобразованных граничных условий:

$$\frac{dH}{dx}=0 \quad \text{при } x=x_1=R_m\left(1+\frac{p}{R_m}\right)^{1/2}, \quad H=H_0 \quad \text{при } x=x_2=R_m\left(1+\frac{p\xi_0}{R_m}\right)^{1/2} \tag{3.9}$$

получаем для изображений U, H, E следующие выражения

$$U=\frac{R_m H_0}{x\Delta}\left[I_1(x)K_1(x_1)-I_1(x_1)K_1(x)\right]$$

$$H=\frac{H_0}{\Delta}\left[I_0(x)K_1(x_1)+I_1(x_1)K_0(x)\right] \tag{3.10}$$

$$E=-\frac{H_0 x\sqrt{p}}{\Delta\sqrt{R_m(x^2-R_m^2)}}\left[I_1(x)K_1(x_1)-I_1(x_1)K_1(x)\right]$$

где

$$\Delta = I_0(x_2)K_1(x_1)+I_1(x_1)K_0(x_2) \tag{3.11}$$

Не останавливаясь на исследовании переходного режима, ограничимся приведением формул предельного режима равномерного движения среды, получаемого в случае $h_0 = \alpha\tau$

$$\frac{u_0}{\alpha}=\frac{1}{2}(\xi^2-1), \qquad \frac{h_0}{\alpha}=\tau, \qquad \frac{e_0}{\alpha}=-\frac{1}{2\xi}(\xi^2-1) \tag{3.12}$$

Поступила 25 VI 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Реслер, Сирс. Перспективы магнитной аэродинамики. Механика, 1958, № 6.
2. Реслер, Сирс. Магнитогазодинамическое течение в канале. Механика, 1959, № 6.
3. Гордеев Г. В., Губанов А. И. К вопросу ускорения плазмы в магнитном поле. ЖТФ, 1958, 28, 9, 2046—2054.
4. Гордеев Г. В. Нестационарное вращение плазмы в магнитном поле. ЖТФ, 1961, 31, 3, 271.
5. Лиелпетер Я. Разгонное течение жидкого металла в электромагнитном индукционном насосе. Изв. АН ЛатвССР, 1960, 2, 79—86.
6. Баранов В. Б. О разгоне проводящего газа бегущим магнитным полем. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1960, № 4, 14.
7. Янтовский Е. И. Одномерное течение электропроводного газа с постоянной скоростью в бегущем магнитном поле. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1960, № 4, 166.
8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. ГИТТЛ, М., 1957.
9. Уфлянд Я. С., Чекмарев И. Б. О точном решении одной задачи магнитной гидродинамики, ЖТФ, 1959, 29, 11, 1412.
10. Nardini R. Losung eines Randwertproblems der Magneto-Hydrodynamik. ZAMM, 1953, 33, 3, 304.
11. Уфлянд Я. С. О некоторых случаях неустановившегося течения проводящей жидкости в кольцевой трубе. ЖТФ, 1960, 30, 7, 799.