ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В РЕЗОНАНСНОМ СЛУЧАЕ

К. Г. Валеев (Ленинград)

Изучению устойчивости решений системы двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка с периодическими коэффициентами посвящено много работ, которые здесь не отмечаются. В данной заметке на основе работы [1] дается критерий устойчивости решений в наиболее трудном резонансном случае.

Рассматривается система линейных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dy}{dt}=(A+\mu B(t))y \qquad (A=\mathrm{const}). \tag{1}$$

Здесь y — двумерный вектор, μ — малый параметр ($\mu\geqslant 0$), $A, B\ (t)$ — вещественные матрицы размера 2×2

$$B(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} B_k e^{ikt}, \qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |B_k|\leqslant c_1, \qquad |A|\leqslant c_2 \tag{2}$$

Здесь B_k — постоянные комплексные матрицы. Символом $|A|$ обозначаем норму матрицы $A=\|a_{sj}\|_1^2$, при этом принимаем

$$|A|=\max\{|a_{11}|+|a_{12}|, \quad |a_{21}|+|a_{22}|\} \tag{3}$$

Предполагаем, что характеристическими показателями p_1, p_2 решений системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt}=Ay \tag{4}$$

являются числа вида $\mp 0.5\, ni\ (n=1, 2, 3\ldots)$.

При этом фундаментальная матрица решений системы (4) имеет вид ([2], стр. 99).

$$\exp\{At\}=C_{n1}\, e^{nit/2}+C_{n2}\, e^{-nit/2} \tag{5}$$

Комплексно-сопряженные матрицы C_{n1}, C_{n2} можно представить следующим образом:

$$C_{n1}=0.5\,E-in^{-1}A, \qquad C_{n2}=0.5E+in^{-1}A \tag{6}$$

Здесь и далее E —единичная матрица. Сделаем в системе уравнений (1) замену $y=\exp\{At\}\,z$. При этом получим

$$\frac{dz}{dt}=\mu D\ (t)\ z, \qquad D\ (t)=e^{-At}\,\overline{B\ (t)}\, e^{At} \tag{7}$$

где

$$D\ (t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k e^{ikt}, \qquad D_k=C_{n1}B_kC_{n1}+C_{n2}B_kC_{n2}+C_{n2}B_{k-n}C_{n1}+C_{n1}B_{k+n}C_{n2} \tag{8}$$

Вопрос об устойчивости решений систем уравнений (1) и (7) равносильны.

В работе [1] показано, что характеристическими показателями p_1, p_2 решений системы дифференциальных уравнений (7) будут обращающиеся в нуль при $\mu=0$ корни трансцендентного уравнения

$$\mathrm{Det}\Big(Ep-\mu D_0- \tag{9}$$

$$-\sum_{\sigma=2}^{\infty}\mu^\sigma\sum_{\varkappa} D_{k_1}(E\,(p-k_1 i)-\mu D_0)^{-1} D_{k_2}(E\,(p-(k_1+k_2)i)-\mu D_0)^{-1}\ldots$$

$$\ldots D_{k_{\sigma-1}}(E\,(p-(k_1+k_2\ldots+k_{\sigma-1})i)-\mu D_0)^{-1} D_{k_\sigma}\Big)=0$$

$$\varkappa=(k_1+k_2+\ldots+k_\sigma=0, \quad k_j\neq 0,$$

$$(j=1,\ldots,\sigma);\ 0\overline{\in}\{k_1,\ k_1+k_2+\ldots,\ k_1+k_2+\ldots+k_{\sigma-1}\})$$

Здесь p — комплексная переменная в некоторой заданной конечной области. Ряд в (9) сходится при достаточно малых значениях μ. (В работе [1] предложен общий метод, позволяющий выразить матричный ряд в (9) через конечное число рядов, которые сходятся при любом данном конечном значении μ при $p \in \Sigma$.)

$$\chi_1 = -S_p B_0 = -S_p D_0$$

$$\chi_2 = \operatorname{Det}\left(D_0 + \sum_{\sigma=2}^{\infty} (-\mu)^{\sigma-1} \sum_{\varkappa} D_{k_1} (E k_1 i + \mu D_0)^{-1} D_{k_2} (E (k_1 + k_2) i + \mu D_0)^{-1} \ldots \right. \tag{10}$$

$$\left. D_{k_{\sigma-1}} (E (k_1 + k_2 + \ldots + k_{\sigma-1}) i + \mu D_0)^{-1} D_{k_\sigma} \right)$$

$$\varkappa = (k_1 + k_2 + \ldots + k_\sigma = 0, \quad k_j \neq 0$$

$$(j = 1, 2, \ldots, \sigma; \quad 0 \in \{k_1, k_1 + k_2, \ldots, k_1 + k_2 + \ldots + k_{\sigma-1}\})$$

Здесь χ_1, χ_2 — вещественные числа.

В силу вещественности матрицы $D(t)$ (7) на границе области неустойчивости в пространстве параметров-коэффициентов системы уравнений (1) один из характеристических показателей p_1, p_2 равен нулю, т. е. $\chi_2 = 0$.

Разложив уравнение (9) при достаточно малых значениях $|p|$, μ, получим

$$p^2 + \mu\chi_1 p + \mu^2\chi_2 + O(|p\mu^2| + |\mu^3|) = 0 \tag{11}$$

Из теоремы Рауса — Гурвица ([2], стр. 433) следует теорема.

Теорема. Пусть величина $\mu > 0$ достаточно мала.

