Прикладная математика и механика. Том XXV, 1961
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

О СРЕДНЕКВАДРАТИЧНОЙ ОПТИМАЛЬНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ЗАТУХАЮЩИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

Н. Н. Красовский

(Свердловск)

Рассматривается задача о построении стабилизирующего воздействия регулятора в линейной системе при случайных затухающих возмущениях. Это воздействие определяется из условия минимума математического ожидания интегральной квадратичной ошибки. Исследования обобщают результаты А. М. Летова [1]. Задача решается методом функций Ляпунова [2,3], модернизированным в соответствии с принципами динамического программирования Р. Беллмана [4]. Такой подход к задачам оптимального регулирования, основанный на понятии оптимальной функции Ляпунова, описан в статьях [5,6]. Автор считает своим долгом отметить, что при написании статьи он был знаком с исследованиями М. Е. Салуквадзе, посвященными задаче оптимальной среднеквадратичной стабилизации при постоянно действующих возмущениях.

§ 1. Постановка задачи. Рассмотрим регулируемую систему, описываемую уравнениями

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n + m_i\xi + \varphi_i(t,\eta) \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

где x_i — отклонения координат n-мерной векторной регулируемой величины x от заданных значений $x_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, ξ — стабилизирующее воздействие регулятора, $\varphi_i(t, \eta)$ — случайные возмущения. Эти величины $\varphi_i(t, \eta)$ будем считать функциями времени t и случайной r-мерной векторной переменной $\eta(t)$. В частности, может быть $n = r$, а компоненты вектора φ могут совпадать с компонентами $\eta(t)$. Примем, что случайная функция $\eta(t)$ описывает марковский вероятностный процесс с известной вероятностной переходной функцией ([7], стр. 232—247)

$$p[s, \alpha; t, B] = P[\eta(t) \in B / \eta(s) = \alpha]$$

допускающей разложение

$$p[s, \alpha; t, \{\alpha\}] = 1 - q(t, \alpha)(t - s) + o(t - s) \tag{1.2}$$

$$p[s, \alpha; t, B] = q(t, \alpha, B)(t - s) + o(t - s) \tag{1.3}$$

(α не принадлежит B)

Здесь α и B—соответственно r-мерные векторы и r-мерные борелевские множества; $s < t$ — моменты времени; символ $P[Q / L]$ обозначает вероятность события Q при условии L; $o(\Delta t)$ — бесконечно малая более высокого порядка, чем Δt.

В этой статье рассматривается задача о построении регулирующего воздействия (короче — управления) ξ, обеспечивающего асимптотическое приближение возмущенных движений, описываемых решениями системы (1.1), к заданному положению $x = 0$ (при $t \to \infty$).

Поэтому ограничимся случаем, когда возмущения φ_i (t, η) достаточно быстро убывают с ростом времени t. (Если при $t \to \infty$ возмущения φ_i (t, η) не затухают, то приближение движения x (t) (1.1) к точке $x = 0$ возможно лишь с точностью до некоторой неустранимой погрешности $\delta > 0$)$\cdot$

Обозначим символом $M[\zeta \,/\, L]$ математическое ожидание случайной величины ζ при условии L. Будем говорить, что возмущения φ_i ограничены и затухают в среднем, если можно указать функцию f $[t_0, t]$, определенную и непрерывную при $0 \leqslant t_0 \leqslant t$, такую, что выполняются условия

$$|f\,[t_0, t]| \leqslant N = \mathrm{const} \tag{1.4}$$

$$M\left[|\varphi_k\,(t, \eta)| \,/\, \eta\,(t_0) \text{ — любое}\right] \leqslant f\,[t_0, t] \quad (t \geqslant t_0) \tag{1.5}$$

$$f\,(t_0) = \int_{t_0}^{\infty} f\,[t_0, t]\,dt < \infty \tag{1.6}$$

$$\int_0^{\infty} f^2\,(t)\,dt < \infty, \qquad \lim f\,(t) = 0 \quad \text{при } t \to \infty \tag{1.7}$$

Примечание 1.1. В свете условий (1.4), (1.5) замечание о том, что может быть $\varphi = \eta$ (см. выше стр. 806) нуждается в уточнении; в этом случае переменная η может принимать лишь значения из области $\|\eta\| < N$, а символы α и B в (1.2) и (1.3) означают тогда векторы и подмножества из области $\|\eta\| < N$, соответственно (здесь и ниже символ $\|y\|$ означает евклидову норму вектора y, т. е.

$$\|y\| = (y_1^2 + \ldots + y_n^2)^{1/2})$$

Управляющее воздействие ξ (или короче — управление ξ) будем искать в виде функции $\xi = \xi\,[x, \eta, t]$. Это соответствует возможности измерения в процессе регулирования величин x_i (t) и η_k (t) с подачей соответствующих сигналов в регулятор, который работает здесь как идеальное звено [8].

