Прикладная математика и механика. Том XXV, 1961
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Э. Г. Альбрехт
(Свердловск)

Рассматривается задача о формировании управляющего воздействия в нелинейной регулируемой системе при условии минимума интегральной оценки качества для малых начальных возмущений. Задача решается методами Ляпунова и Четаева теории устойчивости.

§ 1. Рассмотрим систему уравнений возмущенного движения

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x, u) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

Здесь $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — n-мерный вектор фазовых координат системы, u — скалярная функция координат x_i, описывающая управляющее воздействие.

Требуется найти такое управление $u(x)$, при котором невозмущенное движение $x = 0$ асимптотически устойчиво и вдоль траекторий системы минимизируется интеграл

$$\int_0^\infty G(x, u)\, dt = \min \tag{1.2}$$

где $G(x, u)$ — заданная функция, характеризующая критерий качества. Задача этого типа для линейной системы при условии, что $G(x, u)$ — квадратичная форма, была изучена А. М. Летовым [1,2].

Будем предполагать, что функции $f_i(x, u)$ и $G(x, u)$ являются аналитическими в некоторой окрестности начала координат $x = 0$, $u = 0$ и разлагаются в сходящиеся степенные ряды

$$f_i(x, u) = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_i^{(m)}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} A_{ik} u^k + \sum_{k,\, m=1}^{\infty} \varphi_{ik}^{(m)}(x)\, u^k \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.3}$$

$$G(x, u) = \sum_{m=2}^{\infty} \psi^{(m)}(x) + \sum_{k=2}^{\infty} B_k u^k + \sum_{k,\, m=1}^{\infty} \psi_k^{(m)}(x) u^k \qquad (B_2 \neq 0) \tag{1.4}$$

где символ (m) указывает порядок формы.

Дадим достаточный признак оптимальности управления, основанный на идеях метода функций Ляпунова [3] и учитывающий соображения теории динамического программирования [4]. Для этого будем рассматривать функции $v(x)$ и $u^\circ(x)$, удовлетворяющие следующим условиям.

(a) Функция $v(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости ([5], стр. 29);

(b) Производная функции $v(x)$ в силу системы (1.1) при $u = \xi(x)$

$$(dv / dt)_{\xi(x)} = -G(x, \xi(x))$$

(c) Функция

$$H(x, \xi) = (dv / dt)_{\xi(x)} + G(x, \xi)$$

имеет минимум в каждой точке x некоторой окрестности начала координат при подстановке функции $\xi = u^\circ(x)$.

Теорема 1.1. Если можно указать функции $v(x)$ и $u^\circ(x)$, для которых справедливы условия (a)—(c), то управляющее воздействие $u = u^\circ(x)$ будет оптимальным управлением, т. е. удовлетворяет условию (1.2) [1].

Доказательство. Из условия (b) интегрированием по t следует, что вдоль траекторий системы (1.1) при $\xi = u^\circ(x)$

$$v(x(t)) - v(x_0) = \int_0^t G(x(\tau), u^\circ(x(\tau)))\, d\tau$$

Перейдем здесь к пределу при $t \to \infty$, учитывая, что $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$ в силу условия (a); в результате получим

$$v(x_0) = \int_0^\infty G(x(t), u^\circ(x(t)))\, dt$$

Допустим от противного к утверждению теоремы, что управляющее воздействие $u^\circ(x)$, удовлетворяющее условиям (a)—(c), не является оптимальным, т. е. существует такое управление $u_1(x)$, при котором

$$\int_0^\infty G(x(t), u_1(x(t)))\, dt < \int_0^\infty G(x(t), u^\circ(x(t)))\, dt$$

для некоторого начального условия x_0. Из условия (c) имеем

$$(dv / dt)_{u_1(x)} \geqslant -G(x, u_1(x))$$

Интегрируя это неравенство вдоль траекторий системы (1.1), получим

$$v(x_0) \leqslant \int_0^\infty G(x(t), u_1(x(t)))\, dt$$

что противоречит предположению; следовательно, теорема доказана.

