Прикладная математика и механика. Том XXV, 1961
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

О СТАБИЛИЗАЦИИ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Э. А. Лидский

(Свердловск)

Рассматриваются системы управления, переходный процесс в которых описывается стохастическими линейными дифференциальными уравнениями. Построение функций Ляпунова осуществляется способами, развивающими известные методы Н. Г. Четаева [1]. Система подвержена действию случайного влияния марковского типа [2], вырабатываемого в процессе регулирования, а также помех, имеющих характер импульсных случайных внешних возмущений [3]. Задача стабилизации таких систем обобщает проблему устойчивости по Ляпунову [4]. Обсуждается вопрос о построении управляющего воздействия регулятора (управление), обеспечивающего статистическую устойчивость заданного движения при любых начальных отклонениях. Такое управление именуется в дальнейшем «допустимым». Указываются достаточные условия для существования допустимого управления в линейной системе n-порядка. Для систем второго порядка возможность построения допустимого управления устанавливается путем геометрической интерпретации в фазовой плоскости. Данные в статье признаки существования позволяют выяснить вопрос о построении оптимального управления, минимизирующего некоторый интегральный критерий качества переходного процесса.

§ 1. Постановка задачи. 1°. Рассмотрим стационарную систему управления, переходный процесс в которой описывается векторным уравнением

$$dx / dt = A(\eta) x + c(\eta) \xi + \gamma(x) \tag{1.1}$$

$$\xi = \xi(x_1, \ldots, x_n, \eta) \tag{1.2}$$

Здесь $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ означает n-мерный вектор координат x_i, которые равны нулю в заданном невозмущенном движении; ξ — скаляр, регулирующее воздействие; $A(\eta)$ — матрица вида $\| a_{ij} \|^n_1$, коэффициенты которой — функции случайного фактора $\eta(t)$; через $c = \{c_1, \ldots, c_n\}$ обозначен n-мерный вектор, зависящий от случайной величины $\eta(t)$, а через $\gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ n-мерный вектор помехи.

Предполагаем искомую зависимость $\xi(x, \eta)$ линейной

$$\xi(x, \eta) = \beta_1(\eta) x_1 + \ldots + \beta_n(\eta) x_n \tag{1.3}$$

Ставится задача построения стабилизирующего управления ξ путем подбора функций $\beta_1(\eta), \ldots, \beta_n(\eta)$. Коэффициенты матрицы $a_{ij}(\eta)$ и компоненты вектора $c_i(\eta)$ известны. Описание статистических свойств случайной величины $\eta(t)$ и внешней помехи $\gamma(x)$ изложено ниже.

2°. Опишем случайную величину $\eta(t)$ следующим образом ([2], стр. 234). Предполагаем, что $\eta(t)$ — однородный марковский процесс. Изменение $\eta(t)$ происходит в замкнутом конечном интервале $\eta_1 \leqslant \eta(t) \leqslant \eta_2$.

Обозначим $P[Q/L]$ — вероятность события Q при условии L. Для достаточно малого отрезка времени Δt имеем

$$P[\eta(t+\Delta t)=\alpha/\eta(t)=\alpha]=1-q(\alpha)\,\Delta t+o(\Delta t)$$

$$P[\eta(t+\Delta t)\neq\alpha,\ \eta(t+\Delta t)\leqslant\beta/\eta(t)=\alpha]=q(\alpha,\beta)\,\Delta t+o(\Delta t)$$

где $q(\alpha)$ и $q(\alpha,\beta)$ предполагаются известными.

Если допустить, что функция $q(\alpha,\beta)$ имеет плотность $p(\alpha,\beta)$, то

$$P[\beta_1\leqslant\eta(t+\Delta t)\leqslant\beta_2,\quad \eta(t+\Delta t)\neq\alpha/\eta(t)=\alpha]=$$
$$=\Delta t\int_{\beta_1}^{\beta_2}p(\alpha,\beta)\,d\beta+o(\Delta t)$$

При этих условиях реализации $\eta^p(t)$ процесса $\eta(t)$ — ступенчатые функции ([2], стр. 233).

3°. Помеха $\gamma=\{\gamma_1,\ldots,\gamma_n\}$ — случайная функция, описывающая постоянно действующие возмущения. Предполагаем, что γ может быть представлена в виде

$$\gamma=\mu\psi(t),\qquad \psi(t)=\sum_k\nu_k\,\delta(t-t_k) \tag{1.4}$$

Здесь $\psi(t)$ — импульсная функция, зависящая от случайных величин ν_k и t_k, причем величины ν_k при разных k независимы и не зависят также от t_k, а символ $\delta(t)$ означает δ-функцию Дирака; $\mu=\{\mu_1,\ldots,\mu_n\}$ — постоянный вектор, или вектор-функция

$$\mu(x)$$

Для случайной величины t_k удовлетворяется распределение Пуассона ([3], стр. 63) с частотой λ.

