Обозначая чертой сверху комплексную сопряженность, получим из формул (8)

$$D_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & a-1-b \\ 1-a-b & 0 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \bar{D}_{-2} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} i(1-a) & 1-a+2b \\ 1-a-2b & -i(1-a) \end{pmatrix}$$

$$D_4 = \bar{D}_{-4} = \frac{b}{4}\begin{pmatrix} -i & -1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \tag{16}$$

Удержим в ряде в (10) для χ_2 лишь члены при $\sigma = 2$ и, положив $(Eki + D_0)^{-1} \approx \approx -ik^{-1}E$, получим

$$\chi_2 = \mathrm{Det}\left(D_0 - \frac{1}{2i}D_2D_{-2} + \frac{1}{2i}D_{-2}D_2 - \frac{1}{4i}D_4D_{-4} + \frac{1}{4i}D_{-4}D_4 + \ldots\right) =$$

$$= 0.25\,[(a-1-0.25\,(a-1)^2 - 0.125b^2)^2 - (b - 0.5b\,(1-a))^2 + \ldots] \tag{17}$$

Уравнение $\chi_2 = 0$ дает приближенное уравнение границ области неустойчивости

$$a = 1 \pm b - \frac{1}{8}b^2 + \ldots \tag{18}$$

В заключение благодарю А. И. Лурье за внимание и помощь в работе.

Поступила 12 III 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Валеев К. Г. О решении и характеристических показателях решений некоторых систем линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. ПММ, т. XXIV, 1960, вып. 4, стр. 598.
2. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., ГИТТЛ, 1954.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА [1]

Б. Д. Аннин (Новосибирск)

Экспоненциальная функция дробного порядка, введенная Ю. Н. Работновым [1], имеет вид

$$\mathcal{E}_\alpha(\beta, t) = t^\alpha \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\beta^n t^{n(1+\alpha)}}{\Gamma[(n+1)(1+\alpha)]} \qquad (1+\alpha > 0) \tag{1}$$

Нас будет интересовать асимптотическое разложение при больших t этой функции и ее производных по t и по β, а также интегралов

$$\int_0^t \mathcal{E}_\alpha(\beta, t)\,dt, \qquad \int_0^t \frac{\partial \mathcal{E}_\alpha(\beta, t)}{\partial\beta}\,dt$$

Основной является следующая теорема, установленная в работе [2].

Теорема 1. Рассмотрим функцию

$$E_\gamma(z, q) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{h(n)}{\Gamma(\gamma n + q)}\, z^n \qquad (z = x + iy,\ \gamma > 0) \tag{2}$$

где q — произвольная постоянная, действительная или комплексная.

Пусть $h(n)$ таково, что если рассматривать функцию $h(w)$, где $w = x + iy$, в любой полуплоскости $x > x_0$, то

$$\frac{h(w)}{\Gamma(\gamma w + q)}$$

будет однозначной аналитической функцией w, которую для больших значений модуля можно представить в виде

$$h(w) = C_0 + \frac{C_1}{\gamma w + q} - \ldots - \frac{C_s + \delta(\gamma w, s)}{(\gamma w + q)(\gamma w + q + 1)\ldots(\gamma w + q + s)} \tag{3}$$

[1] При чтении корректуры автору стали известны работы М. М. Джрбашяна [4,5], в которых, в частности, изучены важные свойства функции типа функции $\mathcal{E}_\alpha(\beta, t)$.

где $c_0, c_1, \ldots$ не зависят от w и где функция $\delta(\gamma w, s)$ такая, что

$$\lim \delta(\gamma w, s) = 0 \quad \text{при } |w| \to \infty$$

Тогда для функции $E_\gamma(z, q)$ при больших $|z|$ существуют асимптотические представления:

при $0 < \gamma < 2$, $\qquad \frac{1}{2}\pi < \arg z < \left(2 - \frac{1}{2}\gamma\right)\pi$

$$E_\gamma(z, q) \sim -\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{h(-n)}{\Gamma(q - \gamma n)} z^{-n} \tag{4}$$

при $0 < \gamma < 2$, $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi\gamma$

$$E_\gamma(z, q) \sim \frac{1}{\gamma} z^{\frac{1-q}{\gamma}} \exp\left(z^{\frac{1}{\gamma}}\right) \sum_{n=0}^{n=\infty} C_n z^{-\frac{n}{\gamma}} \quad \text{($c_0, c_1, \ldots$ те же, что в (3))} \tag{5}$$

