Прикладная математика и механика. Том XXV, 1961
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

О ПРИВОДИМОСТИ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ГИРОГОРИЗОНТКОМПАСА

В. Н. Кошляков

(Москва)

В работе показывается, что уравнения возмущенного движения гирогоризонткомпаса, данные в работе [1], допускают приведение к системе с постоянными коэффициентами.

Дается строгое аналитическое обоснование перехода к упрощенным уравнениям Геккелера. Рассматривается также влияние внешней периодической силы.

1. Уравнения возмущенного движения пространственного гирокомпаса Геккелера—Аншютца [1] имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{V\alpha}{\sqrt{gR}} - \nu\beta = \Omega\frac{2B\sin\varepsilon^\circ}{ml\sqrt{gR}}\delta, \qquad \frac{d\beta}{dt} + \nu\frac{V\alpha}{\sqrt{gR}} = \Omega\gamma$$
$$\frac{d\gamma}{dt} + \nu\frac{2B\sin\varepsilon^\circ}{ml\sqrt{gR}}\delta = -\Omega\beta, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{2B\sin\varepsilon^\circ}{ml\sqrt{gR}}\delta\right) - \nu\gamma = -\Omega\frac{V\alpha}{\sqrt{gR}} \tag{1.1}$$

Здесь

$$V = \sqrt{(Ru\cos\varphi + v_E)^2 + v_N{}^2} \tag{1.2}$$
$$\Omega = u\sin\varphi + \frac{v_E}{R}\operatorname{tg}\varphi + \frac{d\alpha^*}{dt} \qquad \left(\alpha^* = \frac{v_N}{Ru\cos\varphi + v_E}\right)$$

Предполагая, что корабль совершает маневрирование по произвольному закону на данной фиксированной широте φ, перейдем в системе (1.1) к новым переменным x_1 и x_4, полагая

$$\alpha = \frac{Ru\cos\varphi}{V}x_1, \qquad \delta = \frac{\sin\varphi}{\sin\varepsilon^\circ}x_4 \tag{1.3}$$

причем ε° удовлетворяет условию

$$\varepsilon^\circ = \arccos\frac{mlV}{2B} \tag{1.4}$$

Обозначим также β и γ соответственно через x_2 и x_3. Получаем следующую систему:

$$\dot x_1 = \frac{\nu^2}{u\cos\varphi}x_2 + \lambda\Omega\operatorname{tg}\varphi x_4, \qquad \dot x_3 = -\Omega x_2 - \frac{\nu^2 2B\sin\varphi}{Pl}x_4 \tag{1.5}$$
$$\dot x_2 = -u\cos\varphi x_1 + \Omega x_3, \qquad \dot x_4 = -\frac{1}{\lambda}\Omega\operatorname{ctg}\varphi x_1 + \frac{Pl}{2B\sin\varphi}x_3$$

где

$$\lambda = \frac{2Bg}{PlRu} \tag{1.6}$$

Если в системе (1.5) пренебречь слагаемыми, содержащими в качестве множителя угловую скорость Ω, то она распадается на две независимые системы вида

$$\dot{x}_1 = \frac{\nu^2}{u\cos\varphi}x_2, \quad \dot{x}_2 = -u\cos\varphi x_1, \quad \dot{x}_3 = -\frac{\nu^2 2B\sin\varphi}{Pl}x_4, \quad \dot{x}_4 = \frac{Pl}{2B\sin\varphi}x_3 \tag{1.7}$$

определяющие гармонические незатухающие колебания компаса с круговой частотой ν.

Упрощенные уравнения (1.7), впервые полученные, по-видимому, Геккелером [2], лежат в основе большинства работ и руководств по теории гирогоризонткомпаса.