При таком описании помехи реализация решения $x^p(t)$ претерпевает в моменты времени t_k скачкообразное изменение $\{\Delta_u x_i\}$. Считая функцию $x_i^p(t)$ непрерывной справа, можно вычислить

$$\Delta_u x_i=x_i(t_k)-x_i(t_k-0)=\mu_i\nu_i \tag{1.5}$$

Пусть среднее значение ν_i равно нулю ($M\{\nu_i\}=0,\ k=1,\ldots,m$), известны дисперсии $M\{\nu_i^2\}=\sigma_i^2\geqslant 0$ и коэффициенты корреляции k_{ij}, описывающие статистическую связь γ_i и γ_j ($M\{\nu_i\nu_j\}=k_{ij}\sigma_i\sigma_j$). Исследуем следующие случаи:

α) Действие помехи убывает до нуля по мере приближения к заданному закону движения $x=0$, причем

$$\mu_i=\mu_{i1}x_1+\ldots+\mu_{in}x_n\qquad (i=1,\ldots,n,\quad \mu_{ij}=\mathrm{const}) \tag{1.6}$$

β) Помеха не зависит от $x(t)$

$$\mu_i=\mathrm{const} \tag{1.7}$$

4°. Назовем решением системы (1.1) случайную вектор-функцию $\{x(t),\eta(t),\gamma(t)\}$, реализации которой $\{x^p(t),\eta^p(t),\gamma^p(t)\}$ удовлетворяют уравнению (1.1) при $\eta=\eta^p(t)$, $\gamma=\gamma^p(t)$.

В результате действия помехи реализация решения $x^p(t)$ разрывна, что вносит некоторые особенности в дальнейшие рассуждения.

Таким образом, каждое начальное условие x_0, η_0 порождает случайную марковскую функцию $\{x(t),\eta(t)/x_0,\eta_0,t_0=0\}$.

5°. Приведем некоторые определения, модифицирующие понятия, изложенные в работах [5,6].

Определение 1.1. Решение $x = 0$ системы (1.1) назовем устойчивым по вероятности, если для любых сколь угодно малых чисел $\varepsilon > 0$ и $p > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что справедливым будет неравенство

$$P\left[\sum_n x_i^2(t) < \varepsilon^2 \quad \text{при } t > t_0 \Big/ \sum_n x_{i0}^2 \leqslant \delta^2 \quad \text{при } t = t_0\right] > 1 - p$$

Здесь в левой части стоит вероятность неравенства

$$\sum_n x_i^2(t) < \varepsilon^2 \text{ при начальных условиях } \sum_n x_{i0}^2 \leqslant \delta^2$$

Если, кроме того, при любом $\omega > 0$ для каждого начального значения x_0 выполняется условие

$$\lim P\left[\sum_n x_i^2(t) < \omega^2\right] = 1 \quad \text{при } t \to \infty$$

то решение будем называть асимптотически устойчивым по вероятности (в целом).

Определение 1.2. Решение $x(t)$ системы (1.1) назовем устойчивым в среднем, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что справедливым является неравенство

$$M\{x_1^2(t) + \ldots + x_n^2(t);\ x(t),\ \eta(t) / x_0, \eta_0\} < \varepsilon^2 \text{ при } x_{10}^2 + \ldots + x_{n0}^2 \leqslant \delta^2$$

Здесь в левой части $M\{x_1^2(t) + \ldots + x_n^2(t)\}$ — математическое ожидание при начальных условиях x_0, η_0, $x^2_{10} + \ldots + x^2_{10} + \leqslant \delta^2$.

Если, кроме того, для каждого начального значения x_0 выполняется условие

$$\lim M\{x_1^2(t) + \ldots + x_n{}^2(t)\} = 0 \quad \text{при } t \to \infty$$

решение будем называть асимптотически устойчивым в среднем (в целом).

Пользуясь определениями 1.1 и 1.2, сформулируем требования, предъявляемые к допустимому управлению. Будем называть управление $\xi(x, \eta)$ допустимым, если выполняются следующие условия.

(а) Решение $x = 0$ асимптотически устойчиво в среднем относительно любых начальных отклонений.

(б) Интеграл ([6], стр. 428) среднеквадратичной ошибки

$$\int_0^\infty M\left\{\sum_n x_i^2 + \xi^2\right\} dt$$

конечен при любых начальных условиях x_0, η_0.

(в) Система обладает устойчивостью заданного движения $x = 0$ по вероятности.

Примечание I. I. В случае (β) п. 3°|когда из-за наличия помехи невозмущенное движение $x = 0$ нельзя осуществить без некоторой неустранимой погрешности, значение которой в пространстве $\{x_1, \ldots, x_n\}$ определено неравенством $x_1^2 + \ldots + x_n^2 < \Delta^2$, введем понятие (p, Δ) — допустимого управления, подразумевая под ним управление, удовлетворяющее условиям

(α) $\quad \lim [M\{x_1^2(t) + \ldots + x_n^2(t)\}] < \Delta^2 \quad$ при $t \to \infty$, $x = x_{i0}$; $i = 1, \ldots, n$

(β) $$\int_0^\infty M_\Delta\left\{\sum_n x_i^2 + \xi^2 / x_0, \eta_0\right\} dt < \infty$$

Здесь символ M_Δ означает математическое ожидание по случайным переменным $x_i(t)$, $\xi(t)$, удовлетворяющим неравенству

$$\Sigma x_i^2(t) + \xi^2(t) > \Delta^2$$

(γ) Для заданного числа $p > 0$ можно указать $\rho > 0$ такое, что

$$P[x_1^2(t) + \ldots + x_n^2(t) < \Delta^2 \quad \text{при } t > t_0 / x_{10}^2 + \ldots + x_{n0}^2 \leqslant \rho^2] > 1 - p$$

Из условий (α) — (γ) видно, что устойчивости по вероятности и устойчивости в среднем в этом случае придается несколько иной смысл, нежели в определениях 1.1 и 1.2.

§ 2. **Подход к решению.** 1°. Пусть в уравнении (1.1) помеха $\gamma(x) = 0$. Тогда реализация $x^p(t)$ решения системы (1.1) будет кусочно-гладкой непрерывной функцией, и на основании теоремы 6.1 ([5], стр. 818) определяется признак существования допустимого управления.