Если функция ξ $[x, \eta, t]$ выбрана, то любые начальные условия x_0, η_0 (при $t = t_0$) порождают в силу уравнений (1.1) при $t \geqslant t_0$ вероятностный марковский процесс ([7], (стр. 72)) в пространстве $\{x, \eta\}$.

Не будем здесь в общем случае строго определять понятие решения стохастических уравнений (1.1). Ограничимся простыми случаями, когда определить вероятностное решение x (t) уравнений (1.1) можно без затруднений.

Именно будем предполагать, что функции φ_i (t, η) непрерывны по обоим аргументам и реализации $\eta^{(p)}$ (t) случайной функции η (t) являются кусочно-непрерывными функциями. (Условия, когда реализации $\eta^{(p)}$ (t) действительно обладают этим свойством, указаны, например, в книге ([7], стр. 242).)

При этом предположении в качестве реализаций вероятностного решения $\{x^{(p)}$ (t), $\eta^{(p)}$ $(t)\}$ системы (1.1) можно рассматривать в паре с реализациями $\eta^{(p)}$ (t) непрерывные функции $x^{(p)}$ (t), удовлетворяющие уравнениям (1.1) на участках постоянства $\eta^{(p)}$ (t). Марковскую вектор-функцию $\{x$ (t), η $(t)\}$, порожденную начальными условиями x_0, η_0 (при $t = t_0$) в силу уравнений (1.1), где $\xi = \zeta$, будем обозначать символом

$$\{x\,(t), \eta\,(t) \,/\, x_0, \eta_0;\ t_0;\ \zeta\}$$

Задача заключается в следующем. Требуется определить оптимальное управление ξ°, т. е. функцию $\xi^\circ[x, \eta, t]$, удовлетворяющую следующим условиям:

Условие 1.1. Каждая реализация $x^{(p)}(t)$ решения

$$\{x(t), \eta(t) / x_0, \eta_0, t_0; \xi^\circ\}$$

должна быть ограничена при $t_0 \leqslant t < \infty$ по модулю некоторой постоянной (зависящей от начальных условий $x_0 \in (-\infty, \infty)$, η_0, $t_0 \geqslant 0$), т. е.

$$\| x^{(p)}(t) \| \leqslant N(x_0, \eta_0, t_0) \tag{1.8}$$

Условие 1.2. Каково бы ни было начальное условие $\{x_0, \eta_0, t_0\}$, решение $\{x(t), \eta(t) / x_0, \eta_0, t_0; \xi^\circ\}$ должно при $t \to \infty$ асимптотически приближаться в среднеквадратичном к точке $x = 0$, т. е.

$$\lim M[\| x(t) \|^2 / x_0, \eta_0, t_0; \xi^\circ] = 0 \quad \text{при } t \to \infty \tag{1.9}$$

Условие 1.3. Для любого начального условия $\{x_0, \eta_0, t_0\}$ величина

$$J[x_0, \eta_0, t_0; \xi] = \int_{t_0}^{\infty} \mathrm{M}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2(t) + \xi^2(t)\right) / x_0, \eta_0, t_0; \xi\right] dt \tag{1.10}$$

должна быть при $\xi = \xi^\circ$ конечной и иметь при этом выборе управления ξ минимум относительно некоторого наперед заданного семейства функций $\{\xi\}$. В качестве класса допустимых функций $\{\xi\}$ в дальнейшем будем выбирать такое семейство функций $\{\xi[x, \eta, t]\}$, для которого можно определить решения уравнений (1.1) так, как это было описано выше (стр. 807), а также можно оперировать с вводимой ниже обобщенной производной функции Ляпунова. (Строгое рассмотрение этого вопроса увело бы в сторону от изучения основной задачи — построения оптимального управления ξ°. Во всяком случае при известной регулярности функций $p[s, \alpha; t, B]$ и $q_k(t, \eta)$ можно ограничиться семейством непрерывных допустимых функций $\{\xi[x, \eta, t]\}$, как это выводится из вида получаемого ниже решения ξ°.)

§ 2. Метод решения задачи. Пусть найдены функции $v(x, \eta, t)$ и $\xi^\circ[x, \eta, t]$, удовлетворяющие условиям:

Условие 2.1. Справедливо разложение

$$v(x, \eta, t) = v_2(x) + v_1(x, \eta, t) + v_0(\eta, t) \tag{2.1}$$

где

$$v_2(x) = \sum_{i, j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j, \qquad b_{ij} = \text{const} \tag{2.2}$$

— определенно положительная квадратичная форма, функция

$$v_1(x, \eta, t) = \sum_{i=1}^{n} b_i(\eta, t) x_i \tag{2.3}$$

— линейная форма, коэффициенты которой $b_i(\eta, t)$ удовлетворяют неравенствам

$$| b_i(\eta, t) | \leqslant N_1 = \text{const} \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.4}$$

и предельным соотношениям

$$\lim\ [b_i(\eta, t)] = 0 \quad \text{при } t \to \infty \qquad (t = 1, \ldots, n) \tag{2.5}$$

функция $v_0(\eta, t)$ удовлетворяет неравенству

$$|v_0(\eta, t)| \leqslant N_0 = \text{const} \tag{2.6}$$

и предельному соотношению

$$\lim \boldsymbol{M}\ [|v_0(\eta, t)|\ /\ \eta_0, t_0] = 0 \quad \text{при } t \to \infty \tag{2.7}$$

каковы бы ни были начальные условия η_0.