2. Перейдем в системе (1.5) к новым переменным при помощи неособенной подстановки вида

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= x_1\cos\theta - \frac{\nu}{u\cos\varphi}x_2\cos\theta + \frac{\nu}{u\cos\varphi}x_3\sin\theta - \lambda\operatorname{tg}\varphi x_4\sin\theta\\
\xi_2 &= \frac{u\cos\varphi}{\nu}x_1\cos\theta + x_2\cos\theta - x_3\sin\theta - \frac{\nu 2B\sin\varphi}{Pl}x_4\sin\theta\\
\xi_3 &= \frac{u\cos\varphi}{\nu}x_1\sin\theta + x_2\sin\theta + x_3\cos\theta + \frac{\nu 2B\sin\varphi}{Pl}x_4\cos\theta\\
\xi_4 &= \frac{1}{\lambda}\operatorname{ctg}\varphi x_1\sin\theta - \frac{Pl}{\nu 2B\sin\varphi}x_2\sin\theta - \frac{Pl}{\nu 2B\sin\varphi}x_3\cos\theta + x_4\cos\theta
\end{aligned} \tag{2.1}$$

где

$$\theta(t) = \int_0^t \Omega(\tau)\,d\tau \tag{2.2}$$

В результате придем к системе уравнений относительно ξ_k, которая распадается на две независимые системы с постоянными коэффициентами и имеет ту же структуру, что и система (1.7), а именно

$$\dot{\xi}_1 = \frac{\nu^2}{u\cos\varphi}\xi_2, \quad \dot{\xi}_2 = -u\cos\varphi\xi_1, \quad \dot{\xi}_3 = -\frac{\nu^2 2B\sin\varphi}{Pl}\xi_4, \quad \dot{\xi}_4 = \frac{Pl}{2B\sin\varphi}\xi_3 \tag{2.3}$$

Система (1.5), таким образом, приводима к системе Геккелера (1.7)

Укажем формулы обратного преобразования от переменных ξ_k к переменным x_k, которые понадобятся нам в дальнейшем. Имеем

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{2}\left(\xi_1\cos\theta + \frac{\nu}{u\cos\varphi}\xi_2\cos\theta + \frac{\nu}{u\cos\varphi}\xi_3\sin\theta + \lambda\operatorname{tg}\varphi\xi_4\sin\theta\right)\\
x_2 &= \frac{1}{2}\left(-\frac{u\cos\varphi}{\nu}\xi_1\cos\theta + \xi_2\cos\theta + \xi_3\sin\theta - \frac{\nu 2B\sin\varphi}{Pl}\xi_4\sin\theta\right)\\
x_3 &= \frac{1}{2}\left(\frac{u\cos\varphi}{\nu}\xi_1\sin\theta - \xi_2\sin\theta + \xi_3\cos\theta - \frac{\nu 2B\sin\varphi}{Pl}\xi_4\cos\theta\right)\\
x_4 &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\lambda}\operatorname{ctg}\varphi\,\xi_1\sin\theta - \frac{Pl}{\nu 2B\sin\varphi}\xi_2\sin\theta + \frac{Pl}{\nu 2B\sin\varphi}\xi_3\cos\theta + \xi_4\cos\theta\right)
\end{aligned} \tag{2.4}$$

3. Допустим, что корабль совершает последовательные циркуляции с постоянной скоростью v и круговой частотой на данной широте φ, начинающиеся, например, с северного курса.

Тогда, как показано в работе [3], можно полагать, что

$$\Omega \approx -\mu\omega\sin\omega t \qquad \left(\mu = \frac{v}{Ru\cos\varphi}\right) \tag{3.1}$$

В этом предположении система (1.5) будет (3.2)

$$\dot{x}_1 = \frac{\nu^2}{u\cos\varphi}x_2 - \lambda\mu\omega \operatorname{tg}\varphi \sin\omega t x_4, \quad \dot{x}_3 = \mu\omega\sin\omega t x_2 - \frac{\nu^2 2B\sin\varphi}{Pl}x_4$$

$$\dot{x}_2 = -u\cos\varphi x_1 - \mu\omega\sin\omega t x_3, \quad \dot{x}_4 = \frac{1}{\lambda}\mu\omega \operatorname{ctg}\varphi\sin\omega t x_1 + \frac{Pl}{2B\sin\varphi}x_3$$

Система, сопряженная с (3.2), имеет вид (3.3)

$$\dot{y}_1 = u\cos\varphi y_2 - \frac{1}{\lambda}\mu\omega\operatorname{ctg}\varphi\sin\omega t y_4, \quad \dot{y}_3 = \mu\omega\sin\omega t y_2 - \frac{Pl}{2B\sin\varphi\nu}y_4$$

$$\dot{y}_2 = -\frac{\nu^2}{u\cos\varphi}y_1 - \mu\omega\sin\omega t y_3, \quad \dot{y}_4 = \lambda\mu\omega\operatorname{tg}\varphi\sin\omega t y_1 + \frac{\nu^2 2B\sin\varphi}{Pl}y_3$$

Введением переменных [1] (3.4)

$$w_1(t) = \frac{\nu}{u\cos\varphi}y_1 + iy_2, \quad w_2(t) = y_3 - i\frac{Pl}{2B\sin\varphi\nu}y_4 \quad (i = \sqrt{-1})$$

преобразуем систему (3.3) в легко интегрируемую систему двух уравнений первого порядка.

