ОБ ОДНОМ ДОСТАТОЧНОМ УСЛОВИИ УСТОЙЧИВОСТИ ТРИВИАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ИЗ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Н. П. Купцов (Саратов)

Для уравнения

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0 \tag{1}$$

в настоящее время известно большое число различного вида достаточных условий устойчивости тривиального решения [1]. В частности, простой и удобный для применения признак Ляпунова был установлен М. Я. Леоновым [2] (см. также [3, 4]): если

$$q(t) > 0, \qquad p(t) + \frac{\dot{q}(t)}{2q(t)} \geqslant 0$$

то решения уравнения (1) устойчивы [1] по отношению к x.

В настоящей заметке выводится новое достаточное условие устойчивости, обобщающее указанный признак М. Я. Леонова.

Пусть задана система линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = a_{11}(t)x + a_{12}(t)y, \qquad \dot{y} = a_{21}(t)x + a_{22}(t)y \tag{2}$$

с кусочно-непрерывными коэффициентами. Рассмотрим квадратичную форму

$$U = A(t)x^2 + 2B(t)xy + C(t)y^2 \tag{3}$$

коэффициенты которой удовлетворяют системе линейных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{A} &= -2a_{11}A - 2a_{21}B \\ \dot{B} &= -a_{12}A - (a_{11} + a_{22})B - a_{21}C \\ \dot{C} &= -2a_{12}B - 2a_{22}C \end{aligned} \tag{4}$$

и начальным условиям

$$A(0) = A_0 > 0, \qquad B(0) = B_0, \qquad C(0) = C_0 > 0, \qquad A_0C_0 - B_0^2 > 0 \tag{5}$$

Положим $\Delta(t) = A(t)C(t) - B^2(t)$. Дифференцируя $\Delta(t)$ и учитывая (4), имеем

$$\dot{\Delta}(t) = -2(a_{11} + a_{22})\Delta(t)$$

Отсюда

$$\Delta(t) = \Delta(0)\exp\left[-2\int_0^t (a_{11} + a_{22})\,d\tau\right] \tag{6}$$

Следовательно, $A(t) > 0$ и $C(t) > 0$ при $t > 0$. Отсюда вытекает: при $t > 0$ уравнение

$$A(t)x^2 + 2B(t)xy + C(t)y^2 = \text{const}$$

определяет в плоскости xy некоторый эллипс.

Если в форму (3) подставить вместо x и y решение системы (2), то U не будет зависеть от t (это обстоятельство легко проверяется дифференцированием U по t). Предположим, что вдоль заданного решения $\{x(t), y(t)\}$ системы (2) значение U равно U_0. Это означает, что точка $\{x(t), y(t)\}$ лежит на эллипсе

$$A(t)x^2 + 2B(t)xy + C(t)y^2 = U_0$$

Точка этого эллипса с наибольшей абсциссой (ординатой) имеет координаты

$$\left\{\sqrt{\frac{U_0C(t)}{\Delta(t)}},\ -B(t)\sqrt{\frac{U_0}{C(t)\Delta(t)}}\right\} \qquad \left(\left\{-B(t)\sqrt{\frac{U_0}{C(t)\Delta(t)}},\ \sqrt{\frac{U_0A(t)}{\Delta(t)}}\right\}\right)$$

Следовательно

$$|x(t)| \leqslant \sqrt{U_0\frac{C(t)}{\Delta(t)}}, \qquad |y(t)| \leqslant \sqrt{U_0\frac{A(t)}{\Delta(t)}} \tag{7}$$

---

[1] Чтобы имела место устойчивость к отношению к $\dot{x}$, необходимы дополнительные требования (например, ограниченность $q(t)$ на $(0, \infty)$ (см. [4], стр. 372—373)).

Таким образом, для ограниченности $x(t)$ на $[0, \infty)$ достаточно, чтобы выражение $C(t) / \Delta(t)$ было ограничено на $[0,\infty)$. Система (2) линейна, поэтому из последнего утверждения вытекает: для того чтобы тривиальное решение системы (2) было устойчиво по отношению к x, достаточно, чтобы $C(t) / \Delta(t)$ было ограничено на $[0,\infty)$.

Нетрудно убедиться, что ограниченность $C(t) / \Delta(t)$ на $[0, \infty)$ в то же время и необходима для устойчивости тривиального решения системы (2) по отношению к x. В самом деле, пусть указанная устойчивость имеет место; тогда существует постоянная M, такая, что для всякого решения системы (2), удовлетворяющего условию

$$A_0x^2(0) + 2B_0x(0)\,y(0) + C_0y^2(0) = 1 \tag{8}$$

будет при $t > 0$ иметь место неравенство $x\,|(t)| \leqslant M$.