Условие 2.2. Обобщенная производная [6] функции v в силу уравнений (1.1) при $\xi = \xi^\circ$ $(d\boldsymbol{M}\{v\}\ /\ dt)_{\xi_0}$ удовлетворяет равенствам

$$\left(\frac{d\boldsymbol{M}\{v\}}{dt}\right)_{\xi_0} = -\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\xi^\circ)^2 \tag{2.8}$$

$$\min\left[\left(\frac{d\boldsymbol{M}\{v\}}{dt}\right)_{\xi} + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \xi^2\right] = \left(\frac{d\boldsymbol{M}\{v\}}{dt}\right)_{\xi^\circ} + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + (\xi^\circ)^2 \tag{2.9}$$

при всех значениях x, η и t.

Условие 2.3. Обобщенные производные $(d\boldsymbol{M}\{v_1\}\ /\ dt)_{\xi^\circ}$ и $d\boldsymbol{M}\{v_0\}\ /\ dt$ удовлетворяют неравенствам

$$\left|\left(\frac{d\boldsymbol{M}\{v_1\}}{dt}\right)_{\xi^\circ}\right| \leqslant N_1 \|x\|, \qquad \left|\frac{d\boldsymbol{M}\{v_0\}}{dt}\right| \leqslant N_0 \tag{2.10}$$

Тогда ξ° — оптимальное управление и

$$v(x_0, \eta_0, t_0) = J\ [x_0, \eta_0, t_0; \xi^\circ] \tag{2.11}$$

Докажем это утверждение. Выполнение условия 1.1 доказывается следующим образом.

Производная $(dv_2\ /\ dt)_{(1.1)}^{(p)}$ функции $v_2(x)$ в силу уравнений (1.1) для любой реализации $\eta^{(p)}(t)$ при достаточно больших значениях нормы $\|x\|$ будет определенно отрицательной функцией. Действительно, вследствие условий (2.10), а также вследствие ограниченности функций φ_i (условия (1.4), (1.5)) производные $(d\boldsymbol{M}\{v\}\ /\ dt)_{\xi^\circ}$ и $(dv_2\ /\ dt)_{(1.1)}^{(p)}$ будут отличаться одна от другой лишь на ограниченные функции времени t и случайной переменной η, а также на функции t, η и x, которые растут не быстрее $\|x\|$ с ростом $\|x\|$. Но тогда справедливость нашего утверждения об отрицательности $(dv_2\ /\ dt)_{(1.1)}^{(p)}$ следует из условия (2.8). Теперь ограниченность реализаций $x^{(p)}(t)$ доказывается с использованием функции $v_2(x)$ стандартными в теории устойчивости рассуждениями.

Проверим выполнение условия 1.2. Рассмотрим случайную функцию — решение

$$\{x(t), \eta(t)\ /\ x_0, \eta_0, t_0; \xi^\circ\}$$

Построим величину

$$V_t\ [\xi^\circ] = \boldsymbol{M}\ [v(x(t), \eta(t), t)\ /\ x_0, \eta_0, t_0; \xi^\circ] \tag{2.12}$$

и вычислим ее производную по времени t в момент $t = \tau$. Учитывая марковское свойство вектор-функции $\{x(t), \eta(t)\}$, можно написать

$$\left(\frac{dV_t[\xi^\circ]}{dt}\right)_{t=\tau} = \boldsymbol{M}\left[\left(\frac{d\boldsymbol{M}\{v(x(t), \eta(t), t) / x(\tau), \eta(\tau), \tau; \xi^\circ\}}{dt}\right)_{t=\tau} \Big/ x_0, \eta_0, t_0; \xi^\circ\right] =$$

$$= -\boldsymbol{M}[\|x(\tau)\|^2 + (\xi^\circ(\tau))^2 / x_0, \eta_0, t_0; \xi^\circ] \tag{2.13}$$

Интегрируя равенство (2.13) по τ от $\tau = t_0$ до $\tau = T > t_0$, получим равенство

$$V_T[\xi^\circ] - v(x_0, \eta_0, t_0) = -\int_{t_0}^{T} \boldsymbol{M}[\|x(\tau)\|^2 + (\xi^\circ(\tau))^2 / x_0, \eta_0, t_0; \xi^\circ]\, d\tau \tag{2.14}$$

