ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Ю. М. Филимонов (Н. Тагил)

Качественные методы теории дифференциальных уравнений Ляпунова [1] и Пуанкаре [2] лежат в основе многих работ по теории устойчивости движения при больших начальных возмущениях.

Метод общего качественного исследования траекторий в задачах устойчивости нелинейных систем был развит в работах Н. П. Еругина. Непосредственное отношение к данной статье имеют работы [3, 4]. В монографии [5] качественным методом, связанным с оценкой контурных интегралов, получен критерий асимптотической устойчивости при больших начальных возмущениях для нелинейных систем второго порядка. В статье получен такой критерий для нелинейных систем третьего порядка. При этом используется метод, связанный с оценкой контурных интегралов.

1. Рассмотрим нелинейную систему трех уравнений общего вида

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, x_3) \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{1.1}$$

где X_i — функции, обладающие непрерывными частными производными до второго порядка включительно при всех x_1, x_2, x_3. (Принятое условие гладкости правых частей системы может быть ослаблено.) Кроме того, предполагается, что начало координат единственное состояние равновесия $X_i(0, 0, 0) = 0$.

Пусть $x_i = x_i(u, t)$ $(i = 1, 2, 3)$ однопараметрическое семейство решений системы (1.1). Введем обозначения

$$A_i = \sum_{j,k} (-1)^{[i,\, j,\, k]} \frac{\partial x_k}{\partial t}\frac{\partial x_j}{\partial u} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

Здесь суммирование ведется по всевозможным парам (j, k) чисел 1, 2, 3, удовлетворяющих условию: $j \neq k$; $j, k \neq i$. Под символом $[i, j, k]$ понимается число инверсий в перестановке i, j, k

$$B_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} A_j \qquad (i = 1, 2, 3)$$

Здесь $\| a_{ij} \|_1^3$ постоянная симметричная матрица, имеющая положительные собственные числа

$$\beta_i = B_i / \sqrt{A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

Рассмотрим какую-нибудь поверхность, составленную интегральными кривыми системы (1.1), и пусть $x_i = x_i(u, t)$ ее параметрическое представление. Взяв произвольный замкнутый контур на этой поверхности Г при помощи формулы Грина, можно убедиться в справедливости равенства

$$\oint_\Gamma (\beta_2X_3 - \beta_3X_2)\,dx_1 + (\beta_3X_1 - \beta_1X_3)\,dx_2 + (\beta_1X_2 - \beta_2X_1)\,dx_3 =$$
$$= \iint_\sigma \sum_{i,\,k=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \left(a_{ik}\frac{\partial X_j}{\partial x_j} - a_{jk}\frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right) \frac{A_iA_k}{\sqrt{A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3}}\,du\,dt \tag{1.2}$$

Здесь σ — область значений (u, t), соответствующая поверхности, заключенной внутри контура Г. Двойная сумма, стоящая под знаком двойного интеграла в формуле (1.2), будет квадратичной формой относительно величин A_i $(i = 1, 2, 3)$. Назовем ее квадратичной формой системы (1.1), отвечающей матрице $\| a_{ij} \|_1^3$.

Заметим, что в качестве матрицы $\| a_{ij} \|_1^3$ можно выбрать единичную $\| \delta_{ij} \|_1^3$, где $\delta_{ii} = 1$, $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Тогда квадратичная форма системы (1.1), отвечающая этой матрице, будет иметь вид

$$\left(\frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \frac{\partial X_3}{\partial x_3}\right)A_1^2 + \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_3}{\partial x_3}\right)A_2^2 + \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2}\right)A_3^2 -$$
$$- \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_2} + \frac{\partial X_2}{\partial x_1}\right)A_1A_2 - \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_3} + \frac{\partial X_3}{\partial x_1}\right)A_1A_3 - \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_3} + \frac{\partial X_3}{\partial x_2}\right)A_2A_3 \tag{1.3}$$

Теорема. (а). Если решение $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ системы (1.1) асимптотически устойчиво[1] относительно возмущений из некоторой окрестности точки $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

(б) Если можно указать постоянную симметричную матрицу $\| a_{ij} \|_1^3$, имеющую положительные собственные числа, и такую, что квадратичная форма системы (1.1), отвечающая этой матрице, неположительна.

(в) Если вне какой-нибудь сферы с центром в начале координат правые части системы (1.1) удовлетворяют неравенству $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 \geqslant q$, где q — положительная постоянная, то решение $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ системы (1.1)асимптотически устойчиво при любых начальных возмущениях.

Доказательство. По условию теоремы (а) решение $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ системы (1.1) асимптотически устойчиво относительно возмущений из некоторой (может быть, достаточно малой) окрестности точки $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Покажем, что в условиях теоремы область притяжения точки $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ охватывает все пространство $\{x_1, x_2, x_3\}$. Предположим от противного, что область притяжения не охватывает всего пространства $\{x_1, x_2, x_3\}$. Тогда вследствие непрерывной зависимости решений от начальных данных граница области притяжения — замкнутое множество. Поэтому при сделанном предположении (а) можно указать точку (x_{10}, x_{20}, x_{30}), лежащую на границе области устойчивости и ближайшую к началу координат. Рассмотрим отрезок радиус-вектора точки (x_{10}, x_{20}, x_{30}), примыкающий к этой точке и столь малой длины, что интегральные кривые не касаются этого отрезка (такой отрезок найдется, так как интегральная кривая, проходящая через точку, пересекает ее радиус-вектор ортогонально).

