Асимптотическое разложение (10) для $\beta<0$ получено ранее М. И. Розовским [3]. Отметим еще, что если β комплексное число, то

$$\lim_{t\to\infty} Э_\alpha(\beta, t) = 0 \quad \text{для} \quad \frac{1}{2}\pi(1+\alpha) \leqslant \arg\beta \leqslant \left(2 - \frac{\alpha+1}{2}\right)\pi$$

$$\lim_{t\to\infty} Э_\alpha(\beta, t) = \infty \quad \text{для} \quad |\arg\beta| < \frac{1}{2}\pi(\alpha+1)$$

Если $\alpha + 1 \geqslant 2$, то следует пользоваться формулой (7).

Поступила 25 IV 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последействием. ПММ, 1948, т. XII, вып. 1.
2. Fry C. G. and Hughes H. K. Asymptotik developments of certain integral funktions. Duke Mathem. Journal, 1942, v. 9, pp. 791—802.
3. Розовский М. И. Нелинейные интегрально-операторные уравнения ползучести и задача о кручении цилиндра при больших углах крутки. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, № 5, 1959.
4. Джрбашян М. М. Об интегральном представлении функций, непрерывных на нескольких лучах (обобщение интеграла Фурье). Известия АН СССР, серия математ., 1954, 18.
5. Джрбашян М. М. Об одном новом интегральном преобразовании и его применении в теориях целых функций. Известия АН СССР, серия математ., 1955, 19.

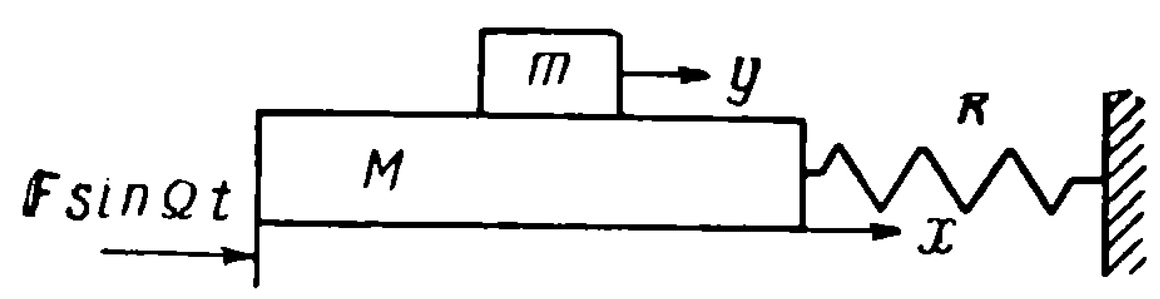
К РАСЧЕТУ ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ДЕМПФЕРА СУХОГО ТРЕНИЯ

М. И. Фейгин (Горький)

Расчет оптимальных параметров демпфера сухого трения для модели с $^1/_2$ степени свободы в предположении, что демпфируемая система совершает синусоидальное движение, проводился в работах [1–3].

В работе дается расчет оптимальных параметров демпфера сухого трения и вычисляется энергия, рассеиваемая демпфером за период колебаний (энергоемкость демпфера) для модели, представляющей неавтономную систему с полутора степенями свободы. Сравнение энергоемкостей на резонансных частотах для различных значений силы трения показывает, что оптимальной настройке демпфера соответствует минимум рассеиваемой энергии.