Если $y_i(t)$ — какое-либо решение системы (3.3), то, как известно [4], выражение $y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_3 + y_4x_4$ будет первым интегралом системы (3.2). Пользуясь формулами (3.4) и удовлетворяя в решениях системы (3.3) начальным условиям

$$y_{ik}(0) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & (j = k) \\ 0 & (j \neq k) \end{cases}$$

составим явные выражения для четырех независимых первых интегралов системы (3.2). В результате получим

$$x_1\cos\nu t\cos\theta - \frac{\nu}{u\cos\varphi}x_2\sin\nu t\cos\theta + \frac{\nu}{u\cos\varphi}x_3\sin\nu t\sin\theta - \lambda\operatorname{tg}\varphi\, x_4\cos\nu t\sin\theta = C_1$$

$$\frac{u\cos\varphi}{\nu}x_1\sin\nu t\cos\theta + x_2\cos\nu t\cos\theta - x_3\cos\nu t\sin\theta - \frac{\nu 2B\sin\varphi}{Pl}x_4\sin\nu t\sin\theta = C_2$$

$$\frac{u\cos\varphi}{\nu}x_1\sin\nu t\sin\theta + x_2\cos\nu t\sin\theta + x_3\cos\nu t\cos\theta + \frac{\nu 2B\sin\varphi}{Pl}x_4\sin\nu t\cos\theta = C_3$$

$$\frac{1}{\lambda}\operatorname{ctg}\varphi\, x_1\cos\nu t\sin\theta - \frac{Pl}{\nu 2B\sin\varphi}x_2\sin\nu t\sin\theta - \frac{Pl}{\nu 2B\sin\varphi}x_3\sin\nu t\cos\theta + x_4\cos\nu t\cos\theta = C_4$$

Здесь согласно (2.2) и (3.1) в случае циркуляции следует считать

$$\theta(t) = \mu(\cos\omega t - 1) \tag{3.5}$$

Отсюда уже ясно, что в качестве линейной подстановки с периодическими коэффициентами, приводящей систему (3.2) к системе с постоянными коэффициентами (2.3), следует взять выражения (2.1), где $\theta(t)$ удовлетворяет формуле (3.5).

Корни характеристических уравнений преобразованной системы (2.3) являются, как известно, характеристическими показателями системы (3.2). Обозначая последние через $\varkappa_s$ $(s = 1, 2, 3, 4)$, получаем

$$\varkappa_{1,2} = \pm\nu i, \quad \varkappa_{3,4} = \pm\nu i \tag{3.6}$$

4. Применим изложенную теорию для изучения влияния внешнего периодического возмущения.

Рассмотрим неоднородную систему

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \frac{\nu^2}{u\cos\varphi}x_2 - \lambda\mu\,\omega\,\operatorname{tg}\varphi\sin\omega t x_4 \\
\dot{x}_2 &= -u\cos\varphi x_1 - \mu\omega\sin\omega t x_3 + F(t) \\
\dot{x}_3 &= \mu\omega\sin\omega t x_2 - \frac{\nu^2 B\sin\varphi}{Pl}x_4 \\
\dot{x}_4 &= \frac{1}{\lambda}\mu\omega\operatorname{ctg}\varphi\sin\omega t x_1 + \frac{Pl}{2B\sin\varphi}x_3
\end{aligned} \qquad (4.1)$$

и пусть

$$F(t) = a\cos\omega t \qquad (a > 0) \qquad (4.2)$$

Перейдя согласно (2.1) к переменным ξ_k, получим две независимые системы вида (4.3)

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_1 &= \frac{\nu^2}{u\cos\varphi}\xi_2 - \frac{\nu}{u\cos\varphi}F(t)\cos\theta(t), & \dot{\xi}_3 &= -\frac{\nu^2 2B\sin\varphi}{Pl}\xi_4 + F(t)\sin\theta(t) \\
\dot{\xi}_2 &= -u\cos\varphi\,\xi_1 + F(t)\cos\theta(t), & \dot{\xi}_4 &= \frac{Pl}{2B\sin\varphi}\xi_3 - \frac{Pl}{\nu 2B\sin\varphi}F(t)\sin\theta(t)
\end{aligned}$$

где θ — по-прежнему удовлетворяет формуле (3.5).