Для решения системы (2), подчиняющегося требованиям

$$x(t_0) = \sqrt{\frac{C(t_0)}{\Delta(t_0)}}, \qquad y(t_0) = -B(t_0)\sqrt{\frac{1}{C(t_0)\,\Delta(t_0)}}$$

будет иметь место равенство $A(t_0)\,x^2(t_0) + 2B(t_0)\,x(t_0)\,y(t_0) + C(t_0)\,y^2(t_0) = 1$.

Так как форма U постоянная вдоль всякого решения системы (2), то получаем (8)

$$A_0x^2(0) + 2B_0x(0)\,y(0) + C_0y^2(0) = 1.$$

Следовательно

$$x(t_0) = \sqrt{\frac{C(t_0)}{\Delta(t_0)}} \leqslant M$$

Остается учесть произвольность величины t_0.

Таким же способом из (7) выводим, что необходимым и достаточным условием устойчивости тривиального решения системы (2) по отношению y будет ограниченность на $[0, \infty)$ величины $A(t) / \Delta(t)$. Пусть теперь $s(t)$ — произвольная функция, положительная и непрерывно дифференцируемая на $(0, \infty)$. Положим

$$\lambda(t) = \frac{1}{\sqrt{s(t)}} \exp \int_0^t \left\{a_{11} + a_{22} - \left[\left(\frac{\dot{s}}{2s} + a_{11} - a_{22}\right)^2 + \frac{(a_{21} + sa_{12})^2}{s}\right]^{1/2}\right\} d\tau \tag{9}$$

Тогда

$$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = -\frac{\dot{s}}{2s} + a_{11} + a_{22} - \left[\left(\frac{\dot{s}}{2s} + a_{11} - a_{22}\right)^2 + \frac{(a_{21} + sa_{12})^2}{s}\right]^{1/2} \tag{10}$$

Для упрощения записи введем обозначения

$$\alpha = -\dot{\lambda} + 2\lambda a_{11}, \qquad \beta = -\lambda(a_{21} + sa_{12}), \qquad \gamma = -\dot{\lambda}s - \lambda\dot{s} + 2\lambda sa_{22} \tag{11}$$

Из (10) легко получаем

$$\begin{gathered} \alpha = \lambda\left\{\left[\left(\frac{\dot{s}}{2s} + a_{11} - a_{22}\right)^2 + \frac{1}{s}(a_{21} + sa_{12})^2\right]^{1/2} + \frac{\dot{s}}{2s} + a_{11} - a_{22}\right\} \geqslant 0 \\ \gamma = \lambda s\left\{\left[\left(\frac{\dot{s}}{2s} + a_{11} - a_{22}\right)^2 + \frac{1}{s}(a_{21} + sa_{12})^2\right]^{1/2} - \frac{\dot{s}}{2s} - a_{11} + a_{22}\right\} \geqslant 0 \\ \alpha\gamma - \beta^2 = 0 \end{gathered} \tag{12}$$

Пусть $J(t) = \lambda(A + sC)$. Тогда, учитывая (4), будем иметь

$$\dot{J}(t) = \dot{\lambda}(A + sC) + \lambda(\dot{A} + s\dot{C} + \dot{s}C) = -\alpha A + 2\beta B - \gamma C$$

Если при некотором t функция $\alpha(t)$ обращается в нуль, то в этой же точке обращается в нуль $\beta(t)$ (см. (12)). В этом случае $\dot{J}(t) = -\gamma C \leqslant 0$. Без труда проверяется, что при $\alpha(t) \neq 0$ справедливо соотношение

$$\dot{J}(t) = -\frac{(A\alpha - B\beta)^2}{A\alpha} - \frac{\gamma}{A}(AC - B^2) \leqslant 0$$

Таким образом, доказано, что $\dot{J}(t) \leqslant 0$ при $t > 0$. Отсюда $J(t) \leqslant J(0)$. Учитывая (6) и (9), получаем

$$\frac{C(t)}{\Delta(t)} \leqslant \frac{J(t)}{\lambda(t)\,s(t)}\,\frac{1}{\Delta(0)} \exp\left[2\int_0^t (a_{11} + a_{22})\,d\tau\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{J(0)}{\Delta(0)\sqrt{s(0)}} \exp \int_0^t \left\{\left[\left(\frac{\dot{s}}{2s} + a_{11} - a_{22}\right)^2 + \frac{1}{s}(a_{21} + sa_{12})^2\right]^{1/2} - \frac{\dot{s}}{2s} + a_{11} + a_{22}\right\} d\tau$$

Из этого неравенства вытекает следующая теорема.