Если можно найти определенно положительную квадратичную форму $v(x, \eta)$, производная которой $dM\{v\}/dt$ составленная в силу уравнения (1.1) при $\xi = \beta_1(\eta)x_1 + \ldots + \beta_n(\eta)x_n$, $|\beta(\eta)| < b = \text{const}$, удовлетворяет условию

$$dM\{v\}/dt = -w(x, \eta) \tag{2.1}$$

где $-w(x, \eta)$ — определенно отрицательная квадратичная форма, то функция $\xi(x, \eta)$ определяет допустимое управление.

Условие (2.1) по указанной теореме обеспечивает асимптотическую устойчивость в среднем и устойчивость по вероятности решения $x = 0$. Сходимость интеграла среднеквадратичной ошибки следует из равенства

$$v(x_0, \eta_0) = \int_0^\infty M\{w(x, \eta) / x_0, \eta_0\}\, dt$$

получающегося интегрированием усредненного равенства (2.1) по t, и из возможности подобрать постоянную L, для которой справедливо $x_1^2 + \ldots + x_n^2 + \xi^2 \leqslant Lw(x, \eta)$ (подробно см. аналогичные рассуждения в статье [6]).

Примечание 2.1. В статьях [5,6] принято описание случайной величины $\eta(t)$ при помощи матрицы перехода $\|p_{ij}\|_1^n$. Более общий способ описания $\eta(t)$ в данной работе не вносит существенных изменений в рассуждения.

По аналогии с ([6], стр. 426) производная $dM\{v\}/dt$ вычисляется следующим образом:

$$\frac{dM\{v\}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v(x, \eta)}{\partial x_i}\left[c_i(\eta)\xi + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\eta)x_j\right] + \int_{\eta_1}^{\eta_2} [v(x, \beta) - v(x, \eta)]\, d_\beta q(\eta, \beta) \tag{2.2}$$

Здесь интеграл Стильтьеса заменяет сумму из равенства (4.6) ([6], стр. 427).

2°. Предположим, что при отсутствии помех допустимое управление существует. С учетом помехи $\gamma(x)$ в выражении $dM\{v\}/dt$ появляются дополнительные члены

$$\frac{dM\{v\}}{dt} = \left[\frac{dM\{v\}}{dt}\right]_1 + \frac{\lambda}{2}\sum_{i,j}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} k_{ij}\sigma_i\sigma_j\mu_i\mu_j \tag{2.3}$$

Определенно отрицательная форма $[dM\{v\}/dt]_1$ вычисляется по формуле (2.2). Поясним, как получается второе слагаемое правой части (2.3).

Примем, что в течение достаточно малого отрезка времени $\Delta t > 0$ координата x_i претерпевает только один скачок, величина которого, вычисленная по формуле (1.5), есть $\Delta_u x_i = \mu_i \nu_i$. На интервале времени $t \leqslant \tau < t + \Delta t$ пренебрежем непрерывным изменением функции $v(x, \eta)$ за счет x и будем считать $\eta(t) = \alpha = \mathrm{const}$. Эти предположения дают ошибку, имеющую высший порядок малости и исчезающую при $\Delta t \to 0$. Тогда математическое ожидание изменения v за счет $\{\Delta_u x_i\}$ имеет вид

$$M\{\Delta v\} \approx M_\nu \{\Delta_u v\} P[u]$$

Символ M_ν означает математическое ожидание $\Delta_u v$, полученное усреднением по случайным величинам ν_i; через $P[u]$ обозначена вероятность появления одного импульса на отрезке Δt. Имеем

$$P[u] = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$$

Для вычисления $M_\nu\{\Delta_u v\}$ воспользуемся разложением Тэйлора квадратичной формы $\Delta_u v$; при этом все члены порядка выше второго равны нулю; итак:

$$M\{\Delta v\} \approx M_\nu \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v(x, \alpha)}{\partial x_i} \Delta_u x_i + \frac{1}{2} \sum_{i, j}^{n} \frac{\partial^2 v(x, \alpha)}{\partial x_i \partial x_j} \Delta_u x_i \Delta_u x_j \right\} \lambda \Delta t \qquad (2.4)$$

В этом равенстве

$$M_\nu \{(\partial v / \partial x_1) \Delta_u x_1 + \ldots + (\partial v / \partial x_n) \Delta x_n\} = 0$$

так как среднее значение ν_i равно нулю. Поэтому, учитывая равенство $M_\nu \{\nu_i \nu_j\} = k_j \sigma_i \sigma_j$, получим из (2.4) после деления на Δt и перехода к пределу при $\Delta t \to 0$ искомое выражение членов в правой части (2.3), определяемых помехой.

Заметим, что второе слагаемое правой части (2.3) положительно, так как $v(x, \eta)$ — определенно положительная квадратичная форма.

Воспользоваться непосредственно результатами статьи [5] в случае помехи нельзя, так как реализации $x^p(t)$ разрывны.

Кроме того, в случае β) § 1 существует окрестность начала координат $x_1^2 + \ldots + x_n^2 \Delta^2$, в которой производная $dM\{v\} / dt$ заведомо положительна.

Для того чтобы распространить выводы, сделанные в п. 1° § 2, на случай действия помехи, сформулируем следующую теорему.

Теорема 2.1. Пусть в уравнениях (1.1) помеха γ от x не зависит (вектор μ является постоянным) и существует определенно положительная квадратичная форма $v(x, \eta)$, производная математического ожидания которой, вычисленная по формуле (2.2) при $\xi = \xi(x, \eta)$, определенно отрицательна. Тогда для любых $p > 0$ и $\Delta > 0$ можно указать такие числа $\varkappa$ и H, что при выполнении неравенств

$$\lambda \sigma_i^2 < \varkappa \qquad |\Delta_u x_i| < H \qquad (2.5)$$

управление $\xi(x, \eta)$ является (p, Δ)-допустимым.