При $T \to \infty$ величина $V_T[\xi^\circ]$ сходится к величине $\boldsymbol{M}[v_2(x(T)) / x_0, \eta_0, t_0; \xi^\circ]$ вследствие условий (2.5), (2.7) и ограниченности реализаций $x^{(p)}(t)$ (см. условие 1.1, справедливость выполнения которого доказана выше). Это означает, вследствие определенной положительности функции $v_2(x)$, что нижний предел первого слагаемого в левой части равенства (2.14) при $T \to \infty$ неотрицателен. Значит интеграл в правой части равенства (2.14) сходится при $T \to \infty$. Из сходимости этого интеграла в свою очередь заключаем, что

$$\varliminf_{\tau\to\infty} \boldsymbol{M}[\|x(\tau)\|^2 / x_0, \eta_0, t_0; \quad \xi^\circ] = 0$$

Так как квадратичная форма $v_2(x)$ удовлетворяет неравенству

$$v_2(x) \leqslant \lambda \|x\|^2 \quad (\lambda = \mathrm{const})$$

и равенству

$$\lim_{\tau\to\infty} \boldsymbol{M}[v_2(x(\tau)) / x_0, \eta_0, t_0; \xi^\circ] = \lim_{\tau\to\infty} \boldsymbol{M}[v(x(\tau), \eta(\tau), \tau) / x_0, \eta_0, t_0; \xi^\circ]$$

то окончательно убеждаемся в справедливости предельного соотношения

$$\lim V_T[\xi^\circ] = 0 \quad \text{при } T \to \infty$$

Существование этого предела вытекает из монотонности $V_t[\xi^\circ]$ по t $(dV_t / dt \leqslant 0)$.

Следовательно, справедливо равенство

$$v(x_0, \eta_0, t_0) = \int_{t_0}^{\infty} \boldsymbol{M}[\|x(\tau)\|^2 + (\xi^\circ(\tau))^2 / x_0, \eta_0, t_0; \xi^\circ]\, d\tau$$

которое и доказывает выполнение (2.11).

Заметим еще, что из выведенных выше предельных соотношений следует также выполнение условия 1.2, так как вследствие определенной положительности формы $v_2(x)$ справедливо неравенство $v_2(x) \geqslant \varepsilon \|x\|^2$ $(\varepsilon > 0 - \mathrm{const})$.

Осталось проверить выполнение условия 1.3. Предположим от противного, что это условие не выполняется и, следовательно, существует управление ξ^*, отличное от ξ° и являющееся оптимальным, причем для некоторого начального условия $\{x_0, \eta_0, t_0\}$ управление ξ^* дает неравенство

$$J[x_0, \eta_0, t_0; \xi^*] < J[x_0, \eta_0, t_0; \xi^\circ] \tag{2.15}$$

Покажем, что это предположение приводит к противоречию. Из условия (2.9) заключаем, что

$$\left(\frac{dM\{v\}}{dt}\right)_{\xi^*} \geqslant -\|x^2\| - (\xi^*)^2 \tag{2.16}$$

Вводя аналогично предыдущему величину $V_t\,[\xi^*]$ и интегрируя неравенство (2.16) аналогично тому, как это было сделано выше при рассмотрении равенства (2.8), получим неравенство

$$V_T[\xi^*] - v(x_0, \eta_0, t_0) \geqslant -\int_{t_0}^{\infty} M\,[\|x(\tau)\|^2 + (\xi^*(\tau))^2 / x_0, \eta_0, t_0;\ \xi^*]\,d\tau \tag{2.17}$$

Так как предполагается, что ξ^* — оптимальное управление, то норма $\|x^{(p)}(t)\|$ реализаций решения $\{x(t), \eta(t) / x_0, \eta_0, t_0;\ \xi^*\}$ должна быть ограничена. Следовательно, как и выше, можно убедиться в справедливости предельного соотношения

$$\lim V_T\,[\xi^*] = \lim M\,[v_2(x(T)) / x_0, \eta_0, t_0;\ \xi^*]$$

при $T \to \infty$, если предел справа существует. Но из этого соотношения вследствие условия 1.2 и из неравенства $v_2(x) \leqslant \lambda\|x\|^2$ заключаем, что при $T \to \infty$ первое слагаемое в левой части (2.17) сходится к нулю. По условию 1.3 интеграл в правой части (2.17) должен сходиться, поэтому из (2.17) предельным переходом при $T \to \infty$ выводится неравенство

$$\int_{t_0}^{\infty} M\,[\|x(\tau)\|^2 + (\xi(\tau)^*)^2 / x_0, \eta_0, t_0; \xi^*]\,d\tau \geqslant v(x_0, \eta_0, t_0)$$

т. е.

$$J\,[x_0, \eta_0, t_0;\ \xi^*] \geqslant v(x_0, \eta_0, t_0)$$

Последнее неравенство противоречит нашему предположению (2.15) и равенству (2.11). Противоречие доказывает утверждение о выполнении для ξ° условия 1.3.

Итак, задача построения оптимального управления $\xi^\circ\,[x, \eta, t]$ сводится к проблеме отыскания функций v и ξ°, удовлетворяющих условиям 2.1—2.3.