§ 2. В этом параграфе предлагается формальный метод построения функции Ляпунова $v(x)$ и оптимального управления $u^\circ(x)$ в виде рядов по степеням x_i. Для упрощения индекс $^\circ$ при $u^\circ(x)$ будем опускать.

Из теоремы (1.1) следует, что достаточно найти функции $v(x)$ и $u(x)$, удовлетворяющие условию

$$\min_u \left\{\frac{dv}{dt} + G(x, u)\right\} = 0 \tag{2.1}$$

Это условие дает систему уравнений

$$\sum_{i=1}^n f_i(x, u) \frac{\partial v}{\partial x_i} + G(x, u) = 0 \tag{2.2}$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial u} \frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{\partial G}{\partial u} = 0 \tag{2.3}$$

---

[1] Для линейных систем такой критерий приведен в статье Ф. М. Кирилловой [6].

Ограничимся сначала в рядах (1.3) и (1.4) членами низшего порядка относительно x и u, тогда функции $f_i(x, u) \approx \varphi_i^{(1)}(x) + A_{i1} u$ ($i = 1, \ldots, n$) будут линейными, а $G(x, u) \approx \psi^{(2)}(x) + \psi_1^{(1)}(x) u + B_2 u^2$ следует считать квадратичной формой (определенно — положительной) [1]. Система уравнений (1.1) будет линейной

$$\frac{dx_i}{dt} = \varphi_i^{(1)}(x) + A_{i1} u^{(1)}(x) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.4}$$

и условие оптимальности управления запишется в виде

$$\int_0^\infty (\psi^{(2)}(x) + \psi_1^{(1)}(x) u^{(1)} + B_2 (u^{(1)})^2)\, dt = \min \tag{2.5}$$

Из уравнения (2.3) найдем управляющее воздействие

$$u^{(1)}(x) = -\frac{1}{2B_2} \sum_{i=1}^{n} A_{i1} \frac{\partial v^{(2)}}{\partial x_i} - \frac{1}{2B_2} \psi_1^{(1)}(x) \tag{2.6}$$

Функция Ляпунова $v^{(2)}(x)$ будет квадратичной формой, коэффициенты которой удовлетворяют системе квадратных уравнений, разрешимой при определенных условиях. Эти условия найдены в работе [6]. Будем считать, что условия разрешимости для линейной системы выполнены и известно решение линейной задачи $v^{(2)}(x)$ и $u^{(1)}(x)$.

Решение уравнений (2.2) и (2.3) в общем случае ищем в виде

$$v(x) = v^{(2)}(x) + v^{(3)}(x) + \ldots + v^{(m)}(x) + \ldots \tag{2.7}$$

$$u(x) = u^{(1)}(x) + u^{(2)}(x) + \ldots + u^{(m-1)}(x) + \ldots \tag{2.8}$$

Подставим формально (1.3), (1.4), (2.7) и (2.8) в систему уравнений (2.2) и (2.3) и будем приравнивать нулю члены при одинаковых степенях x. При этом членам m-го порядка в уравнении (2.2) соответствуют члены (m — 1)-го порядка в (2.3). Для функций $v^{(2)}(x)$ и $u^{(1)}(x)$ получатся те же уравнения, что и выше при рассмотрении линейной задачи (2.4), (2.5).

Предположим, что функции $v^{(3)}(x), \ldots, v^{(m-1)}(x)$ и, соответственно, $u^{(2)}(x), \ldots, u^{(m-2)}(x)$ найдены. Выпишем в уравнении (2.2) члены m-го порядка, а в уравнении (2.3) (m — 1)-го порядка; получим

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i^{(1)}(x) \frac{\partial v^{(m)}}{\partial x_i} + u^{(m-1)}(x) \sum_{i=1}^{n} A_{i1} \frac{\partial v^{(2)}}{\partial x_i} + u^{(1)}(x) \sum_{i=1}^{n} A_{i1} \frac{\partial v^{(m)}}{\partial x_i} + 2B_2 u^{(1)}(x) u^{(m-1)}(x) + u^{(m-1)}(x) \psi_1^{(1)}(x) = F_1^{(m)}(x) \tag{2.9}$$

$$\sum_{i=1}^{n} A_{i1} \frac{\partial v^{(m)}}{\partial x_i} + 2B_2 u^{(m-1)}(x) = F_2^{(m-1)}(x) \tag{2.10}$$