при $0 < \gamma < 2$, $|\arg z| = \frac{1}{2}\pi\gamma$

$$E_\gamma(z, q) \sim \frac{1}{\gamma} z^{\frac{1-q}{\gamma}} \exp\left(z^{\frac{1}{\gamma}}\right) \sum_{n=0}^{n=\infty} C_n z^{-\frac{n}{\gamma}} - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{h(-n)}{\Gamma(q - \gamma n)} z^{-n} \tag{6}$$

при $\gamma \geqslant 2$, $|\arg z| < \pi$

$$E_\gamma(z, q) \sim \frac{1}{\gamma} \sum_{\mu} \left\{ \exp Z_\mu \, Z_\mu^{1-q} \sum_{n=0}^{n=\infty} C_n (Z_\mu)^{-n} \right\} \qquad \left(Z_\mu = z^{\frac{1}{\gamma}} \exp \frac{2\pi i \mu}{\gamma}\right) \tag{7}$$

первое суммирование ведется по всем целым μ, для которых

$$|\arg z + 2\pi\mu| \leqslant \frac{1}{2}\pi\gamma$$

Ограничимся случаем $0 < \alpha + 1 < 2$. Если $\beta > 0$, то из (5), если $\beta < 0$, то из (4) найдем

$$\begin{aligned} Э_\alpha(\beta, t) &\sim \frac{1}{1+\alpha} \beta^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} \exp\left(t\beta^{\frac{1}{1+\alpha}}\right) && (\beta > 0) \\ Э_\alpha(\beta, t) &\sim -t^\alpha \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{(\beta t^{1+\alpha})^{-n}}{\Gamma[(\alpha+1) - (\alpha+1)n]} && (\beta < 0) \end{aligned} \tag{8}$$

Из (8) для $\beta < 0$ легко найдем для больших t

$$\int_t^\infty Э_\alpha(\beta, t)\, dt \sim -t^{\alpha+1} \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{(\beta t^{1+\alpha})^{-n}}{\Gamma[\alpha + 2 - (\alpha+1)n]}. \tag{9}$$

Аналогично, используя теорему 1, можно показать, что асимптотическое разложение $\partial Э_\alpha(\beta, t) / \partial t$ и $\partial Э_\alpha(\beta, t) / \partial \beta$ оказывается равным производным соответственно по t и β от асимптотического разложения (8) для $Э_\alpha(\beta, t)$.

Далее при помощи той же теоремы можно найти

$$\begin{aligned} \int_0^t Э_\alpha(\beta, t)\, dt &\sim \frac{1}{\beta(1+\alpha)} \exp\left(t\beta^{\frac{1}{1+\alpha}}\right) && (\beta > 0) \\ \int_0^t Э_\alpha(\beta, t)\, dt &\sim -\frac{1}{\beta} - t^{\alpha+1} \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{(\beta t^{1+\alpha})^{-n}}{\Gamma[\alpha + 2 - (\alpha+1)n]} && (\beta < 0) \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{\partial Э_\alpha(\beta, t)}{\partial \beta} dt &\sim \frac{t}{(1+\alpha)^2} \beta^{-\frac{(1+2\alpha)}{1+\alpha}} \exp\left(t\beta^{\frac{1}{1+\alpha}}\right) \left[1 - \frac{1+\alpha}{t} \beta^{-\frac{1}{1+\alpha}}\right] && (\beta > 0) \\ \int_0^t \frac{\partial Э_\alpha(\beta, t)}{\partial \beta} dt &\sim \frac{t^{\alpha+1}}{\beta} \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{n(\beta t^{1+\alpha})^{-n}}{\Gamma[\alpha + 2 - (\alpha+1)n]} && \beta < 0 \end{aligned} \tag{11}$$

Асимптотическое разложение (10) для $\beta<0$ получено ранее М. И. Розовским [3]. Отметим еще, что если β комплексное число, то

$$\lim_{t\to\infty} \partial_\alpha(\beta, t) = 0 \quad \text{для} \quad \frac{1}{2}\pi(1+\alpha) \leqslant \arg\beta \leqslant \left(2 - \frac{\alpha+1}{2}\right)\pi$$

$$\lim_{t\to\infty} \partial_\alpha(\beta, t) = \infty \quad \text{для} \quad |\arg\beta| < \frac{1}{2}\pi(\alpha+1)$$

Если $\alpha + 1 \geqslant 2$, то следует пользоваться формулой (7).