Теорема. Если существует функция $s(t)$, положительная и непрерывно дифференцируемая на $(0, \infty)$ и постоянная величина M, такие, что

$$\int_0^t \left\{\left[\left(\frac{\dot{s}}{2s} + a_{11} - a_{22}\right)^2 + \frac{1}{s}(a_{11} + sa_{12})^2\right]^{1/2} - \frac{\dot{s}}{2s} + a_{11} + a_{22}\right\} d\tau \leqslant M \qquad (13)$$

при $t > 0$, то тривиальное решение системы (2) будет устойчиво по отношению к x

Таким же способом устанавливается достаточное условие устойчивости тривиального решения системы (2) по отношению y

$$\int_0^t \left\{\left[\left(\frac{\dot{s}}{2s} + a_{11} - a_{22}\right)^2 + \frac{1}{s}(a_{21} + sa_{12})^2\right]^{1/2} + \frac{\dot{s}}{2s} + a_{11} + a_{22}\right\} d\tau \leqslant M \qquad (14)$$

Рассмотрим некоторые частные признаки, вытекающие из доказанной теоремы.

1°. Если a_{21} / a_{12} отрицательна и непрерывно дифференцируема на $(0, \infty)$, то можно, например, положить $s = -a_{21} / a_{12}$. Тогда достаточное условие устойчивости тривиального решения системы (2) по отношению x можно записать в виде

$$\int_0^t \left[\left| a_{11} - a_{22} + \frac{a_{12}}{2a_{21}} \frac{d}{d\tau}\left(\frac{a_{21}}{a_{12}}\right)\right| + a_{11} + a_{22} - \frac{a_{12}}{2a_{21}} \frac{d}{d\tau}\left(\frac{a_{21}}{a_{12}}\right)\right] d\tau \leqslant M$$

В частности, если к системе (2) привести уравнение (1), то последние условия принимают вид

$$q(t) > 0, \qquad \int_0^\infty \left[\left| p + \frac{\dot{q}}{2q}\right| - \left(p + \frac{\dot{q}}{2q}\right)\right] d\tau < \infty$$

Это достаточное условие устойчивости по отношению x будет обобщением условия М. Я. Леонова, упомянутого в начале заметки.

2°. Для дифференциального уравнения (1) неравенство (13) записывается в такой форме:

$$\int_0^t \left\{\left[\left(p + \frac{\dot{s}}{2s}\right)^2 + \frac{(q - s)^2}{s}\right]^{1/2} - p - \frac{\dot{s}}{2s}\right\} d\tau \leqslant M$$

Отсюда вытекает такой признак: если существует положительная непрерывно дифференцируемая на $(0, \infty)$ функция $s(t)$, удовлетворяющая условиям

$$\int_0^\infty \frac{|q - s|}{\sqrt{s}} dt < \infty, \qquad \int_0^\infty \left[\left| p + \frac{\dot{s}}{2s}\right| - \left(p + \frac{\dot{s}}{2s}\right)\right] dt < \infty$$

то тривиальное решение системы (2) устойчиво по отношению x.

3°. Если существует постоянная $\sigma > 0$, удовлетворяющая требованию

$$\int_0^\infty |a_{21} + \sigma a_{12}| \, dt < \infty$$

то, положив $s(t) = \sigma$, получим достаточное условие устойчивости тривиального решения системы (2) по отношению x и y в виде

$$\int_0^t (|a_{11} - a_{22}| + a_{11} + a_{22}) \, d\tau \leqslant M \text{ для } t > 0 \qquad (M \text{ — любая постоянная})$$

Формулировка признаков устойчивости по отношению y, аналогичных признакам в *пп* 1° и 2° не представляет затруднений.

Поступила 24 XI 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Старжинский В. М. Обзор работ об условиях устойчивости. ПММ, 1954, т. XVIII, вып. 4.
2. Леонов М. Я. О квазигармонических колебаниях. ПММ, 1946, т. X, вып. 5—6.
3. Гинзбург И. П. О достаточных условиях устойчивости решений уравнения $y'' + py' + qy = 0$. Уч. зап. ЛГУ, Механика, 1949, № 114, вып. 17.
4. Старжинский В. М. Достаточные условия устойчивости одной механической системы с одной степенью свободы. ПММ, 1952, т. XVI, вып. 3