§ 3. Построение оптимального управления ξ°. В этом параграфе выясняются условия разрешимости задачи и устанавливается вид оптимального управления ξ°. Запишем в развернутой форме уравнение (2.8) для функции v, которую будем называть оптимальной функцией Ляпунова.

Для этого необходимо знать выражение производной $(dM\{v\}/dt)_\xi$ через параметры системы (1.1) и вероятностные характеристики случайной функции $\eta(t)$. Имеем

$$\frac{dM\{v\}}{dt} = \frac{dM\{v_2\}}{dt} + \frac{dM\{v_1\}}{dt} + \frac{dM\{v_0\}}{dt}$$

Вычислим производную $dM\{v_1\} / dt$. Это вычисление проведем аналогично тому, как это было сделано в статье [6]. Имеем

$$dM\{v_1\} / dt = \lim\,[\Delta M\{v_1\} / \Delta t] \quad \text{при } \Delta t \to +0$$

Подсчитаем $\Delta M\{v_1\}$. Пренебрегая бесконечно малыми высшего порядка по Δt, можно считать, что на интервале Δt могут произойти два взаимно противоположных события:

1) событие D — величина η сохранит свое значение, т. е.

$$\eta(t+\Delta t)=\eta(t)=\alpha$$

2) событие D^{-1} — величина $\eta(t)$ меняет свое значение один раз.

Согласно (1.2) вероятность события D такова: $P[D]\approx 1-q(\eta, t)\Delta t$, а вероятность противоположного события: $P[D^{-1}]\approx q(\eta, t)\Delta t$.

Событие D^{-1} можно разбить на конечное число событий $D_1^{-1},\ldots,D_m^{-1}$, где событие D_k^{-1} $(k<m)$ заключается в том, что величина $\eta(\tau)$ на интервале $t<\tau\leqslant t+\Delta t$ будет менять свое значение один раз $(\eta(t+\Delta t)\neq\eta(t))$, причем $\eta(t+\Delta t)\in B_k=(\beta_{k-1}, \beta_k]$ (или $\eta(t+\Delta t)\in B_m=(\beta_{m-1}, \beta_m)$ при $k=m$), где $\{\beta_k\}$ — последовательность возрастающих чисел, $\beta_0=-\infty$, $\beta_m=\infty$.

(Заметим, что здесь рассматривается случай скалярной переменной $\eta(t)$; в общем случае рассуждения аналогичны.)

Согласно (1.3) вероятность

$$P[D_k^{-1}]\approx q(t, \alpha, B_k)\Delta t$$

Если ввести функцию распределения $\gamma(t, \alpha, \beta)=q(t, \alpha, B(\beta))$, где $B(\beta)$ — полуинтервал $(-\infty, \beta]$ с вычетом α, то,

$$P[D_k^{-1}]\approx[\gamma(t, \alpha, \beta_k)-\gamma(t, \alpha, \beta_{k-1})]\Delta t$$

Имеем равенство

$$\Delta M\{v_1\}=\Delta_D v_1 P[D]+\sum_{k=1}^{m}\Delta_k v_1 P[D_k^{-1}] \tag{3.1}$$

где $\Delta_D v_1$ — изменение v_1 в случае, если реализуется событие D; $\Delta_k v_1$ — изменение v_1 при реализации события D_k^{-1}. В случае, если реализовалось событие D, уравнения (1.1) можно рассматривать на интервале Δt как обыкновенные дифференциальные уравнения и для вычисления $\Delta_D v_1$ можно воспользоваться формулой конечных приращений, как это делается в классическом случае. При реализации D_k^{-1} полагаем $\Delta_k v_1\approx\approx v_1(x, \beta, t)-v_1(x, \eta, t)$, где $\beta\in B_k$. Подставляя в равенство (3.1) вероятности $P[D]$ и $P[D_k^{-1}]$ и переходя к пределу при $\Delta t\to 0$ и при неограниченном увеличении числа m делений β_k

$$(\beta_k-\beta_{k-1}\to 0\ (k=2,\ldots, m-1))$$

получим в точке (x, η, t)

$$\left(\frac{dM\{v_1\}}{dt}\right)_{(x,\eta,t)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v_1(x, \eta, t)}{\partial x_i}\left[\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+m_i\xi[x, \eta, t]+\varphi_i(t, \eta)\right]+$$
$$+\frac{\partial v_1}{\partial t}+\int_{-\infty}^{\infty}v_1(x, \beta, t)\,d_\beta\gamma(t, \eta, \beta)-v_1(x, \eta, t)\,q(t, \eta) \tag{3.2}$$

Здесь интеграл имеет смысл интеграла Стильтьеса, символ $q(t, \eta)$ обозначает величину $\gamma(t, \eta, \infty)$.

Производная $dM\{v_2\}/dt$ сводится просто к производной $(dv_2/dt)_{(1.1)}$ (при $\eta = \text{const}$), так как v_2 явно от величины η не зависит.