Поступила 25 IV 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последействием. ПММ, 1948, т. XII, вып. 1.
2. Fry C. G. and Hughes H. K. Asymptotik developments of certain integral funktions. Duke Mathem. Journal, 1942, v. 9, pp. 791—802.
3. Розовский М. И. Нелинейные интегрально-операторные уравнения ползучести и задача о кручении цилиндра при больших углах крутки. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, № 5, 1959.
4. Джрбашян М. М. Об интегральном представлении функций, непрерывных на нескольких лучах (обобщение интеграла Фурье). Известия АН СССР, серия математ., 1954, 18.
5. Джрбашян М. М. Об одном новом интегральном преобразовании и его применении в теориях целых функций. Известия АН СССР, серия математ., 1955, 19.

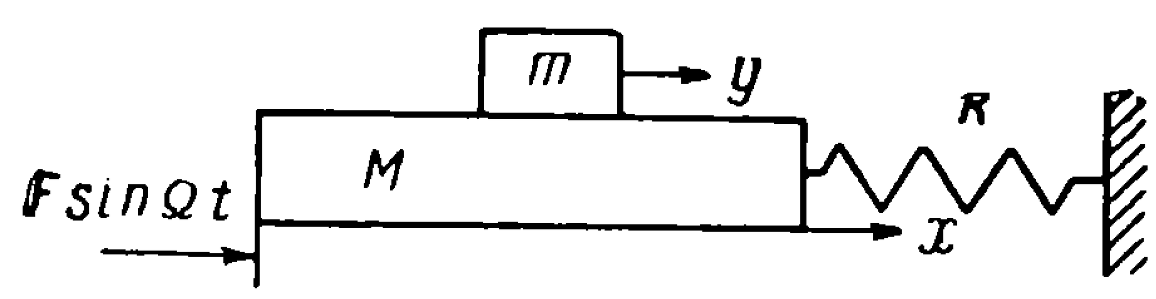
К РАСЧЕТУ ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ДЕМПФЕРА СУХОГО ТРЕНИЯ

М. И. Фейгин (Горький)

Расчет оптимальных параметров демпфера сухого трения для модели с $1/2$ степени свободы в предположении, что демпфируемая система совершает синусоидальное движение, проводился в работах [1-3].

В работе дается расчет оптимальных параметров демпфера сухого трения и вычисляется энергия, рассеиваемая демпфером за период колебаний (энергоемкость демпфера) для модели, представляющей неавтономную систему с полутора степенями свободы. Сравнение энергоемкостей на резонансных частотах для различных значений силы трения показывает, что оптимальной настройке демпфера соответствует минимум рассеиваемой энергии.

1°. Воспользуемся результатами исследования демпфера сухого трения, проведенного в работе [4] методом точечных преобразований. На фиг. 1 изображена принятая в указанной работе математическая модель. Она состоит из упруго закрепленной (с коэффициентом упругости k) массы M, на которую действует внешняя сила $F \sin \Omega t$. Взаимодействие массы демпфера m с массой M происходит только в результате силы сухого трения Φ. Пусть $x = 0$ соответствует недеформированному состоянию пружины. Исключая из рассмотрения совместное движение масс без взаимного проскальзывания, имеем следующие уравнения движения модели:



Фиг. 1

$$M\ddot{x} + kx = F \sin \Omega t \pm \Phi, \; m\ddot{y} = \mp \Phi \tag{1}$$

Перейдем в уравнениях (1) к безразмерным переменным

$$\xi = xM\Omega^2 / F, \qquad \eta = yM\Omega^2 / F, \qquad \tau = \Omega t \tag{2}$$

Тогда получим уравнения

$$\ddot{\xi} + \omega^2\xi = \sin\tau + \beta \operatorname{sgn}(\dot{\eta} - \dot{\xi}), \qquad \mu\ddot{\eta} = -\beta \operatorname{sgn}(\dot{\eta} - \dot{\xi}) \tag{3}$$

в которых безразмерные параметры равны

$$\beta = \Phi / F, \qquad \omega^2 = k / M\Omega^2, \qquad \mu = m / M. \tag{4}$$