Учитывая (2.4) и (2.6), уравнение (2.9) можно преобразовать к виду

$$\left(\frac{dv^{(m)}}{dt}\right)_{(2.4)} = F_1^{(m)}(x) \tag{2.11}$$

Здесь $F_1^{(m)}(x)$, $F_2^{(m-1)}(x)$ — известные формы; символ $(dv^{(m)} / dt)_{(2.4)}$ означает производную в силу (2.4) при $u^{(1)}(x)$ согласно (2.6).

---

[1] Из практических соображений следует, что именно такие функции хорошо оценивают качество переходного процесса [1,2].

Так как система (2.4) асимптотически устойчива, то по теореме Ляпунова ([7], стр. 61) существует единственное решение уравнения (2.11). Зная $v^{(m)}(x)$, при помощи (2.10) найдем $u^{(m-1)}(x)$. Таким образом можно последовательно определить формы любого порядка в рядах (2.7) и (2.8). Следовательно, если для линейного приближения задача (2.5) разрешима, то существует единственное формальное решение нелинейной задачи.

§ 3. В этом параграфе для одного типичного случая доказывается сходимость формальных рядов, построение которых описано в § 2.

Рассмотрим систему, описываемую уравнениями

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x) + b_i u \qquad \Big(f_i(x) = \sum_{m=1}^{\infty} f_i^{(m)}(x)\Big) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{3.1}$$

где $f_i(x)$ — аналитические функции.

Пусть вдоль траекторий системы (3.1) минимизируется интеграл

$$\int_0^{\infty} \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + u^2\Big) dt = \min \tag{3.2}$$

Функции $v(x)$ и $u(x)$ удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x) \frac{\partial v}{\partial x_i} - \frac{1}{4}\Big(\sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial v}{\partial x_i}\Big)^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \tag{3.3}$$

$$u = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \tag{3.4}$$

Будем считать, что решение линейной задачи $v^{(2)}(x)$ и $u^{(1)}(x)$ известно, и линейная система первого приближения

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i^{(1)}(x) - \frac{1}{2} b_i \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial v^{(2)}}{\partial x_i} \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{3.5}$$

асимптотически устойчива. Пусть

$$x_i = c_{i1} y_1 + \ldots + c_{in} y_n \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{3.6}$$

линейное неособое преобразование [8], приводящее квадратичную форму $v^{(2)}(x)$ к виду

$$v^{(2)}(y) = y_1^2 + \ldots + y_n^2 \tag{3.7}$$

Пусть обратное преобразование

$$y_i = d_{i1} x_1 + \ldots + d_{in} x_n \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{3.8}$$

Так как корни характеристического уравнения инвариантны относительно любого линейного неособого преобразования, то линейная система в новых переменных также будет асимптотически устойчива и будет иметь вид

$$\frac{dy_j}{dt} = \sum_{i=1}^{n} d_{ji} f_i^{(1)}(x(y)) - \frac{1}{2} B_j \sum_{j=1}^{n} B_j \frac{\partial v^{(2)}}{\partial y_j} \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{3.9}$$

а уравнение (3.3) преобразуется к виду

$$\sum_{j=1}^{n} F_j(y) \frac{\partial v}{\partial y_j} - \frac{1}{4}\Big(\sum_{j=1}^{n} B_j \frac{\partial v}{\partial y_j}\Big)^2 + \sum_{ij=1}^{n} B_{ij} y_i y_j = 0 \tag{3.10}$$

где

$$F_j(y) = \sum_{i=1}^{n} d_{ji} f_i(x(y)), \quad B_j = \sum_{i=1}^{n} d_{ji} b_i \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{3.11}$$

Функции $F_j(y)$ будут, очевидно, аналитическими функциями в новых переменных, а уравнение (3.10) того же типа, что и (3.3). Поэтому предположим, что преобразование (3.6) было проделано заранее, и решение линейной задачи (3.5) имеет вид $v^{(2)}(x) = x_1^2 + \ldots + x_n^2$.