Поэтому

$$\left(\frac{dM\{v_2\}}{dt}\right)_{(x,\eta,t)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_2(x)}{\partial x_i}\left[\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j + m_i\xi\,[x, \eta, t] + \varphi_i(t, \eta)\right] \tag{3.3}$$

Учитывая (3.1), (3.2) и (3.3), можно записать уравнение (2.8) в развернутой форме

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial v_2(x)}{\partial x_i} + \frac{\partial v_1(x, \eta, t)}{\partial x_i}\right)\left[\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j + m_i\xi\,[x, \eta, t] + \varphi_i(t, \eta)\right] + \frac{\partial v_1}{\partial t} +$$
$$+ \int_{-\infty}^{\infty} v_1(x, \beta, t)\, d_\beta\, \gamma(t, \eta, \beta) - v_1(x, \eta, t)\, q(t, \eta) +$$
$$+ \frac{dM\{v_0(\eta, t)\}}{dt} + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \xi^2\,[x, \eta, t) = 0 \tag{3.4}$$

Составим теперь уравнение, соответствующее условию (2.9). Согласно этому условию левая часть равенства (3.4) при $\xi = \xi^\circ$ должна иметь минимум. Поэтому искомое второе уравнение для v и ξ° получается из (3.4) дифференцированием (варьированием) этого равенства по ξ.

Имеем

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial v_2(x)}{\partial x_i} + \frac{\partial v_1(x, \eta, t)}{\partial x_i}\right] m_i + 2\xi\,[x, \eta, t] = 0 \tag{3.5}$$

Обсудим эти уравнения. Допустим, что уравнения (3.4) и (3.5) имеют решение v_2, v_1 и v_0 такого вида, как это описано выше в условиях 2.1. Тогда из (3.5) следует, что оптимальное управление

$$\xi^\circ[x, \eta, t] = -\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial v_2(x)}{\partial x_i} + \frac{\partial v_1(x, \eta, t)}{\partial x_i}\right] m_i\right) \tag{3.6}$$

складывается из линейной функции

$$\xi_1^\circ = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_2(x)}{\partial x_i} m_i = \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j \qquad (\mu_j = \text{const}) \tag{3.7}$$

и случайного слагаемого — в виде функции

$$\xi_*^\circ = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_1(x, \eta, t)}{\partial x_i} m_i = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} b_i(\eta, t)\, m_i \tag{3.8}$$

Покажем, что при некоторых известных условиях задача действительно разрешима в форме (3.6). Подставим величину ξ° (3.6) в равенство (3.4). Полученному уравнению можно удовлетворить, приравнивая члены одинакового измерения по x_i. Выпишем уравнения, которые получаются этим путем

$$(x^2) \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v^2(x)}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right) - \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_2(x)}{\partial x_i} m_i\right)^2 = -\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \tag{3.9}$$

$$(x^1) \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_1(x, \eta, t)}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - \frac{1}{2} m_i \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v_2(x)}{\partial x_j} m_j\right) + \frac{\partial v_1}{\partial t} + \tag{3.10}$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} v_1(x, \eta, t)\, d_\beta \gamma(\eta, \beta, t) - q(t, \eta)\, v_1(x, \eta, t) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_2(x)}{\partial x_i} \varphi_i(t, \eta)$$

$$(x^0) \quad \frac{dM\{v_0\}}{dt} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_1(x, \eta, t)}{\partial x_i} \varphi_i(\eta, t) + \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_1(x, \eta, t)}{\partial x_i} m_i\right)^2 \tag{3.11}$$

Рассмотрим уравнение (3.9). Это уравнение имеет тот же вид, что и уравнение для оптимальной функции Ляпунова V, выведенное в работе [1], где исследовалась задача о построении оптимального управления ξ° при отсутствии возмущений $\varphi_i(t, \eta)$. Необходимые и достаточные условия разрешимости этого уравнения в виде определенно положительной квадратичной формы были выяснены Ф. М. Кирилловой [9]. Приведем здесь для полноты изложения эти условия. Уравнение (3.9) имеет решение в виде определенно положительной квадратичной формы $v_2(x)$ тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие.

Условие 3.1. Линейное подпространство n-мерного векторного пространства, порожденное векторами $m, Am, \ldots, A^{n-1}m$, содержит в себе все корневое подпространство матрицы A, соответствующее собственным значениям λ_k с неотрицательной действительной частью; здесь A — матрица коэффициентов a_{ij}, а m — вектор $\{m_i\}$.

В частности, достаточным условием разрешимости уравнения (3.9) в виде определенно положительной формы $v_2(x)$ будет линейная независимость векторов $m, Am, \ldots, A^{n-1}m$. В дальнейшем примем, что условие 3.1 выполняется.

Пусть функция $v_2(x)$ из уравнения (3.9) найдена. Тем самым определяется из условия (3.7) линейная часть ξ_1° оптимального управления ξ°. Подставляя ξ_1° в уравнение (1.1) вместо ξ, получим некоторую вспомогательную линейную систему уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n - \frac{1}{2} \quad {}_i\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v_2(x)}{\partial x_j} m_j \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{3.12}$$

Очевидно, решения системы (3.12) асимптотически устойчивы, так как функция $v_2(x)$ определенно положительна, а производная ее $(dv_2/dt)_{(3.12)}$ в силу системы уравнений (3.12) определенно отрицательна, как это следует из (3.9), т. е. выполнены все условия теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости ([2]) стр. 90).