1°. Воспользуемся результатами исследования демпфера сухого трения, проведенного в работе [4] методом точечных преобразований. На фиг. 1 изображена принятая в указанной работе математическая модель. Она состоит из упруго закрепленной (с коэффициентом упругости k) массы M, на которую действует внешняя сила $F \sin \Omega t$. Взаимодействие массы демпфера m с массой M происходит только в результате силы сухого трения Φ. Пусть $x = 0$ соответствует недеформированному состоянию пружины. Исключая из рассмотрения совместное движение масс без взаимного проскальзывания, имеем следующие уравнения движения модели:



Фиг. 1

$$M\ddot{x} + kx = F\sin\Omega t \pm \Phi, \quad m\ddot{y} = \mp\Phi \tag{1}$$

Перейдем в уравнениях (1) к безразмерным переменным

$$\xi = xM\Omega^2 / F, \qquad \eta = yM\Omega^2 / F, \qquad \tau = \Omega t \tag{2}$$

Тогда получим уравнения

$$\ddot{\xi} + \omega^2\xi = \sin\tau + \beta\,\mathrm{sgn}\,(\dot{\eta} - \dot{\xi}), \qquad \mu\ddot{\eta} = -\beta\,\mathrm{sgn}\,(\dot{\eta} - \dot{\xi}) \tag{3}$$

в которых безразмерные параметры равны

$$\beta = \Phi / F, \qquad \omega^2 = k / M\Omega^2, \qquad \mu = m / M. \tag{4}$$

Если решение $\xi(\tau)$ уравнений (3), соответствующее движению с периодом 2π, разложить в ряд Фурье, то получим выражения для первой и кратных гармоник:

$$\Psi_1^2 = \frac{1}{(\omega^2-1)^2}\left\{1+\frac{16\beta^2}{\pi^2}\left[1+\frac{\pi(\omega^2-1)}{2\omega}\left(\frac{\pi\omega}{2\mu}+\operatorname{tg}\frac{\pi\omega}{2}\right)\right]\right\} \tag{5}$$

$$\Psi_n^2 = \frac{16\beta^2}{\pi^2 n^2(\omega^2-n^2)^2} \qquad (n = 3, 5, 7, \ldots) \tag{6}$$

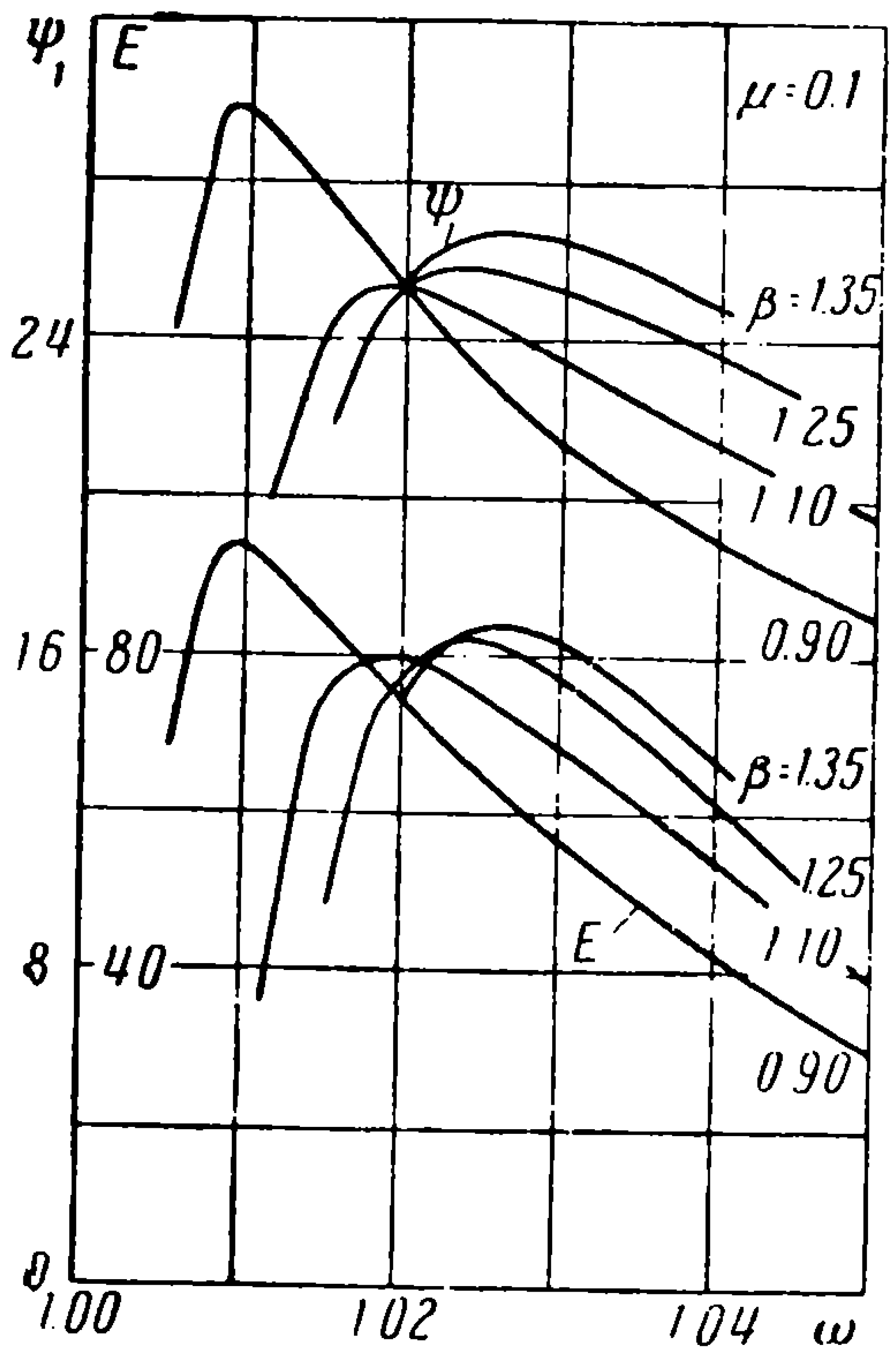
Выражения (5) и (6) справедливы в области существования и устойчивости рассматриваемого периодического движения. Указанная область включает в себя значения параметров β, ω и μ, удовлетворяющие неравенству