Будем считать далее, что $\mu \ll {}^1/_2$; тогда можно положить $\sin\theta \approx \theta$, $\cos\theta \approx 1$, и система (4.3) будет

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_1 &= \frac{\nu^2}{u\cos\varphi}\xi_2 - \frac{\nu}{u\cos\varphi}F(t), & \dot{\xi}_3 &= -\frac{\nu^2 2B\sin\varphi}{Pl}\xi_4 + F(t)\theta(t) \\
\dot{\xi}_2 &= -u\cos\varphi\xi_1 + F(t), & \dot{\xi}_4 &= \frac{Pl}{2B\sin\varphi}\xi_3 - \frac{Pl}{\nu 2B\sin\varphi}F(t)\,\theta(t)
\end{aligned} \qquad (4.4)$$

Важно отметить, что в рассматриваемом случае слагаемое $F(t)\,\theta(t)$ имеет постоянную составляющую.

Действительно, согласно (3.5) и (4.2)

$$F(t)\,\theta(t) = \mu a\cos\omega t(\cos\omega t - 1) = \frac{\mu a}{2} + \frac{\mu a}{2}\cos 2\omega t - \mu a\cos\omega t \qquad (4.5)$$

Эта постоянная составляющая, выражаемая первым слагаемым в формуле (4.5), оказывает существенное влияние на показания гирокомпаса.

Перейдем к интегрированию системы (4.4). Имеем из первых двух уравнений этой системы с учетом формулы (4.2) и начальных условий $\xi_1(0) = 0$, $\xi_2(0) = 0$ следующие решения:

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \frac{\nu^2 a}{(\nu^2 - \omega^2)u\cos\varphi}\left(\cos\omega t - \cos\nu t + \frac{\omega}{\nu}\sin\omega t - \sin\nu t\right) \\
\xi_2 &= \frac{\nu a}{\nu^2 - \omega^2}\left(\cos\omega t - \cos\nu t + \sin\nu t - \frac{\omega}{\nu}\sin\omega t\right)
\end{aligned} \qquad (\omega \neq \nu) \qquad (4.6)$$

Считая $\omega \gg \nu$, получаем отсюда приближенные, но во многих случаях достаточно точные выражения

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \frac{\nu^2 a}{\omega^2 u\cos\varphi}\left(\cos\nu t - \cos\omega t - \frac{\omega}{\nu}\sin\omega t + \sin\nu t\right) \\
\xi_2 &= \frac{\nu a}{\omega^2}\left(\cos\nu t - \cos\omega t + \frac{\omega}{\nu}\sin\omega t - \sin\nu t\right)
\end{aligned} \qquad (4.7)$$

Далее, из остальных двух уравнений системы (4.4) при учете (4.2), (4.5) и начальных условий $\xi_3(0) = 0$, $\xi_4(0) = 0$ получаем

$$\xi_3 = \mu a\left(\frac{\nu}{\nu^2-\omega^2} - \frac{1}{2}\frac{\nu}{\nu^2-4\omega^2} - \frac{1}{2\nu}\right)\cos\nu t + \frac{\mu a\omega^2}{\nu}\left(\frac{2}{\nu^2-4\omega^2} - \frac{1}{\nu^2-\omega^2}\right)\sin\nu t +$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\mu a}{\nu} + \frac{\mu\nu a}{\nu^2-4\omega^2}\left(\frac{1}{2}\cos 2\omega t - \sin 2\omega t\right) - \frac{\mu\nu a}{\nu^2-\omega^2}\left(\cos\omega t - \sin\omega t\right)$$

$$\xi_4 = \frac{Pl}{\nu^2 2B\sin\varphi}\left[\frac{a\mu}{2} + \frac{a\mu}{2}\cos 2\omega t - a\mu\cos\omega t + \right. \tag{4.8}$$
$$+\mu a\nu\left(\frac{\nu}{\nu^2-\omega^2} - \frac{1}{2}\frac{\nu}{\nu^2-4\omega^2} - \frac{1}{2\nu}\right)\sin\nu t - \mu a\omega^2\left(\frac{2}{\nu^2-4\omega^2} - \frac{1}{\nu^2-\omega^2}\right)\cos\nu t +$$
$$\left. + \frac{\mu a\nu\omega}{\nu^2-4\omega^2}\sin 2\omega t - \frac{\mu\nu a\omega}{\nu^2-\omega^2}\sin\omega t + \frac{2\mu a\omega^2}{\nu^2-4\omega^2}\cos 2\omega t - \frac{\mu a\omega^2}{\nu^2-\omega^2}\cos\omega t\right]$$