Доказательство теоремы 2.1 строится по плану, аналогичному утверждению в статье [5] (стр. 823). Отличие в рассуждении и появление ограничения $|\Delta_u x_i| < H$ обусловлено разрывностью реализации $x^p(t)$. Детали, вносимые этим различием в рассуждение, здесь опускаем.

Если вектор μ зависит от x линейно (случай α, § 1), то в правой части формулы (2.3) за счет действия помехи появляется положительная квадратичная форма, коэффициенты которой определяются значениями дисперсий σ_i и коэффициентов μ_{ij} в (1.6). Признак существования допустимого управления, подобный теореме 2.1, формулируется так.

Пусть в уравнении (1.1) помеха γ зависит от x линейно (1.6) и существует определенно положительная форма $v(x, \eta)$, производная математического ожидания которой, вычисленная по формуле (2.2) при $\xi = \xi(x, \eta)$, определенно отрицательна. Тогда можно всегда указать такие $\rho > 0$ и $s > 0$, что при выполнении неравенств

$$\lambda\sigma_i^2 < \rho, \qquad |\mu_{ij}| < s \tag{2.6}$$

управление $\xi(x, \eta)$ является допустимым.

§ 3. Устойчивость по вероятности в целом. Пусть переходный процесс описывается стохастическим уравнением в векторной форме

$$dx / dt = A(\eta) x + c(\eta)\xi \tag{3.1}$$

Будем говорить, что имеет место устойчивость по вероятности в целом, если решения $x(t) = 0$ уравнения (3.1) отвечают требованиям определения 1.1 и, кроме того, для любых двух чисел $p > 0$ и $r_0 > 0$ можно указать такое $r_1 > 0$, что справедливым является неравенство

$$P\left[\sum_n x_i^2(t) < r_1^2 \quad \text{при } t > t_0 \Big/ \sum_n x_{i0}^2 \leqslant r_0^2 \quad \text{при } t = t_0\right] > 1 - p$$

В этом параграфе указываются условия, при выполнении которых можно построить управление $\xi(x, \eta)$, обеспечивающее такую устойчивость.

Если система векторов $c(\eta)$, $A(\eta)c(\eta), \ldots, A^{n-1}(\eta)c(\eta)$ линейно независима, то при любом фиксированном значении $\eta = \eta_1$ в качестве функции Ляпунова может быть принято оптимальное время управления $T^\circ(x_1, \ldots, x_n)$, определяемое из условий [7]

$$\min \int_0^{T^\circ} \left|\sum_n l_i h_i(\tau)\right| d\tau = 1, \qquad \sum_n l_i x_i = -1, \qquad h_i(\tau) = \sum_{k=1}^{n} f_{ik}(\tau) c_k$$

Здесь $f_{ik}(\tau)$ — коэффициенты обратной матрицы фундаментальной системы решений уравнения

$$dx / dt = Ax \tag{3.2}$$

Оптимальное по быстродействию управление $u(x)$ находится методом, изложенным в работе [7].

Функция $T^\circ(x) = v(x)$ в данных условиях существует, причем вдоль оптимальной траектории $dv(x) / dt = -1$ ([7], стр. 634). Найдем управление $\xi = u(x, \eta)$, оптимизирующее систему при взятом значении η и функцию $v(x, \eta)$ для каждого фиксированного η.

Считая построенную таким образом $v(x, \eta)$ функцией случайной величины $\eta(t)$, вычислим производную математического ожидания $dM\{v\}/ dt$ в силу уравнения (3.1).

Учитывая (2.2), получаем

$$\frac{dM\{v(x,\eta)\}}{dt} = -1 + \int_{\eta_1}^{\eta_2} [v(x,\beta) - v(x,\eta)]\, d_\beta q(\eta,\beta) \qquad (3.3)$$

Интеграл в (3.3) может быть как положителен, так и отрицателен. Поэтому следует найти такую окрестность $x_1^2 + \ldots + x_n^2 < \varepsilon^2$ начала координат, в которой правая часть (3.3) будет наверняка отрицательной в силу малости T°. Очевидно, $\varepsilon > 0$ определяется максимумом интеграла в правой части (3.3).

В этой окрестности выбираем управление $\xi = u(x, \eta)$, считая его функцией случайной величины $\eta(t)$. Покажем, что построенное управление можно распространить на все пространство так, чтобы обеспечить устойчивость решения $x(t)$ по вероятности в целом.

Пусть $p > 0$ — заданное малое число. Так как $v(x, \eta)$ в области $x_1^2 + \ldots + x_n^2 < \varepsilon^2$ удовлетворяет условиям теоремы об устойчивости решения $x = 0$ по вероятности ([5], стр. 812), то можно указать такое $\delta > 0$, что при условии $x_{10}^2 + \ldots + x_{n0}^2 \leqslant \delta^2$ выполняется неравенство

$$P[x_1^2(t) + \ldots + x_n^2(t) < \varepsilon^2] > 1 - p \qquad (3.4)$$

Преобразуем равномерным растяжением пространства $\{x_1, \ldots, x_n\}$ сферу $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = \rho^2$ в сферу $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = \delta^2$. При этом область $\delta^2 \leqslant x_1^2 + \ldots + x_n^2 < \varepsilon^2$ переходит в область

$$\varepsilon^2 \leqslant x_1^2 + \ldots + x_n^2 < \varepsilon_1^2 \qquad (\varepsilon_1 = \varepsilon^2/\delta)$$