Для дальнейшего понадобится следующее утверждение.

Если $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ — система аналитических функций, правых частей уравнений (3.1), то существует сходящийся степенной ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} C_m r^m \qquad \left(r^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)$$

такой, что справедливы следующие неравенства:

$$|f_i^{(m)}(x)| \leqslant C_m r^m \qquad (i = 1, \ldots, n;\ m = 1, 2, 3 \ldots) \tag{3.12}$$

Подставим (2.7), (3.1) в (3.3) и приравняем нулю члены, имеющие одинаковый порядок относительно x. Тогда для определения членов ряда (2.7) получим зависимости

$$\left(\frac{dv^{(3)}}{dt}\right)_{(3.5)} = -\sum_{i=1}^{n} f_i^{(2)}(x) \frac{\partial v^{(2)}}{\partial x_i} \tag{3.13}$$

$$\left(\frac{dv^{(4)}}{dt}\right)_{(3.5)} = -\sum_{i=1}^{n} f_i^{(2)}(x) \frac{\partial v^{(3)}}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{n} f_i^{(3)}(x) \frac{\partial v^{(2)}}{\partial x_i} + \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial v^{(3)}}{\partial x_i}\right)^2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left(\frac{dv^{(m)}}{dt}\right)_{(3.5)} = -\sum_{i=1}^{n} f_i^{(2)}(x) \frac{\partial v^{(m-1)}}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{n} f_i^{(3)}(x) \frac{\partial v^{(m-2)}}{\partial x_i} - \ldots$$

$$\ldots - \sum_{i=1}^{n} f_i^{(m-1)}(x) \frac{\partial v^{(2)}}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial v^{(3)}}{\partial x_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial v^{(m-1)}}{\partial x_i}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial v^{(4)}}{\partial x_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial v^{(m-2)}}{\partial x_i}\right) + \ldots + \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial v^{(m/2+1)}}{\partial x_i}\right)^2$$

при этом последнее слагаемое будет только при m четном.

Для доказательства сходимости ряда (2.7) воспользуемся известными оценками

$$|v^{(m)}(x)| \leqslant A_m r^m, \qquad \left|\frac{\partial v^{(m)}}{\partial x_i}\right| \leqslant c m A_m r^{m-1} \tag{3.14}$$

где c — коэффициент пропорциональности, не зависящий от порядка формы, а также неравенствами (3.12) и рассмотрим ряд

$$v(r) = r^2 + A_3 r^3 + \ldots + A_m r^m + \ldots \tag{3.15}$$

Ряд (3.15) будет мажорантой ряда (2.7) и здесь достаточно вывести оценки для A_m, при которых имеет место сходимость этого ряда. При помощи соотношений (3.13) оценим числа $A_3, A_4, \ldots, A_m, \ldots$ Из первого уравнения в (3.13) имеем

$$|v^{(3)}(x)| = \left|-\int_0^{\infty} \sum_{i=1}^{n} f_i^{(2)}(x) \frac{\partial v^{(2)}}{\partial x_i} dt\right| \leqslant 2ncC_2 \int_0^{\infty} r^3 dt$$

Введем обозначение $n_1 = nc$ и воспользуемся неравенством $r(t) \leqslant \leqslant r_0 e^{-\alpha t}$, которому удовлетворяет решение системы (3.5) в силу того, что $r^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2 = v^{(2)}(x)$ будет для системы первого приближения функцией Ляпунова.