Обращаясь к формулам (4.6) имеем

$$\xi_1 + \frac{\nu}{u\cos\varphi}\xi_2 = \frac{2\nu^2 a}{(\nu^2-\omega^2)u\cos\varphi}(\cos\omega t - \cos\nu t) \tag{4.9}$$

Отсюда после пренебрежения ν^2 по сравнению с ω^2 получаем

$$\xi_1 + \frac{\nu}{u\cos\varphi}\xi_2 = \frac{2\nu^2 a}{\omega^2 u\cos\varphi}(\cos\nu t - \cos\omega t) \tag{4.10}$$

С учетом этого допущения имеем также

$$-\frac{u\cos\varphi}{\nu}\xi_1 + \xi_2 = \frac{2\nu a}{\omega^2}\left(\frac{\omega}{\nu}\sin\omega t - \sin\nu t\right) \tag{4.11}$$

$$\frac{\nu}{u\cos\varphi}\xi_3 + \lambda\operatorname{tg}\varphi\xi_4 = \frac{\mu a}{u\cos\varphi}(1-\cos\nu t),\ \xi_3 - \frac{\nu 2B\sin\varphi}{Pt}\xi_4 = \frac{\mu a}{\nu}\sin\nu t$$

Теперь из формул обратного преобразования (2.4), в которых согласно изложенному должно полагать $\sin\theta = \theta$, $\cos\theta = 1$, имеем

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}\left[\frac{2\nu^2 a}{\omega^2 u\cos\varphi}(\cos\nu t - \cos\omega t) - \frac{\mu^2 a}{u\cos\varphi}(1-\cos\nu t)(1-\cos\omega t)\right] \\ x_2 &= \frac{1}{2}\left[\frac{2\nu a}{\omega^2}\left(\frac{\omega}{\nu}\sin\omega t - \sin\nu t\right) - \frac{\mu^2 a}{\nu}\sin\nu t\,(1-\cos\omega t)\right]\end{aligned}\right\} \tag{4.12}$$

В этих выражениях наиболее весомыми будут последние слагаемые которые получаются вследствие наличия постоянной составляющей в выражении (4.5). Обозначив их соответственно Δx_1 и Δx_2, имеем

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= -\frac{1}{2}\frac{\mu^2 a}{u\cos\varphi}(1-\cos\nu t)(1-\cos\omega t) \\ \Delta x_2 &= -\frac{1}{2}\frac{\mu^2 a}{\nu}\sin\nu t\,(1-\cos\omega t)\end{aligned} \tag{4.13}$$

Если периодическая внешняя сила действует в течение короткого промежутка времени $(0, t^*)$, малого по сравнению с периодом М. Шулера, то для $0 \leqslant t \leqslant t^*$ можно полагать $\cos\nu t \approx 1$, $\sin\nu t \approx \nu t$; тогда будет

$$\Delta x_1 = 0, \qquad \Delta x_2 = -\frac{1}{2}\mu^2 a(1-\cos\omega t)\,t \tag{4.14}$$

Максимально возможные девиации будут

$$|\Delta x_{1m}| = 2\frac{\mu^2 a}{u\cos\varphi}, \qquad |\Delta x_{2m}| = \frac{\mu^2 a}{\nu} \tag{4.15}$$

Поступила 3 VI 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А. Ю. К теории гирогоризонткомпаса. ПММ, 1956, т. XX, вып. 4.
2. Geckeler J. W. Kreisemechanik des Anshütz — Raumkompasses Ingenieur — Archiv, Berlin, 1935, VI, 4.
3. Кошляков В. Н. К теории гирокомпасов, ПММ, 1955, т. XXIII, вып. 5.
4. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М., ГИТТЛ, 1952.