Прикладная математика и механика. Том XXV, 1961
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ПРОГРАММНОЕ РЕГУЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Е. А. Барбашин

(Свердловск)

Допустим, что регулируемая система подвержена случайным воздействиям и предположим, что имеется корректирующее устройство, обеспечивающее протекание процесса по заданной программе при условии непрерывного поступления полной информации о случайных воздействиях в каждый данный момент. Если информация о случайном воздействии передается с искажением, возникающим в силу появления случайных ошибок, ошибок измерения, появления запаздываний, инерционности и т. д., то действительный процесс будет отличаться от желаемого. Ниже даются оценки искажений, обусловливающих отклонение процесса от заданного в допустимых пределах. Рассмотрен случай, когда осуществляемое движение является периодическим, а также и тот случай, когда осуществляемое движение является разрывным.

Полученные результаты можно трактовать как условия устойчивости движений, условия сохранения и устойчивости периодических движений при постоянно действующих случайных возмущениях.

Для единообразия результатов осуществляемый процесс трактуется как случайный. Статья является непосредственным продолжением работы [1], где рассмотрен детерминированный случай.

§ 1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, \eta(t)) + u(t, \xi(t)) \tag{1.1}$$

Здесь x — n-мерный вектор; $\eta(t)$, $\xi(t)$ — случайные скалярные функции; $f(x, t, \eta(t))$, $u(t, \xi(t))$ — n-мерные вектор-функции.

Поставим задачу подбора функций $\xi(t)$, $u(t, \xi(t))$ так, чтобы наперед заданная (может быть и случайная) функция $x = g(t)$ была бы решением системы (1.1). Очевидно, самое простое решение этой задачи дается соотношениями

$$\xi(t) = \eta(t), \qquad u(t, \xi(t)) = g'(t) - f(g(t), t, \eta(t)) \tag{1.2}$$

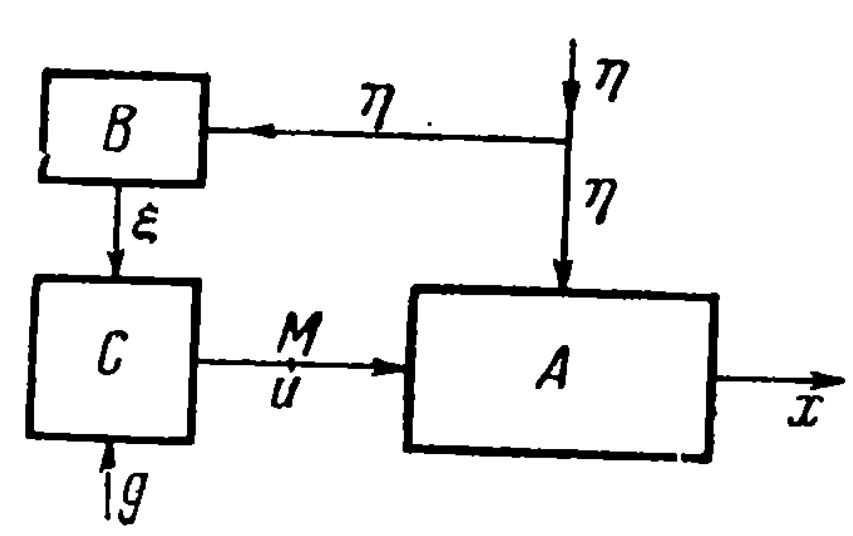
Однако при построении управления $u(t, \xi(t))$ можно получить неполную информацию о значении, принимаемом функцией $\eta(t)$, кроме того, эта информация может поступать с некоторым запаздыванием. Может случиться и так, что функцию $u(t, \xi(t))$ можно выбирать только из определенного класса функций (например, тригонометрических полиномов) и, следовательно, второе равенство в (1.2) может быть выполнено лишь приближенно. Пусть

$$r(t, \eta(t), \xi(t)) = u(t, \xi(t)) - g'(t) - f(g(t), t, \eta(t)) \tag{1.3}$$

где $\xi(t)$ — случайная функция, корреляционно связанная с $\eta(t)$. Поставим своей целью отыскание оценок искажения $r(t, \eta(t), \xi(t))$, при выполнении которых отклонение действительного случайного процесса $x(t)$, описываемого системой (1.1), от заданного процесса $g(t)$ не превосходит заданной величины.

Структурная схема системы, описываемой уравнением, представлена на фиг. 1; здесь A — объект, осуществляющий требуемый процесс: в A поступают случайные возмущения η; эти возмущения одновременно пересылаются через C в корректирующее устройство B, назначением которого является выработка соответствующего управляющего воздействия.