$$\beta^2\left[\frac{\omega^2(1+\mu)^2}{\mu^2}+\left(\frac{\pi\omega}{2\,\mu}+\operatorname{tg}\frac{\pi\omega}{2}\right)^2\right] < \frac{\omega^2}{(\omega^2-1)^2} \tag{7}$$

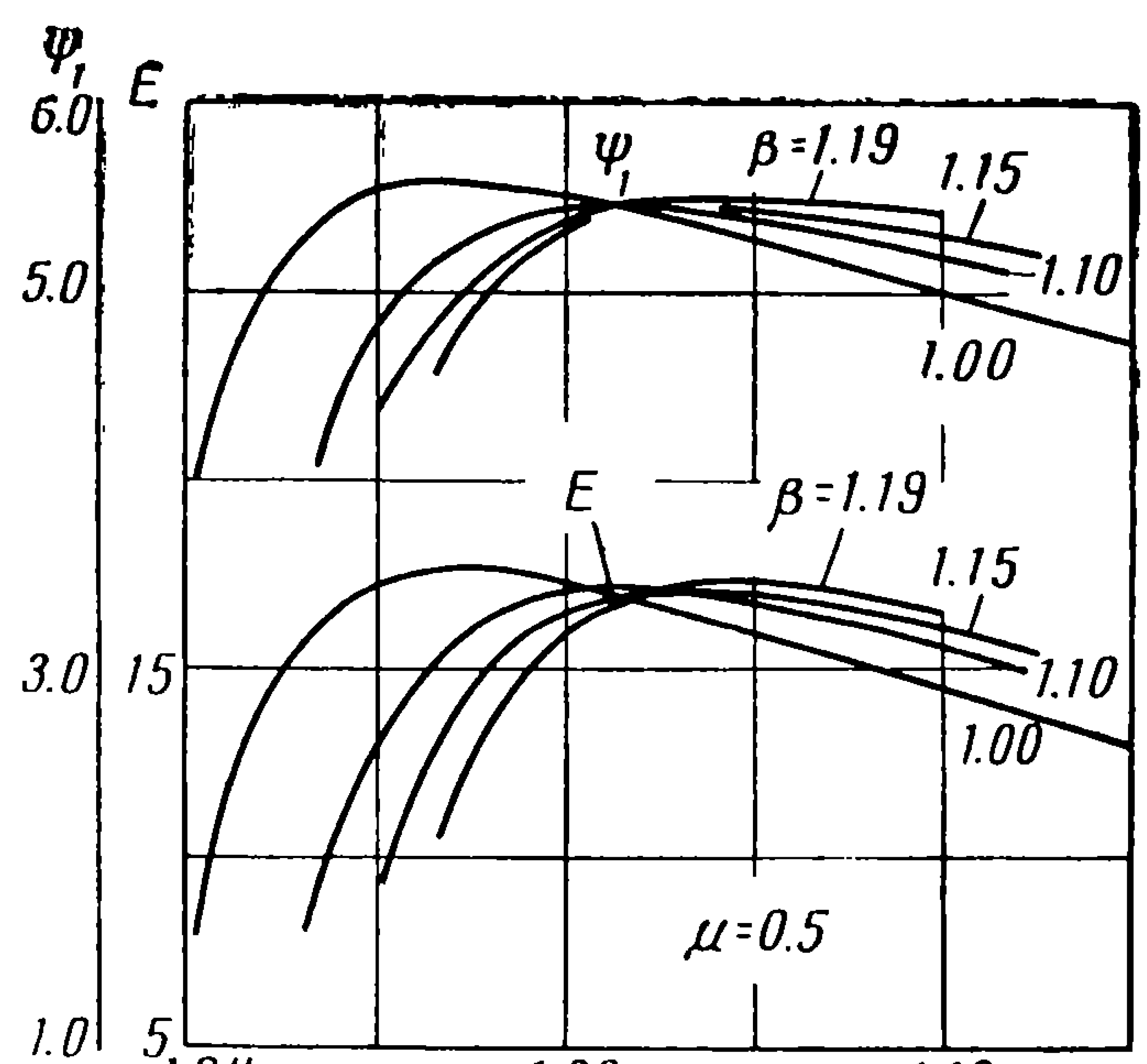
Определение оптимальных параметров демпфера проведем, исследуя амплитуду первой гармоники, а затем оценим меру несинусоидальности периодической функции $\xi(\tau)$ по клирфактору

$$\varkappa^2 = \frac{1}{\Psi_1^2}\sum_3^\infty \Psi_n^2$$

При фиксированном значении силы трения β и массы демпфера μ зависимость амплитуды демпфируемых колебаний от частоты, т. е. функция $\Psi_1(\omega)$, представляет



Фиг. 2



Фиг. 3

собой кривую с максимумом при некоторой резонансной частоте $\omega = \omega^*$. С изменением β смещается ω^* и меняется амплитуда при резонансной частоте $\Psi_1(\omega^*)$. Оптимальной силе трения β_0 соответствует минимальная амплитуда колебаний $\Psi_1(\omega^*)\min$. В верхних частях фиг. 2 ($\mu = 0.1$) и фиг. 3 ($\mu = 0.5$) приведены два семейства зависимостей $\Psi_1(\omega)$ для различных значений β. Из фигур видно, что с ростом β максимальная амплитуда первой гармоники $\Psi_1(\omega^*)$ сначала уменьшается, а затем возрастает. Значение β_0 соответствует случаю, при котором максимум кривой совпадает с общей точкой пересечения кривых семейства. Координата ω_0 указанной общей точки равна резонансной частоте системы с оптимально настроенным демпфером. Из выражения (5) непосредственно следует, что ω_0 определяется уравнением

$$1+\frac{\pi(\omega_0^2-1)}{2\omega_0}\left(\frac{\pi\omega_0}{2\mu}+\operatorname{tg}\frac{\pi\omega_0}{2}\right) = 0 \tag{8}$$