Тогда получим

$$|v^{(3)}(x)| \leqslant \frac{1}{3\alpha} 2n_1C_2r_0^3, \quad \text{или} \quad A_3 = \frac{1}{3\alpha} 2n_1C_2$$

Точно так же оценим $v^{(4)}(x)$, $v^{(5)}(x)$ и т. д., в результате для коэффициентов ряда (3.15) получим

$$A_3 = \frac{1}{3\alpha} 2n_1C_2$$

$$A_4 = \frac{1}{4\alpha}\left[3n_1C_2A_3 + 2n_1C_3 + \frac{9}{4} n_1^2b^2A_3^2\right] \tag{3.16}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_m = \frac{1}{m\alpha}\Big[(m-1)\, n_1C_2A_{m-1} + \ldots + 2n_1C_{m-1} +$$

$$+ \frac{1}{2} n_1^2b^2 3\,(m-1)\, A_3A_{m-1} + \ldots + \frac{1}{4}\, n_1^2b^2\left(\frac{m}{2}+1\right)^2 A^2_{\left(\frac{m}{2}+1\right)}\Big]$$

$$(b = \max\{|b_1|, \ldots, |b_n|\})$$

Для доказательства сходимости ряда (3.15) воспользуемся методом мажорант, т. е. построим сходящийся ряд с положительными коэффициентами

$$v_1(r) = B_2r^2 + B_3r^3 + \ldots + B_mr^m + \ldots \tag{3.17}$$

такой, что неравенство [9]

$$A_m \leqslant B_m \tag{3.18}$$

выполняется, начиная с некоторого номера m.

Рассмотрим решение уравнения

$$n_1\left(-a_1 + \sum_{m=2}^{\infty} C_m\mu^m\right) r\frac{dv_2}{dr} + n_1^2b^2\left(\frac{dv_2}{dr}\right)^2 + \alpha_1 r^2 = 0 \tag{3.19}$$

Здесь μ — некоторый параметр, при котором не нарушается сходимость ряда $C_2\mu^2 + C_3\mu^3 + \ldots + C_m\mu^m \ldots$, где числа C_m удовлетворяют неравенствам (3.12), положительные числа a_1 и α_1 удовлетворяют неравенству $\alpha_1 < a_1^2 / 4b^2$.

Функция $v_2(r)$ — решение уравнения (3.19), имеет вид

$$v_2(r) = \frac{1}{2} B(\mu)\, r^2 \tag{3.20}$$

где $B(\mu)$ — решение квадратного уравнения, аналитическая функция параметра μ и может быть представлена в виде ряда

$$B(\mu) = \sum_{m=2}^{\infty} B_m\mu^{m-2} \tag{3.21}$$

Подставим (3.20) и (3.21) в (3.19) и будем приравнивать нулю коэффициенты при одинаковых степенях μ. Коэффициент при первом члене ряда (3.21) удовлетворяет квадратному уравнению

$$B_2^2 - \frac{a_1}{n_1b^2} B_2 + \frac{\alpha_1}{n_1^2b^2} = 0 \tag{3.22}$$

Уравнение (3.22) имеет два действительных положительных корня, и искомому решению удовлетворяет следующее значение

$$B_2 = \frac{a_1}{2n_1b^2} - \frac{1}{n_1b}\sqrt{\frac{a_1^2}{4b^2} - \alpha_1} \tag{3.23}$$

Коэффициент при втором члене ряда определится из уравнения

$$(n_1a_1 - 2n_1^2b^2B_2)\, B_3 = n_1C_2B_2 \tag{3.24}$$

Выражение, стоящее в скобках, будет общим во всех уравнениях для определения коэффициентов ряда (3.21). Очевидно, что

$$n_1a_1 - 2n_1^2b^2B_2 = 2n_1b\sqrt{\frac{a_1^2}{4b^2} - \alpha_1} \tag{3.25}$$

Предположим, что a_1 известно и будем выбирать величину α_1 так, чтобы выполнялось следующее равенство:

$$\frac{a_1^2}{4b^2} - \alpha_1 = \frac{\alpha^2}{4n_1^2b^2} \tag{3.26}$$

Тогда будем иметь

$$n_1a_1 - 2n_1^2b^2B_2 = \alpha, \quad \text{или} \quad B_2 = \frac{1}{2n_1b^2}\left(a_1 - \frac{\alpha}{n_1}\right) \tag{3.27}$$

Теперь положим $a_1 \geqslant 2n_1b^2 + \alpha / n_1$; тогда $B_2 \geqslant 1$. Произведя вычисления, получим зависимости между коэффициентами ряда (3.21)

$$\begin{aligned} B_3 &= \frac{1}{\alpha} n_1C_2B_2 \\ B_4 &= \frac{1}{\alpha}\,[n_1C_2B_3 + n_1C_3B_2 + n_1^2b^2B_3^2] \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ B_m &= \frac{1}{\alpha}\,[n_1C_2B_{m-1} + \ldots + n_1C_{m-1}B_2 + 2n_1^2b^2B_3B_{m-1} + \ldots + n_1^2b^2B^2_{(m/2+1)}] \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{3.28}$$

Искомый ряд (3.17) получится умножением ряда (3.21) на r^2 и заменой $\mu = r$.