Остановимся теперь на некоторых общих положениях, относящихся к теории дифференциальных уравнений со случайными параметрами. Как известно ([2], стр. 30), случайная величина может быть определена как измеримая функция, определенная на некотором пространстве выборок Ω (или пространстве элементарных событий). Здесь в уравнение (1.1) входят две случайные функции $\eta(t)$ и $\xi(t)$. Если $\xi(t)$ функционально связана с $\eta(t)$, то обе эти функции имеют одно и то же пространство выборок Ω. Если же функция $\xi(t)$ связана с $\eta(t)$ корреляционно, т. е. при определенной реализации $\eta(t)$ функция $\xi(t)$ будет случайной функцией с пространством выборок Δ, то, очевидно, в качестве общего пространства выборок можно взять пространство, являющееся произведением пространств Ω и Δ с мерой, выбранной соответствующим образом.



Таким образом, можно считать, что все случайные величины, входящие в уравнение (1.1), будут случайными величинами с общим пространством выборок Ω.

Если в линейном пространстве случайных величин определена каким-либо образом норма (как в пространстве измеримых функций, определенных в пространстве выборок Ω), то дифференциальное уравнение (1.1) превращается в дифференциальное уравнение, заданное в линейном нормированном пространстве M, элементы которого являются случайными векторами. При этом в качестве начальных векторов при решении задачи Коши следует брать не только детерминированные векторы, но любые другие случайные векторы из M. Очевидно, при указанной сейчас трактовке уравнения (1.1) интеграл и производную от случайной функции по скалярному аргументу t следует понимать как интеграл и производную в смысле Бохнера ([3], стр. 59). В частности, если в качестве квадрата нормы случайного вектора брать математическое ожидание квадрата длины вектора, то понятие производной и интеграла случайной функции совпадает с общепринятым ([4], стр. 214).

Следует заметить, что теория дифференциальных уравнений в линейных нормированных пространствах в настоящее время хорошо разработана. Опираясь на эту теорию, можно без труда сформулировать условия существования, единственности и продолжаемости решений [5], рассматривать вопросы устойчивости [6] или вопросы существования и отыскания периодических решений [7].

Пользуясь вышеприведенными соображениями, можно, очевидно, использовать результаты цитированных работ для изучения дифференциальных уравнений со случайными параметрами.

§ 2. Пусть $g(t)$ будет кусочнодифференцируемым случайным процессом. Проводя в системе (1.1) замену переменных $z = x - g(t)$, получим

$$\frac{dz}{dt} = f(z + g(t), t, \eta(t)) + u(t, \xi(t)) - g'(t) \tag{2.1}$$

Используя (1.3) и вводя обозначение

$$Z(z, t, \eta(t)) = f(z + g(t), t, \eta(t)) - f(g(t), t, \eta(t))$$

систему уравнений возмущенного движения представим в виде

$$\frac{dz}{dt} = Z(z, t, \eta(t)) + r(t, \eta(t), \xi(t)) \tag{2.2}$$

Векторная случайная функция $r(t)$ определяет ошибку, получающуюся от наличия искажений при передаче информации о $\eta(t)$ в корректирующее устройство; отклонение случайной функции от нуля совпадает с отклонением решения $x(t)$ системы (1.1) от заданной функции $g(t)$. За меру отклонения случайной величины z от нуля принимаем величину

$$\|z\| = (\boldsymbol{M}\,|z|^2)^{1/2}, \qquad |z| = \max |z_i| \; (1 \leqslant i \leqslant n) \tag{2.3}$$

Здесь $\boldsymbol{M}$ — операция отыскания математического ожидания, z_i — проекции вектора z. Если A — матрица с элементами a_{ik}, то полагаем

$$|A| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|$$

Очевидно, справедливо неравенство

$$|Az| \leqslant |A|\,|z| \tag{2.4}$$

причем равенство может достигаться. Если матрица A и вектор z являются случайными, то неравенство (2.4) справедливо для любой отдельной реализации, т. е. фиксации элемента ω выборочного пространства Ω.

Выделим теперь из функции $Z(z, t, \eta(t))$ по какому-либо правилу линейную часть $A(t, \eta(t))\,z$, уравнение (2.2) запишется при этом в форме

$$\frac{dz}{dt} = A(t, \eta(t))\,z + R(z, t, \eta(t)) + r(t, \eta(t), \xi(t)) \tag{2.5}$$

Обозначим через D область пространства случайных величин из $\boldsymbol{M}$, определенную неравенством $\|z\| < \varepsilon$.