Рассмотрим уравнение (3.10). Это уравнение удобно истолковать следующим образом.

В левой части уравнения (3.10) стоит величина, равная обобщенной производной $(dM\{v_1\} / dt)_{(3.12)}$ функции v_1 в силу уравнений (3.12), т. е.

имеем

$$\left(\frac{dM\{v_1\}}{dt}\right)_{(3.12)} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_2(x)}{\partial x_i} \varphi_i(t, \eta) \tag{3.13}$$

Но при таком истолковании уравнения (3.10) нетрудно проверить, что это уравнение имеет решение в виде линейной формы (2.3), удовлетворяющей условиям (2.4) и (2.5). В самом деле форму $v_1(x, \eta, t)$ можно определить формулой

$$v_1(x, \eta, t) = \int_t^{\infty} M\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_2(x(\tau))}{\partial x_i} \varphi_i(\tau, \eta(\tau))/x, \eta, t;\ (3.12)\right] d\tau \tag{3.14}$$

где скобки (3.12) в условиях математического ожидания M под знаком интеграла (3.14) говорят о том, что $x(\tau)$ — решение системы (3.12), отвечающее начальному условию x при $\tau = t$. Проверим выполнение условий (2.3), (2.4) и (2.5) для функции v_1, определенной равенством (3.14). Для того чтобы установить линейность функции v_1 (3.14), распишем это выражение подробнее. Если обозначить символом $F(t)$ фундаментальную матрицу решений системы (3.12) ($F(0) = E$ — единичная матрица), то

$$\frac{\partial v_2(x(\tau))}{\partial x_i} = 2\sum_{j=1}^{n} b_{ij} \{F(\tau - t)x\}_j$$

где $\{F(\tau - t)x\}_j$ — j-я строка произведения матрицы $F(\tau - t)$ на вектор x. Теперь равенство (3.14) можно записать так:

$$v_1(x, \eta, t) = 2\int_t^{\infty} \left\{\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij} \{F(\tau - t)x\}_j\right) M[\varphi_i(\tau, \eta(\tau)) / \eta(t), t]\right\} d\tau \tag{3.15}$$

Так как $F(t)$ — фундаментальная матрица решений асимптотически устойчивой системы (3.12), то элементы этой матрицы с ростом времени t должны сходиться к нулю, причем

$$\|F(t)\| \leqslant N_F e^{-\alpha t} \qquad (t \geqslant 0,\ \alpha > 0,\ N_F - \text{const}) \tag{3.16}$$

где $\|F\|$ — норма матрицы F.

Из условий (1.4), (1.5) и (3.16) заключаем, что несобственный интеграл (3.15) в правой части (3.15) сходится абсолютно, причем v_1 — линейная функция координат x_i с ограниченными коэффициентами

$$b_k(\eta, t) = 2\int_t^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n} \left[b_{ij} \sum_{j=1}^{n} F_{jk}(\tau - t)\right] M[\varphi_i(\tau, \eta(\tau)) / \eta, t]\right] d\tau$$

$$(k = 1, \ldots, n) \tag{3.17}$$

Здесь F_{kj} — элементы матрицы F. Эти коэффициенты в силу условий (1.5), (1.6) и (3.16) удовлетворяют неравенствам

$$|b_k(\eta, t)| \leqslant 2\int_t^{\infty} nN_F Bf[t, \tau] e^{-\alpha(\tau - t)} d\tau < 2nBN_F f(t) \tag{3.18}$$

$$(B = \|b_{ij}\|,\quad k = 1, \ldots, n)$$

Из этих неравенств следует вследствие (1.7) выполнение условия (2.5). Теперь осталось лишь проверить, что функция $v_1(x, \eta, t)$ удовлетворяет уравнению (3.13). Проверим это. Вычислим производную $(dM\{v_1\}/dt)_{(3.12)}$ для функции v_1 (3.15). Имеем, учитывая, что в выражении для v_1 величина $x(t)$ — решение системы (3.12), $\eta(t)$ — марковская случайная функция

$$\left(\frac{dM\{v_1\}}{dt}\right)_{(3.12)} =$$

$$= \frac{d}{dt} 2M\left\{\int_t^\infty \left[\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n b_{ij}\{F(\tau - t)x\}_j\right) M[\varphi_i(\tau, \eta(\tau)) / \eta(t), t]\right] d\tau\right\} =$$

$$= -2\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij}x_j(t)\varphi_i(t, \eta(t)) +$$

$$+ 2\int_t^\infty \left[\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n b_{ij}\frac{\partial}{\partial t}\{F(\tau - t)x(t)\}_j\right) M[\varphi_i(\tau, \eta(\tau)) / \eta(t), t]\right] d\tau +$$

$$+ 2\int_t^\infty \left[\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n b_{ij}\{F(\tau - t)x\}_j\right) \frac{\partial M[M[\varphi_i(\tau, \eta(\tau)) / \eta(t), t]]}{dt}\right] d\tau \qquad (3.19)$$