1. Если $\chi_1 > 0$, $\chi_2 > 0$, то решения системы (1) асимптотически устойчивы.
2. Если $\chi_1 < 0$ или $\chi_2 < 0$, то решения системы (1) неустойчивы.
3. Если $\chi_1 > 0$, $\chi_2 = 0$, то решения системы уравнений (1) устойчивы, и при этом существует одно периодическое при n-четном или полупериодическое при n-нечетное решение периода 2π.
4. Если $\chi_1 = 0$, $\chi_2 > 0$, то решения системы (1) устойчивы (ограничены).
5. Если $\chi_1 = 0$, $\chi_2 = 0$, то вопрос об устойчивости требует дополнительного исследования. При этом характеристическими показателями решений системы (1) будут числа вида $\pm 0,5\ ni$.

Замечание 1. Так как в ряде (10) $k_j \neq 0$ $(j = 1, \ldots, \sigma)$, то норму ряда, определяющего χ_2 в (10), можно мажорировать геометрической прогрессией со знаменателем прогрессии q

$$q = \mu (E - \mu |D_0|)^{-1} \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{\infty} |D_k^{\cdot}| \tag{12}$$

Из (12), (8), (6), (2) следует, что условие $|q| < 1$ выполняется, если

$$0 \leqslant \mu \leqslant \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |D_k| \right)^{-1} \leqslant \frac{n^2}{c_1 (n + 2c_2)^2} \tag{13}$$

При выполнении условия (13) матричный ряд в (10) сходится.

Замечание 2. Величина $\mu > 0$ должна быть достаточно мала еще и для того, чтобы характеристические показатели p_1, p_2 решений системы уравнений (1) не приняли значений $\pm (0.5n \pm 1)\ i$, т. е. чтобы параметры-коэффициенты системы (1) не попали бы в соседнюю область неустойчивости. При этом ряд для χ_2 в (10) может сходиться.

Пример. Вычислим величину χ_2 $(\chi_1 = 0)$ для уравнения Матье при $n = 2$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (a + 2\mu \cos 2t)\, x = 0 \tag{14}$$

Предполагаем, что $a \approx 1$, $b \approx 0$, $\mu = 1$. Положив $y_1 = x$, $y_2 = dx/dt$ и записав уравнение (14) в форме (1), получим

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1-a & 0 \end{pmatrix}, \qquad B_2 = B_{-2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -b & 0 \end{pmatrix} \tag{15}$$

$$C_{21} = 0.5 \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \qquad C_{22} = 0.5 \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

Обозначая чертой сверху комплексную сопряженность, получим из формул (8)

$$D_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & a-1-b \\ 1-a-b & 0 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \overline{D}_{-2} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} i(1-a) & 1-a+2b \\ 1-a-2b & -i(1-a) \end{pmatrix}$$

$$D_4 = \overline{D}_{-4} = \frac{b}{4}\begin{pmatrix} -i & -1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \qquad (16)$$

Удержим в ряде в (10) для χ_2 лишь члены при $\sigma = 2$ и, положив $(Eki + D_0)^{-1} \approx$ $\approx -ik^{-1} E$, получим

$$\chi_2 = \operatorname{Det}\left(D_0 - \frac{1}{2i} D_2 D_{-2} + \frac{1}{2i} D_{-2} D_2 - \frac{1}{4i} D_4 D_{-4} + \frac{1}{4i} D_{-4} D_4 + \ldots\right) =$$

$$= 0.25\,[(a - 1 - 0.25\,(a-1)^2 - 0.125 b^2)^2 - (b - 0.5 b\,(1-a))^2 + \ldots] \qquad (17)$$

Уравнение $\chi_2 = 0$ дает приближенное уравнение границ области неустойчивости

$$a = 1 \pm b - \frac{1}{8} b^2 + \ldots \qquad (18)$$

В заключение благодарю А. И. Лурье за внимание и помощь в работе.

Поступила 12 III 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Валеев К. Г. О решении и характеристических показателях решений некоторых систем линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. ПММ, т. XXIV, 1960, вып. 4, стр. 598.
2. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., ГИТТЛ, 1954.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА [1]

Б. Д. Аннин (Новосибирск)

Экспоненциальная функция дробного порядка, введенная Ю. Н. Работновым [1], имеет вид

$$\mathcal{E}_\alpha(\beta, t) = t^\alpha \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\beta^n t^{n(1+\alpha)}}{\Gamma[(n+1)(1+\alpha)]} \qquad (1+\alpha > 0) \qquad (1)$$

Нас будет интересовать асимптотическое разложение при больших t этой функции и ее производных по t и по β, а также интегралов

$$\int_0^t \mathcal{E}_\alpha(\beta, t)\,dt, \qquad \int_0^t \frac{\partial \mathcal{E}_\alpha(\beta, t)}{\partial \beta}\,dt$$

Основной является следующая теорема, установленная в работе [2].

Теорема 1. Рассмотрим функцию

$$E_\gamma(z, q) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{h(n)}{\Gamma(\gamma n + q)} z^n \qquad (z = x + iy,\ \gamma > 0) \qquad (2)$$

где q — произвольная постоянная, действительная или комплексная.

Пусть $h(n)$ таково, что если рассматривать функцию $h(w)$, где $w = x + iy$, в любой полуплоскости $x > x_0$, то

$$\frac{h(w)}{\Gamma(\gamma w + q)}$$

будет однозначной аналитической функцией w, которую для больших значений модуля можно представить в виде

$$h(w) = C_0 + \frac{C_1}{\gamma w + q} - \ldots - \frac{C_s + \delta(\gamma w, s)}{(\gamma w + q)(\gamma w + q + 1)\ldots(\gamma w + q + s)} \qquad (3)$$

[1] При чтении корректуры автору стали известны работы М. М. Джрбашяна [4,5], в которых, в частности, изучены важные свойства функции типа функции $\mathcal{E}_\alpha(\beta, t)$.