Потребуем, чтобы построенная выше функция $u(x, \eta)$ в точке $\{x\}$ области $\delta^2 \leqslant x_1^2 + \ldots + x_n^2 < \varepsilon^2$ преобразовывалась в функцию u_1 линейно

$$u_1\left(\frac{\varepsilon}{\delta} x\right) = \frac{\varepsilon}{\delta} u(x)$$

В области $\varepsilon^2 \leqslant x_1^2 + \ldots + x_n^2 < \varepsilon_1^2$ построим функцию V_1 так, что $V_1(x) = (\varepsilon/\delta)^2 \times v(x\delta/\varepsilon)$. Тогда $\operatorname{grad} V_1 = (\varepsilon/\delta) \operatorname{grad} v$, следовательно, учитывая линейность системы (3.1), имеем (при $\xi = u_1$ в области $\varepsilon^2 \leqslant x_1^2 + \ldots + x_n^2 < \varepsilon_1^2$)

$$\frac{dV_1(x\varepsilon/\delta, \eta)}{dt} = \frac{\varepsilon^2}{\delta^2}\frac{dv(x,\eta)}{dt}, \quad \text{или} \quad \frac{dV_1}{dt} = -\left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^2 \qquad (3.5)$$

(так как $dv/dt = -1$). Продолжая подобный процесс построения, можно найти ряд последовательных концентрических сфер радиуса ε_j, функций V_j и u_j, определенных в слое $\varepsilon_{j-1}^2 \leqslant x_1^2 + \ldots + x_n^2 < \varepsilon_j^2$. Из (3.4) и (3.5) следует, что для любой сферы ε_j выполнение неравенства $P[x_1^2(t) + \ldots + x_n^2(t) < \varepsilon_j^2] > 1 - p$ обеспечивается, если только начальные отклонения ограничены областью $x_1^2 + \ldots + x_n^2 < \varepsilon_{j-1}^2$.

Покажем, что построенное управление обеспечивает для системы (3.1) устойчивость по вероятности в целом.

Пусть $\zeta > 0$ и $q > 0$ — заданные числа. Предположим, что область $x_1^2 + \ldots + x_n^2 < \zeta^2$ лежит внутри k-й сферы, имеющей радиус $r = \varepsilon_k$.

Очевидно, вероятность выхода реализации $x^p(t)$ из сферы радиуса ε_{k+1} при начальных условиях $x_{i0}^2 + \ldots + x_{n0}^2 < \zeta^2$ будет не больше p. Можно выбрать такое целое число $l > 0$, при котором $p^l \leqslant q$. Тогда для сферы радиуса ε_{k+l} выполняется неравенство

$$P\,[x_1^2(t) + \ldots + x_n^2(t) < \varepsilon_{k+l} \,/\, x_{10}^2 + \ldots + x_{n0}^2 \leqslant \zeta^2] > 1 - q$$

что и доказывает высказанное предположение об устойчивости по вероятности в целом.

Итак, если система векторов $c(\eta)$, $A(\eta)\,c(\eta), \ldots, A^{n-1}(\eta)\,c(\eta)$ линейно независима, то можно построить управление $\xi(x, \eta)$, обеспечивающее устойчивость системы (3.1) по вероятности в целом.

§ 4. Система n-го порядка. Достаточные условия формирования допустимого управления. 1°. Продолжим исследование уравнения (3.1). Допустим, что функция $q(\alpha, \beta)$, характеризующая вероятность перехода $(\eta = \alpha) \to (\eta = \beta)$, имеет плотность $p(\alpha, \beta)$. Изменения $\eta(t)$ ограничены замкнутым интервалом $\eta_1 \leqslant \eta(t) \leqslant \eta_2$.

Теорема 4.1. Если при любом значении $\eta(t)$ на отрезке $\eta_1 \leqslant \eta(t) \leqslant \eta_2$ выполняются следующие условия.

1) Система векторов $c(\eta)$, $A(\eta)$, $c(\eta), \ldots, A^{n-1}(\eta)\,c(\eta)$ линейно независима.

2) Существуют конечные оценки коэффициентов матрицы $A(\eta)$, компонентов вектора $c(\eta)$ и плотности $p(\alpha, \beta)$

$$\left|\frac{\partial a_{ij}}{\partial \eta}\right| < N, \qquad \left|\frac{\partial c_i}{\partial \eta}\right| < N, \qquad p(\alpha, \beta) < \frac{L}{|\alpha - \beta|} \tag{4.1}$$

то можно указать постоянную $Q > 0$ такую, что при выполнении неравенства $NL < Q$ построение допустимого управления, стабилизирующего систему (3.1), возможно.

Доказательство. Из условия 1 теоремы следует, что при каждом фиксированном значении $\eta = \eta_\varphi$ можно построить управление $\xi^\circ(x, \eta_\varphi)$, обеспечивающее асимптотическую устойчивость и минимизирующее интегральную среднеквадратичную ошибку [8]

$$V(x, \eta_\varphi) = \int_0^\infty \left[\sum_n x_i^2 + \xi^2\right] dt$$

Имеем [9]

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_{\xi^\circ} + \sum_n x_i^2 + \xi^{\circ 2} = \min_{\xi}\left[\frac{dV}{dt} + \sum_n x_i^2 + \xi^2\right] = 0 \tag{4.2}$$

Известными методами исключая управление $\xi^\circ(x, \eta_\varphi)$ в (4.2), получаем уравнение для $V(x, \eta_\varphi)$

$$-\frac{1}{4}\left[\sum_{i=1}^n c_i \frac{\partial V}{\partial x_i}\right]^2 + \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j\right)\right] = -\sum_{i=1}^n x_i^2 \tag{4.3}$$