Сравнивая (3.16) и (3.28), убедимся в справедливости неравенств (3.18), а отсюда следует сходимость ряда (2.7) . Следовательно, в рассматриваемом случае функция Ляпунова $v(x)$ и оптимальное управление $u(x)$ существуют и являются аналитическими функциями в окрестности точки $x = 0$.

§ 4. Можно указать формальный метод построения управляющего воздействия $u = \{u_1, \ldots, u_n\}$ — вектор-функции, удовлетворяющей условию минимума интегрального отклонения системы от заданного движения. Рассмотрим регулируемую систему, описываемую дифференциальными уравнениями

$$dx_i / dt = f_i(x, u) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{4.1}$$

Пусть вдоль траекторий этой системы минимизируется интеграл

$$\int_0^\infty G(x, u)\, dt = \min \tag{4.2}$$

Здесь $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — n-мерный вектор фазовых координат системы; $u = \{u_1, \ldots, u_n\}$ — вектор-функция, описывающая управляющее воздействие; $f_i(x, u)$ и $G(x, u)$ — аналитические функции в окрестности начала координат

$$f_i(x, u) = f_i^{(1)}(x) + \sum_{k=1}^{n} b_{ik}u_k + \varphi_i(x, u) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{4.3}$$

$$G(x, u) = \psi^{(2)}(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i^{(1)}(x)\, u_i + \sum_{ik=1}^{n} d_{ik}u_iu_k + G_1(x, u) \tag{4.4}$$

где $\varphi_i(x, u)$ и $G_1(x, u)$ — аналитические функции, содержащие члены более высокого порядка относительно x и u; коэффициенты b_{ik} и d_{ik} такие, что $n \times n$ — матрицы $B = \| b_{ik} \|_1^n$, и $D = \| d_{ik} \|_1^n$ — неособые.

Пусть $v(x)$ и $u(x) = \{u_1(x), \ldots, u_n(x)\}$ — функции, удовлетворяющие условиям (a)—(c) § 1; причем в условии (c) минимум по всем $u_k(x)$. Повторяя все рассуждения этого параграфа, получим следующие уравнения для определения $v(x)$ и $u(x)$:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x, u) \frac{\partial v}{\partial x_i} + G(x, u) = 0 \tag{4.5}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial u_k} \frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{\partial G}{\partial u_k} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{4.6}$$

Решение системы уравнений (4.5) и (4.6) ищем в виде рядов

$$v(x) = v^{(2)}(x) + \ldots + v^{(m)}(x) + \ldots \tag{4.7}$$

$$u_k(x) = u_k^{(1)}(x) + \ldots + u_k^{(m-1)}(x) + \ldots \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{4.8}$$

Подставим (4.3), (4.4), (4.7) и (4.8) в уравнения (4.6) и (4.5) и будем приравнивать нулю члены одинакового порядка относительно x.

Так как матрицы B и D неособые, то разрешима линейная задача

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i^{(1)}(x) + \sum_{k=1}^{n} b_{ik}u_k^{(1)} \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{4.9}$$

$$\int_0^{\infty} \Big(\psi^{(2)}(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i^{(1)}(x)\, u_i^{(1)} + \sum_{ik=1}^{n} d_{ik}\, u_i^{(1)} u_k^{(1)}\Big) dt = \min \tag{4.10}$$