Наложим следующие ограничения на уравнение.

a) Величины $\mathrm{M}\,|A(t, \eta(t)|^2$, $\|R(z, t, \eta(t)\|$, $\|r(t, \eta(t), \xi(t))\|$ конечны почти при всех t.

b) Функция $|A(t, \eta(t))|$ и $|R(z, t, \eta(t))|$ при любом фиксированном z интегрируемы (как случайные функции) по любому отрезку $[kT, (k+1)T]$, где k — целое положительное число, $T > 0$.

c) Функция $R(z, t, \eta(t))$ удовлетворяет условию Липшица

$$\|R(z, t, \eta(t)) - R(y, t, \eta(t))\| \leqslant L\,\|z - y\|, \qquad (L = \mathrm{const},\ z \subset D,\ y \subset D)$$

d) Функция $\|r(t, \eta(t), \xi(t))\|$ интегрируема (по Лебегу) на любом отрезке $[kT, (k+1)T]$.

e) Существует фундаментальная матрица $W = W(t, \tau, \omega)$ системы $x' = A(t, \eta(t))\,x$, такая, что

$$\boldsymbol{M}_\tau\,|W(t, \tau, \omega)|^2 \leqslant B^2 e^{-2\alpha(t-\tau)} \qquad (B \geqslant 1,\ \alpha > 0)$$

Здесь $\boldsymbol{M}_\tau$ — операция отыскания условного математического ожидания при $t \leqslant \tau$, $\eta(t) = \eta_0(t)$, где $\eta_0(t)$ — некоторая реализация $\eta(t)$.

f) $$\lambda = \alpha - LB > 0$$

g) Случайные величины $|W(t, \tau, \omega)|$ и $|R(z(\tau), \tau, \eta(\tau))|$, так же как и случайные величины $|W(t, \tau, \omega)|$ и $|r(\tau, \eta(\tau), \xi(t))|$ при фиксированном значении τ и определенной реализации $\eta(t) = \eta_0(t)$ при $t \leqslant \tau$ статистически независимы.

Последнее условие означает, что протекание процесса, описываемого системой $x' = A(t, \eta(t))\,x$, не зависит от искажений, допущенных в данный момент времени. Другими словами, в случае линейного объекта A это означает, что, если замкнутую цепь, изображенную на фиг. 1, разомкнуть в точке $\boldsymbol{M}$, то случайная величина u на выходе C в момент времени τ и случайная величина x на выходе A в момент времени $t > \tau$ будут статистически независимыми. Условие (e) есть условие экспоненциальной устойчивости в среднем, введенное в статье [8].

Согласно [5] условия (a — d) гарантируют существование и единственность решений уравнения (2.5), если это уравнение рассматривать как уравнение, заданное в линейном пространстве случайных величин z с нормой, определенной согласно (2.3).

Введем обозначение $\rho(t) = \| r(t, \eta(t), \xi(t)) \|$ и положим

$$h_0 = \sup_{0 \leqslant t < \infty} \rho(t), \qquad h_1 = \sup_{0 \leqslant k < \infty} \int_{kT}^{(k+1)T} \rho(t)\,dt, \qquad h_2 = \sup_{0 \leqslant k < \infty} \left(\int_{kT}^{(k+1)T} \rho^2(t)\,dt \right)^{1/2}$$

где k — целое число, T — некоторое положительное число.

Теорема 2.1. Пусть выполнены условия (a)—(g) и хотя бы одно из неравенств

$$(A) \qquad h_0 < \frac{\varepsilon\lambda}{2B}$$

$$(B) \qquad h_1 < \frac{\varepsilon}{2B} e^{-\lambda T} (1 - e^{-\lambda T})$$

$$(C) \qquad h_2 < \frac{\varepsilon}{2B} \left(\frac{2\lambda}{e^{2\lambda T} - 1} \right)^{1/2} (1 - e^{-\lambda T})$$

Если $z(t)$ — случайное решение системы (2.5), определенное условием $\| z(0) \| < \varepsilon / 2B$, то при $t > 0$ имеет место неравенство $\| z(t) \| < \varepsilon$ и, кроме того, существует t_0 такое, что $\| z(t) \| < \varepsilon / 2B$ при $t > t_0$.