Для того чтобы выяснить зависимость построенной функции V от η, продифференцируем (4.3) (пока формально) по η, обозначим $\partial V(x, \eta) \,/\, \partial\eta = \alpha$ и перенесем все члены, содержащие α и $\partial\alpha \,/\, \partial\eta$, в левую часть равенства. Получим равенство

$$-\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n} c_i \frac{\partial V}{\partial x_i}\right]\left[\sum_{i=1}^{n} c_i \frac{\partial \alpha}{\partial x_i}\right]+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_i}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n} c_i \frac{\partial V}{\partial x_i}\right]\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial c_i}{\partial \eta}\frac{\partial V}{\partial x_i}\right]+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial \eta} x_j\right) \qquad (4.4)$$

Так как $\xi^\circ = -{}^1/_2\ (c_1\partial V/\partial x_1 + \ldots + c_n\partial V/\partial x_n)$, то левая часть (4.4) является полной производной $d\alpha\ (x, \eta)/dt$ в силу системы (3.1) при $\xi = \xi^\circ\ (x, \eta)$, а правая — некоторой квадратичной формой. При фиксированном η система (3.1) асимптотически устойчива, следовательно ([10], стр. 61), можно утверждать, что существует единственное решение (4.4) — квадратичная форма $\alpha\ (x, \eta)$. Условия теоремы выполняются на замкнутом интервале $\eta_1 \leqslant \eta \leqslant \eta_2$, а коэффициенты формы α непрерывно зависят от η, поэтому можно подобрать такую постоянную $l > 0$, чтобы выполнялась оценка:

$$|\alpha| = \left|\frac{\partial V(x, \eta)}{\partial \eta}\right| \leqslant Nl\sum_n x_i^2\ (t) \qquad (4.5)$$

Выберем $V\ (x, \eta)$ в качестве функции Ляпунова, считая η случайной величиной $\eta\ (t)$. Производная математического ожидания $dM\ \{v\}\ /\ dt$ в силу системы (3.1) суммируется из членов, учитывающих изменение функции v по всем аргументам, включая $\eta\ (t)$ (§ 2, стр. 827)

$$\frac{dM\{v\}}{dt} = -\sum_n x_i^2 - \xi^2 + \int_{\eta_1}^{\eta_2} [v\,(x, \beta) - v\,(x, \alpha)]\, p\,(\alpha, \beta)\, d\beta \qquad (4.6)$$

Используя оценки (4.1), (4.5), получаем

$$\left|\int_{\eta_1}^{\eta_2} [v\,(x, \beta) - v\,(x, \alpha)\, p\,(\alpha, \beta)\, d\beta\right| \leqslant NLl\,|\,\eta_2 - \eta_1|\sum_n x_i^2\,(t) \qquad (4.7)$$

Для обеспечения устойчивости и выполнения утверждения теоремы 4.1 достаточно потребовать, чтобы правая часть (4.6) была определенно отрицательна, т. е. чтобы выполнялось неравенство

$$NL \leqslant \frac{1}{l\,|\,\eta_2 - \eta_1|} = Q \qquad (4.8)$$

Заметим, что постоянная l определяется решением известных задач при фиксированных η из интервала $\eta_1 \leqslant \eta \leqslant \eta_2$ и, следовательно, значение Q может быть подсчитано.

Примечание 4.1. Условие $p\,(\alpha, \beta) \leqslant L/|\alpha - \beta|$ соответствует требованию малой вероятности больших скачков при изменении $\eta(t)$, т. е. неравенство $NL < Q$ означает, что вероятность больших изменений системы (3.1) ограничивается.

Этот результат соответствует для стохастической системы известному результату Четаева о замораживании переменных коэффициентов в обыкновенных дифференциальных уравнениях [1].

Примечание 4.2. Если условия теоремы (4.1) выполнены и допустимое управление существует, то можно также построить оптимальное управление, минимизирующее интегральную среднеквадратичную оценку качества в стохастической системе (3.1) (см., например, [6], стр. 428). Таким образом, результатом изложенного является следующий вывод.

Из найденных условий существования допустимого управления следует, что если система векторов $c(\eta)$, $A(\eta)\,c(\eta), \ldots, A^{n-1}(\eta)$ с (η) линейно независима и выполняются оценки (4.1), то можно построить оптимальное управление, оптимизирующее систему (3.1) по некоторому интегральному критерию качества переходного процесса.

2°. Рассмотрим случай действия помехи $\gamma(x)$, если $\mu_i = \mathrm{const}$ (случай β), § 1).

Пусть условия теоремы 4.1 выполняются и при отсутствии помехи система стабилизируется управлением $\xi(x, \eta)$. Функцию $V(x, \eta)$ строим так же, как и при доказательстве теоремы 4.1.

Тогда выражение производной $dM\{v\}/dt$, вычисленной с учетом действия помехи γ, отличается от (4.6) слагаемым вида

$$S = \frac{\lambda}{2}\sum_{ij}^{n}\frac{\partial^2 v}{dx_i dx_j}K_{ij}\sigma_i\sigma_j\mu_i\mu_j$$

в правой части (п. 2°, § 2). Так как $V(x, \eta)$ определено положительная квадратичная форма, то существует оценка

$$S \leqslant G \tag{4.9}$$

определяющая область неустранимой погрешности $x_1^2 + \ldots + x_n^2 < \Delta^2$.

Для того чтобы система стабилизировалась управлением $\xi(x, \eta)$, являющимся в рассматриваемом случае (p, Δ)-допустимым, достаточно потребовать выполнения ограничений (2.5) теоремы 2.1. Этим определяются условия существования управления.