В последнем равенстве два последних слагаемых равны нулю. Действительно, $x(t) = F(t)c$ (c — постоянный вектор), т. е.

$$\frac{\partial}{\partial t}[F(\tau - t)x(t)] = \frac{\partial}{\partial t}[F(\tau - t)F(t)c] = \frac{\partial}{\partial t}[F(\tau)c] = 0.$$

Точно так же

$$\frac{\partial}{\partial t} M[M[\varphi_i(\tau, \eta(\tau)) / \eta(t), t]] =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\{M[M[\varphi_i(\tau, \eta(\tau)) / \eta(t + \Delta t), t + \Delta t] / \eta(t), t] -$$

$$- M[\varphi_i(\tau, \eta(\tau)) / \eta(t), t]\} = 0$$

так как вследствие марковского свойства функции $\eta(t)$ выражение в фигурных скобках равно нулю. Следовательно, функция v_1 (3.15) действительно удовлетворяет уравнению (3.13). Эта функция удовлетворяет также, очевидно, и условию (2.10).

Примечание 3.1. Из равенства (3.15) следует, что для вычисления функции $v_1(x, \eta, t)$ достаточно знать функции

$$M_i(\eta, t, \tau) = M[\varphi_i(\tau, \eta(\tau)) / \eta, t] \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

т. е. достаточно в каждый момент t иметь прогноз о будущих средних значениях возмущений $\varphi_i(\tau, \eta(\tau))$ $(\tau > t)$ на основании информации о реализовавшихся значениях $\eta(t) = \eta$.

Рассмотрим уравнение (3.11). Это уравнение имеет решение $v_0(\eta, t)$, которое следует писать в форме

$$v_0(\eta, t) = \int_t^\infty M\left[\left\{\sum_{i=1}^n [b_i(\eta(\tau), \tau)\varphi_i(\tau, \eta(\tau))] -\right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^n b_i(\eta(\tau), \tau) m_i\right)^2\right\} / \eta, t\right] d\tau$$

Проверка того, что функция v_0 (3.20) удовлетворяет уравнению (3.11), а также проверка условий (2.6), (2.7) и второго условия (2.11) проводится с учетом условий (1.3)—(1.6) аналогично тому, как это было сделано выше при рассмотрении функции v_1. Эту проверку поэтому здесь опустим.

Итак, приходим к выводу, что при выполнении условия 3.1 существуют функции v и ξ°, удовлетворяющие условиям 2.1—2.3, т. е. при этих условиях задача разрешима. Сформулируем полученный результат.

Задача о построении оптимального управляющего воздействия $\xi^\circ[x, \eta, t]$, минимизирующего среднеквадратичную ошибку

$$J = \int_{t_0}^{\infty} M\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2(t) + \xi^2(t)\right] dt$$

в системе (1.1) при случайных ограниченных и затухающих возмущениях $\varphi_i(t, \eta)$ разрешима тогда (и только тогда), когда выполняется условие 3.1. Оптимальное управление ξ° должно формироваться в виде

$$\xi^\circ = \xi_1^\circ + \xi_*^\circ(\eta, t) \qquad \left(\xi_1^\circ = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i\right)$$

Слагаемое ξ_1° совпадает с оптимальным управлением, которое получается при решении аналогичной задачи, но при отсутствии возмущений. Случайное слагаемое $\xi_*^\circ(\eta, t)$ учитывает наличие случайных возмущений $\varphi_i(t, \eta)$. Это слагаемое формируется в каждый момент времени t на основании информации о реализовавшихся значениях $\eta(t)$, но расчетные формулы, определяющие ξ_*°, предполагают известным прогноз о будущих средних значениях возмущений $\varphi_i(\tau, \eta)$ $(\tau > t)$.

Поступила 19 VI 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Летов А. М. Аналитическое конструирование регуляторов. IV метод динамического программирования. Автоматика и телемеханика. 1961, т. XXII, вып. 4.
2. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.— Л., Гостехиздат, 1950.
3. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. М., Гостехиздат, 1956.
4. Беллман Р. Динамическое программирование. ИИЛ, 1956.
5. Красовский Н. Н. Об оптимальном управлении при случайных возмущениях. ПММ, 1960, т. XXV, вып. 1.
6. Красовский Н. Н., Лидский Э. А. Аналитическое конструирование регуляторов в стохастических системах при ограничениях на скорость изменения управляющего воздействия. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 3.
7. Дуб Дж. Вероятностные процессы. ИИЛ, 1956.
8. Попов Е. П. Динамика систем автоматического регулирования. Гостехиздат, 1954.
9. Кириллова Ф. М. К задаче об аналитическом конструировании регуляторов. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 3.