Наметим доказательство теоремы. Очевидно, справедлива в данном случае формула Коши, согласно которой имеем

$$z(t) = W(t, 0)\, z_0 + \int_0^t W(t, \tau)\, (R(z, \tau) + r(\tau))\, d\tau$$

где z_0 — начальный случайный вектор и для краткости записи случайные параметры $\eta(t)$ и $\xi(t)$ опущены. Очевидно, имеем

$$\| z(t) \| \leqslant \| W(t, 0)\, z_0 \| + \int_0^t \{\| W(t, \tau)\, R(z, \tau) \| + \| W(t, \tau)\, r(\tau) \|\}\, d\tau \tag{2.6}$$

Так как $| W(t, 0) |$ и $| z_0 |$ — независимые случайные величины, то

$$\| W(t, 0)\, z_0 \| \leqslant (\boldsymbol{M} \,|\, W(t, 0) \,|^2)^{1/2} \| z_0 \| \leqslant B e^{-\alpha t} \| z_0 \|$$

Далее имеем

$$\| W(t, \tau)\, r(\tau) \|^2 \leqslant \boldsymbol{M}\, (\boldsymbol{M}_\tau \,|\, W(t, \tau) \,|^2 \,|\, r(\tau) \,|^2)$$

Отсюда в силу условия (g) следует

$$\| W(t, \tau)\, r(\tau) \|^2 \leqslant \boldsymbol{M}\, (\boldsymbol{M}_\tau \,|\, r(\tau) \,|^2 \boldsymbol{M}_\tau \,|\, W(t, \tau) \,|^2) \leqslant B^2 e^{-2\alpha(t-\tau)} \| r(\tau) \|$$

Аналогично получим

$$\| W(t, \tau)\, R(z, \tau) \| \leqslant B e^{-\alpha(t-\tau)} \| R(z, \tau) \| \leqslant B L e^{-\alpha(t-\tau)} \| z(\tau) \|$$

Итак, окончательно имеем

$$\| z(t) \| \leqslant B e^{-\alpha t} \| z_0 \| + B \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} (L \,\| z(\tau) \| + \rho(\tau))\, d\tau \tag{2.7}$$

Дальнейшие рассуждения совершенно аналогичны рассуждениям, проведенным при доказательстве первой части теоремы 2.1 статьи [1].

Допустим теперь, что конструируемый случайный процесс $g(t)$ имеет изолированные точки разрыва первого рода. Это значит, что в точках разрыва t_k существуют пределы в среднем квадратичном $\lim g(t)$ при $t \to t_k + 0$ и $\lim g(t)$ при $t \to t_k - 0$, но эти пределы не совпадают на множестве из Ω ненулевой меры. Очевидно, управление, осуществляющее заданный процесс $x = g(t)$, должно иметь вид

$$u(t, \eta(t)) = g'(t) - f(g(t), t, \eta(t))$$

в точках существования производной и

$$u(t, \eta(t)) = b_k \delta(t - t_k)$$

в точках разрыва $t = t_k$. Здесь через b_k обозначен случайный вектор, компоненты которого совпадают для каждой выборки $\omega < \Omega$ с величиной разрыва, соответствующей компоненте векторной функции $g(t)$.

Очевидно, вектор искажения $r(t)$ в этом случае должен иметь аналогичный вид, т. е.

$$r(t) = r^\circ(t) + \sum_k c_k \delta(t - t_k) \tag{2.8}$$

Пусть T — положительное число и пусть величина $\| r^\circ(t) \| = \rho^\circ(t)$ интегрируема на каждом интервале $[kT, (k+1)T]$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Пусть

$$h_1 = \sup_{0 \leqslant k < \infty} \int_{kT}^{(k+1)T-0} \| r(t) \| dt = \sup_{0 \leqslant k < \infty} \left[\int_{kT}^{(k+1)T} \| r^\circ(t) \| dt + \sum_m \| c_m \| \right]$$

Здесь вторая сумма распространена на те m, для которых точки разрыва Cm лежат в интервале $[kT, (k+1)T]$.

Используя рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 2.1 данной статьи и теоремы 3.1 статьи [1], можно доказать, что при выполнении неравенства

$$h_1 < \frac{\varepsilon}{2B} e^{-\lambda T} (1 - e^{-\lambda T})$$

решение $z(t)$ системы (2.5), определенное условием $\| z(0) \| < \varepsilon / 2B$, не выйдет при $t > 0$ за пределы области $\| z \| < \varepsilon$. Можно также указать такое t_0, что при $t > t_0$ будем иметь $\| z(t) \| < \varepsilon / 2B$.