Если μ_i зависит от $\{x_1, \ldots, x_n\}$ линейно (случай α, § 1), то в левой части (4.9) получается квадратичная форма вида

$$\sum_{i,j}^{n} g(\eta)\, x_i x_j$$

Стабилизация такой системы при помощи допустимого управления возможна, если выполняются оценки (2.6), причем при выборе числа $s > 0$ в (2.6) (так же, как и для числа $H > 0$ в (2.5)) учитывается разрывной характер реализаций.

§ 5. Система второго порядка. Достаточные условия формирования допустимого управления. Для системы, переходный процесс в которой описывают уравнения второго порядка, можно указать достаточные условия существования допустимого управления $\xi(x, \eta)$ путем геометрической интерпретации в фазовой плоскости $\{x_1, x_2\}$. Эти условия несколько отличаются от требований общей теоремы 4.1, так как ограничение скорости изменения случайной переменной $\eta(t)$ (см. примечание 4.1) здесь не используется.

Рассмотрим векторное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = k + c\xi, \qquad k = \left\{\sum_{i=1}^{2} a_{1i}(\eta)\, x_i,\ \sum_{i=1}^{2} a_{2i}(\eta)\, x_i\right\} \tag{5.1}$$

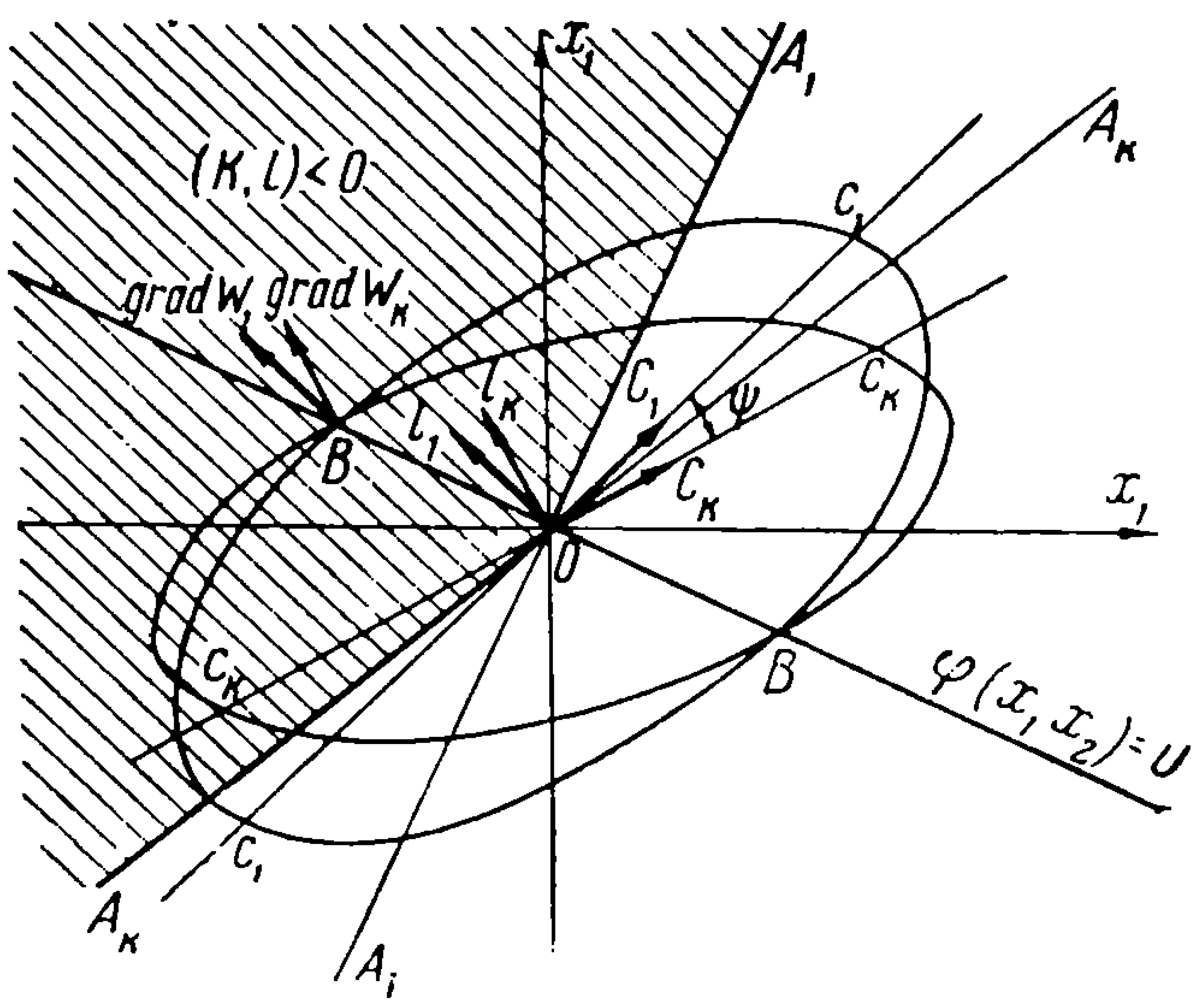
Здесь k — вектор правой части основной линейной системы

$$c = \{c_1(\eta),\ c_2(\eta)\}$$

Покажем, что при некоторых условиях можно построить допустимое управление

$$\xi = m\,(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2) \qquad (m,\ \beta_1,\ \beta_2 = \mathrm{const}) \tag{5.2}$$

Фиксируем переменную $\eta = \eta_1$. В плоскости $x_1 x_2$ (фигура) построим вектор $c_1 = c\,(\eta_1)$. Обозначим $l_1 = \{-c_{12}, c_{11}\}$ — вектор, равный ему по величине и перпендикулярный.