Функция Ляпунова $v^{(2)}(x)$ будет определенно-положительной квадратичной формой, а оптимальное управление удовлетворяет системе линейных неоднородных уравнений

$$2 \sum_{i=1}^{n} d_{ik}\, u_i^{(1)}(x) = -\sum_{i=1}^{n} b_{ik} \frac{\partial v^{(2)}}{\partial x_i} - C_k^{(1)}(x) \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{4.11}$$

Предположим, что найдены функции $v^{(2)}(x), \ldots, v^{(m-1)}(x)$ и, соответственно, $u_k^{(1)}(x), \ldots, u_k^{(m-2)}(x)$ $(k = 1, \ldots, n)$. Выпишем в уравнении (4.5) члены m-го порядка относительно x, а в уравнениях (4.6)— $(m-1)$-го порядка, получим

$$\sum_{i=1}^{n} \Big(f_i^{(1)}(x) + \sum_{k=1}^{n} b_{ik}\, u_k^{(1)}(x)\Big) \frac{\partial v^{(m)}}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{n} u_k^{(m-1)}(x) \Big(\sum_{i=1}^{n} b_{ik} \frac{\partial v^{(2)}}{\partial x_i} + C_k^{(1)}(x)\Big) +$$

$$+ 2 \sum_{ik=1}^{n} d_{ik}\, u_i^{(1)}(x)\, u_k^{(m-1)}(x) = F_1^{(m)}(x) \tag{4.12}$$

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ik} \frac{\partial v^{(m)}}{\partial x_i} + 2 \sum_{i=1}^{n} d_{ik}\, u_i^{(m-1)}(x) = F_k^{(m-1)}(x) \qquad (k - 1, \ldots, n) \tag{4.13}$$

где $F_1^{(m)}(x)$ и $F_k^{(m-1)}(x)$ — известные формы.

При помощи системы (4.11) уравнение (4.12) можно привести к виду

$$\left(\frac{dv^{(m)}}{dt}\right)_{(4.9)} = F_1^{(m)}(x) \tag{4.14}$$

Так как система линейных уравнений (4.9) асимптотически устойчива, то существует единственное решение $v^{(m)}(x)$ уравнения (4.14).

Подставив найденное значение функции $v^{(m)}(x)$ в (4.13), получим относительно функций $u_k^{(m-1)}(x)$ систему линейных неоднородных уравнений, которая также имеет единственное решение, так как ее определитель по предположению отличен от нуля. Таким образом, можно последовательно определить формы любого порядка в рядах (4.7) и (4.8). Следовательно, если матрицы B и D неособые, то существует единственное формальное решение задачи.

В заключение рассмотрим следующий частный случай:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x) + \sum_{k=1}^{n} b_{ik} u_k \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{4.15}$$

$$\int_0^\infty \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} u_i^2\right) dt = \min \tag{4.16}$$

Уравнения для определения $v(x)$ и $u(x)$ будут иметь вид

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x) \frac{\partial v}{\partial x_i} - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} b_{ik} \frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \tag{4.17}$$

$$u_k = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} b_{ik} \frac{\partial v}{\partial x_i} \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{4.18}$$

Повторяя все рассуждения § 3, можно показать, что функция Ляпунова $v(x)$ — решение уравнения (4.17), является аналитической функцией, следовательно, оптимальное управление $u(x) = \{u_1(x), \ldots, u_n(x)\}$ существует и является аналитической функцией в окрестности точки $x = 0$, если матрица $B = \| b_{ik} \|^n_1$ неособая.

Пользуясь случаем, благодарю Н. Н. Красовского за постановку задачи и замечания.

Поступила 26 VI 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Летов А. М. Аналитическое конструирование регуляторов. I. Автоматика и телемеханика, 1960, т. XXI, № 4.
2. Летов А. М. Аналитическое конструирование регуляторов. IV. Автоматика и телемеханика, 1961, т. XXII, № 4.
3. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М. — Л., Гостехиздат, 1950.
4. Беллман Р. Динамическое программирование. М., ИИЛ, 1960.
5. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. ГИТТЛ, 1955.
6. Кириллова Ф. М. К задаче об аналитическом конструировании регуляторов. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 3.
7. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. ГИТТЛ, 1952.
8. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. Гостехиздат, 1952.
9. Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными. Гостехиздат, 1950.