Оптимальное значение силы трения β_0 находим из условия, что кривая $\Psi_1(\omega)$ имеет максимум в точке ω_0. В результате дифференцирования $\Psi_1(\omega)$ и ряда преобразований при помощи уравнения (8) приходим к следующему уравнению:

$$\beta_0=\omega_0\left[(\omega_0^2-1)^2\left(\frac{1+\mu}{\mu}+\mathrm{tg}^2\frac{\pi\omega_0}{2}\right)-\frac{4}{\pi^2}(\omega_0^2+1)\right]^{-1/2} \tag{9}$$

Используя неравенство (7), можно убедиться, что для практически применяемых величин μ значения ω_0 и β_0 принадлежат области рассматриваемого периодического режима.

Оптимальная амплитуда первой гармоники при резонансной частоте ω_0, получаемая из уравнения (5), равна

$$\Psi_1^\circ=\frac{1}{\omega_0^2-1} \tag{10}$$

Оценка несинусоидальности функции $\xi(\tau)$ при β_0 и ω_0 дает

$$\varkappa^2=2.83\ 10^{-5} \quad \text{для } \mu=0.1, \qquad \varkappa^2=6.59\ 10^{-4} \quad \text{для } \mu=0.5$$

Таким образом можно считать оправданным расчет оптимальных параметров по амплитуде первой гармоники.

Для случая $\mu\ll 1$ выражения (8)—(10) можно разложить в ряд по $\Delta\omega=\omega-1$ и пренебречь членами, которые содержат $\Delta\omega$ в степени выше первой. В результате получим

$$\omega_0\approx 1+\frac{2\mu}{\pi^2}, \qquad \beta_0\approx\frac{\pi}{\sqrt{8}}, \qquad \Psi_1^\circ\approx\frac{\pi^2}{4\mu} \tag{11}$$

Согласно результатам работы [4] энергоемкость демпфера в рассматриваемом периодическом режиме равна

$$E=\frac{4\beta}{\omega(\omega^2-1)}\left[\omega^2-\beta^2(\omega^2-1)^2\left(\frac{\pi\omega}{2\mu}+\mathrm{tg}\frac{\pi\omega}{2}\right)^2\right]^{1/2} \tag{12}$$

В нижней части фиг. 2 и 3 приведены вычисленные на основании формулы (12) два семейства кривых $E(\beta,\omega,\mu)$ для $\mu=0.1$ и $\mu=0.5$. Каждая из кривых достигает максимального значения E^* при той же резонансной частоте ω^*, что и $\Psi_1(\omega)$. С изменением β смещается ω^* и меняется E^*. Сравнение энергоемкостей при резонансных частотах, соответствующих различным β, показывает, что оптимальной настройке демпфера β_0 соответствует минимум рассеиваемой энергии.

2°. Последний результат имеет следующий физический смысл. Если демпфируемые колебания близки к синусоидальным, то работа, совершаемая возмущающей силой на резонансной частоте за один период колебаний, приближенно равна $\pi F x_0$, где F — амплитуда возмущающей силы, а x_0 — амплитуда демпфируемых колебаний. При установившихся вынужденных колебаниях эта работа равна энергоемкости демпфера. Отсюда видно, что при минимальном значении резонансной амплитуды x_0 рассеиваемая демпфером энергия будет также минимальна.

Поступила 24 IV 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Den-Hartog and Ormondroyd. Torsional Vibration Dampers, Trans. ASME, APM — 52—13, 1930, 133.
2. Den-Hartog J. P. Mechanical Vibrations, First Edition, New York — London, 1934.
3. Гопп Ю. А. Демпферы крутильных колебаний коленчатых валов быстроходных двигателей, ГОНТИ, Харьков, 1938.
4. Фейгин М. И. К теории нелинейных демпферов. Изв. вузов, Радиофизика II, 1959, № 4, 607.