Пусть на линии $A_1 A_1$ скалярное произведение (k, l_1) равно нулю. Линия $A_1 A_1$ делит плоскость на области отрицательных и положительных значений произведения $(k,\ l_1)$.

Предполагаем, что при всех значениях $\eta_1 \leqslant \eta \leqslant \eta_2$ направления вектора $c\,(\eta)$ укладываются в пределах угла ψ между c_1 и c_k.

Допустим, что существует общая (при любом η) область отрицательности $(k,\ l) < 0$ (такой случай изображен на фигуре), причем вектор l при $\eta_1 \leqslant \eta \leqslant \eta_2$ направлен в сторону этой области.

Подберем β_1, β_2 в (5.2) так, чтобы линия $\varphi\,(x_1,\ x_2) = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 = 0$ проходила в области $(k,\ l) < 0$. Рассмотрим теперь определенно положительную форму с постоянными коэффициентами

$$w_1 = a_{11}^{(1)} x_1^2 + 2a_{12}^{(1)} x_1 x_2 + a_{22}^{(1)} x_2^2 \tag{5.3}$$

Коэффициенты формы $a_{ij}^{(1)}$ выберем так, чтобы отрезки BB и C_1C_1 (направление вектора c_1) были сопряженными диаметрами эллипса $w_1 = N_1$. Проведем через концы отрезка BB бесчисленное множество эллипсов $w_m = N_1$ (соответствующих различным значениям η), каждый из которых имеет сопряженными диаметрами отрезки BB и отрезки $C_m C_m$ $(\eta_1 \leqslant \eta_m \leqslant \eta_2)$.

Изменяя постоянную N_1, получим новую систему линий уровня $w\,(x,\ \eta_m) = \mathrm{const}$, причем можно проверить, что и для новых эллипсов общие точки пересечения остаются на линии $\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 = 0$

Имеем при фиксированном $\eta = \eta_1$

$$\frac{dw_1}{dt} = \frac{\partial w_1}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial w_1}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt}$$

или в силу (5.1)

$$\frac{dw_1}{dt} = (k + c\xi,\ \mathrm{grad}\, w_1) \tag{5.4}$$

Вектор $\mathrm{grad}\, w_1$ имеет направление внешней нормали. В окрестности точек B получим

$$\frac{dw_1}{dt} = (k,\ \mathrm{grad}\, w_1) = n\,(k,\ l_1) < 0 \qquad (n < 0) \tag{5.5}$$

С удалением от линии $\varphi(x_1, x_2) = 0$ подбором множителя m в (5.2) можно добиться отрицательности производной dw_1 / dt, так как линия $\varphi(x_1, x_2) = 0$ делит плоскость x_1x_2 на области, в которых скалярное произведение $(c_1, \operatorname{grad} w_1)$ имеет противоположные знаки.

Построим квадратичную форму $v(x, \eta)$, считая $\eta(t)$ случайной величиной, так, чтобы коэффициенты формы $v(x, \eta)$ при каждом значении $\eta = \eta_m$ были равны коэффициентам $a_{ij}^{(m)}$ в выражении w_m вида (5.3).

Вычислим производную математического ожидания $dM\{v\} / dt$ в силу уравнения (5.1) (см. формулу (2.3))

$$\frac{dM\{v\}}{dt} = (k + c\,\xi, \operatorname{grad}_\eta v) + \int\limits_{\eta_1}^{\eta_2} [v(x, \beta) - v(x, \eta)]\, d_\beta q(\eta, \beta) \qquad (5.6)$$

Здесь $\operatorname{grad}_\eta v$ вычисляется при фиксированном η.

В точках прямой $\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 = 0$, являющейся геометрическим местом общих точек пересечения линий равных значений формы $v(x, \eta)$ при всех $\eta_1 \leqslant \eta \leqslant \eta_2$, интеграл в правой части (5.6) обращается в нуль.

В любой другой точке плоскости x_1x_2, не принадлежащей окрестности этой прямой, отрицательность $dM\{v\} / dt$ может быть обеспечена подбором множителя m в (5.2). Таким образом, достаточным условием возможности построения допустимого управления в рассматриваемом случае является существование в фазовой плоскости $\{x_1, x_2\}$ области (на фигуре эта область заштрихована), в которой при $\eta_1 \leqslant \eta(t) \leqslant \eta_2$ скалярное произведение (k, l) отрицательно и вектор l направлен в сторону этой области. Эти условия, очевидно, будут для системы (5.1) достаточными и для того, чтобы можно было построить оптимальное управление.

Рассуждение о возможности построения управления в случае действия помехи $\gamma(x)$ опускаем, так как оно полностью повторяет изложение п.2° § 2.

Поступила 30 VI 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. М., Гостехиздат, 1955.
2. Дуб Дж. Вероятностные процессы. М., ИИЛ, 1956.
3. Лэннинг Дж., Беттин Р. Случайные процессы в задачах автоматического управления. М., ИИЛ, 1958.
4. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.—Л., Гостехиздат, 1950.
5. Кац И. Я., Красовский Н. Н. Об устойчивости систем со случайными параметрами. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 5.
6. Красовский Н. Н., Лидский Э. А. Аналитическое конструирование регуляторов в стохастических системах при ограниченной скорости управляющего воздействия. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 3.
7. Красовский Н. Н. К теории оптимального регулирования. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 4.
8. Кириллова Ф. М. К задаче об аналитическом конструировании регуляторов. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 3.
9. Летов А. М. Аналитическое конструирование регуляторов. Автоматика и телемеханика, 1960, ч. I, № 4; 1961, ч. IV, № 4.
10. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М.—Л., Гостехиздат, 1952.