§ 3. Рассмотрим теперь случай, когда программируемый процесс является периодическим. Случайную функцию $\varphi(t)$ назовем периодической, если существует период T такой, что

$$\| \varphi(t + T) - \varphi(t) \| = (M | \varphi(t + T) - \varphi(t) |^2)^{1/2} = 0$$

для любого t. Случайную векторную функцию назовем периодической, если ее компоненты будут периодическими случайными функциями одного и того же периода. Периодичность случайной матрицы определяется аналогично требованием периодичности ее элементов. Заметим, что сделанное определение периодической случайной функции эквивалентно требованию периодичности почти всех реализаций этой функции.

Предположим теперь, что в уравнении (1.1) функция $f(x, t, \eta(t))$ является периодической случайной функцией t периода T. Пусть, кроме того, аппроксимируемый случайный процесс $g(t)$ также является периодической вектор-функцией того же периода. В этом случае имеет смысл подбирать управление $u(t, \xi(t))$ также периодическим, а это значит, что и искажение $r(t, \eta(t), \xi(t))$ тоже следует принять периодическим периода T. Итак, пусть в системе (2.5) матрица $A(t, \eta(t))$ и функции $R(z, t, \eta(t))$, $r(t, \eta(t), \xi(t))$ будут периодическими периода T.

Теорема 3.1. Пусть выполнены условия (a)—(g) и одно из условий

$$(A) \qquad \rho_0 = \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \rho(t) < \frac{\varepsilon\lambda}{2B^2}$$

$$(B) \qquad \rho_1 = \int_0^T \rho(t)\, dt < \frac{\varepsilon}{2B^2} e^{-\lambda T}(1 - e^{-\lambda T})$$

$$(C) \qquad \rho_2 = \left(\int_0^T \rho^2(t)\, dt\right)^{1/2} < \frac{\varepsilon}{2B^2}\left(\frac{2\lambda}{e^{2\lambda T} - 1}\right)^{1/2}(1 - e^{-\lambda T})$$

Справедливы следующие утверждения.

1) Всякое решение $z(t)$ системы уравнений (2.5), определенное условием $\| z(0)\| < \varepsilon / 2B$, не выйдет при $t > 0$ из области $\| z \| < \varepsilon$.

2) Существует в области $\| z \| \leqslant \varepsilon, t > 0$ асимптотически устойчивое в среднем квадратичном [8] периодическое решение $z^\circ(t)$ такое, что из $\| z(0) - z^\circ(0) \| < \varepsilon / 2B$ следует $\lim \| z(t) - z^\circ(t) \| = 0$ при $t \to \infty$.

Справедливость первой части теоремы следует из теоремы 2.1; вторая же часть доказывается точно так же, как и вторая часть теоремы 2.1 статьи [1], если учесть замечания, сделанные к доказательству теоремы 2.1.

Допустим и теперь, что аппроксимируемый процесс $g(t)$ снова имеет изолированные точки разрыва первого рода. Пусть

$$\rho_1 = \int_0^T \| r^\circ(t) \|\, dt + \sum_k \| c_k \|$$

где случайная функция $r^\circ(t)$ и случайный вектор c_k имеют тот же смысл, что и в (2.8), суммирование во втором слагаемом распространяется на те k, для которых точка разрыва лежит в интервале $[0, T]$. Нетрудно и в этом случае доказать, что выполнение неравенства

$$\rho_1 < \frac{\varepsilon}{2B^2} e^{-\lambda T}(1 - e^{-\lambda T})$$

повлечет за собой справедливость обоих утверждений теоремы 3.1.

Автор благодарит Н. Н. Красовского за обсуждение темы и результатов настоящей статьи.

Поступила 14 VI 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Барбашин Е. А. О построении периодических движений, ПММ, 1961, т. XXV, вып. 2.
2. Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей. ОНТИ, 1936.
3. Хилл Э. Функциональный анализ и полугруппы. ИИЛ, 1951.
4. Пугачев В. С. Теория случайных функций и ее применения к задачам автоматического управления. ГИТТЛ, 1957.
5. Красносельский М. А., Крейн С. Г. Нелокальные теоремы существования и теоремы единственности для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. ДАН СССР, 1955, т. 102, № 1.
6. Massera I. L. Contributions to stability theory. Ann. Math., 1956, v. 64, № 1.
7. Massera I. L., Shäffer II. I. Linear differential equations and functional analysis. II. Equations with periodic coefficients. Ann. Math., 1959, v. 69, № 1.
8. Кац И. Я., Красовский Н. Н. Об устойчивости систем со случайными параметрами. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 5.