Рассмотрим, далее, поверхность, составленную интегральными кривыми, пересекающими указанный отрезок. При помощи однопараметрического семейства решений системы (1.1) уравнение этой поверхности может быть записано в виде

$$x_i = x_i(u, t) \quad (i = 1, 2, 3)$$

Для определенности предположим, что уравнение построенного отрезка будет

$$x_i = x_i(u, 0) \qquad (i = 1, 2, 3) \; u \in [0, 1]$$

При этом меньшим значениям u отвечают точки, расположенные ближе к началу координат.

Отметим, что точки отрезка $x_i = x_i(u, 0)$, $(i = 1, 2, 3)$, $u \in [0, 1]$ лежат в области притяжения точки $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. В дальнейшем будем рассматривать ту часть построенной поверхности, которая отвечает положительным значениям t (для краткости будем называть ее интегральной поверхностью).

В точках интегральной кривой $x_i = x_i(1, t)$ $(i = 1, 2, 3)$ будем строить ортогональные траектории, лежащие на интегральной поверхности. Пусть некоторая ортогональная траектория, выходящая из точки интегральной кривой $x_i = x_i(1, t)$, отвечающей положительному значению t, равному T, пересекает некоторую интегеральную кривую $x_i = x_i(u_0, t)$, $u_0 \in [0,1]$ в точке, также отвечающей положительному значению t. Тогда, исходя из любой точки интегральной кривой $x_i = x_i(1, t)$, отвечающей значениям $t \geqslant T$, можно построить отрезок ортогональной траектории, лежащей на интегральной поверхности, длина которого не меньше расстояния между положительными полутраекториями интегральных кривых $x_i = x_i(1, t)$ и $x_i = x_i(u_0, t)$. Пусть это расстояние равно ε. В силу сделанного предположения $\varepsilon > 0$. Построим отрезок ортогональной траектории, лежащий на интегральной поверхности, выходящий из точки с координатами $x_i = x_i(1, T)$ $(i = 1, 2, 3)$ длины ε.

Отметим интегральную кривую, проходящую через конец построенного отрезка ортогональной траектории; пусть это будет интегральная кривая $x_i = x_i(u^*, t)$, $u^* \in [0,1)$. Нетрудно видеть, что выбором вместо T достаточно больших значений, величину u^* можно сделать сколь угодно близкой к единице.

На интегральной поверхности рассмотрим замкнутый контур Γ, образованный

[1] Проверка этого условия может быть выполнена при помощи известных методов Ляпунова [1].

линиями: отрезками интегральных кривых $x_i = x_i(1, t)$, $x_i = x_i(u^*, t)$; построенным отрезком ортогональной траектории, длины ε, отрезком $x_i = x_i(u, 0)$, $u \in [u^*, 1]$.

Рассмотрим интеграл по этому контуру

$$\oint\limits_{\Gamma} (\beta_2 \chi_3 - \beta_3 X_2)\, dx_1 + (\beta_3 X_1 - \beta_1 X_3)\, dx_2 + (\beta_1 X_2 - \beta_2 X_1)\, dx_3 \tag{1.4}$$

По формуле (1.2), вследствие условия (б), заключаем, что интеграл (1.4) есть величина неположительная. С другой стороны, оценим значение интеграла (1.4) непосредственно. Для этого заметим, что подынтегральное выражение интеграла будет векторно-скалярным произведением векторов с компонентами

$$(X_1,\ X_2,\ X_3)\,(\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3)\,(dx_1,\ dx_2,\ dx_3)$$

Поэтому вдоль отрезков интегральных кривых системы (1.1) интеграл равен нулю. Интеграл вдоль отрезка $x_i = x_i\,(u, 0)$, $u \in [u^*, 1]$ по абсолютной величине меньше, чем

$$\sqrt{\frac{C_1}{C_2}} \max_{u \in [u^*, 1]} \|X\|_2 \|x(1, 0) - x(u^*, 0)\|_2 = N(u^*)$$

Здесь c_1 — наибольшее собственное число определенно положительной квадратичной формы $\|B\|_2^2$ величин A_i ($i = 1, 2, 3$) а c_2 — наименьшее собственное число определенно положительной квадратичной формы

$$S = \sum_{i,\, j=1}^{3} a_{ij} A_i A_j \qquad \|a\|_2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^3)^{\frac{1}{2}}$$

Интеграл вдоль отрезка ортогональной траектории, вследствие условия (*в*), больше, чем $\varepsilon \sqrt{qc_2}$.

Действительно, записав интеграл вдоль отрезка ортогональной траектории (ε) в векторной форме, последовательно найдем

$$\int\limits_{\varepsilon} (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{X}) \cdot d\mathbf{r} = \int\limits_{\varepsilon} (\mathbf{X} \times d\mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\beta} = \int\limits_{\varepsilon} \|X\|_2 \, \|\beta\|_2 \frac{S}{\|\beta\|_2 \|A\|_2} dr \geqslant \int\limits_{\varepsilon} \sqrt{qc_2}\, dr = \varepsilon \sqrt{qc_2}$$

Сопоставляя полученные оценки, приходим к выводу, что интеграл (1.4) удовлетворяет неравенству

$$\oint\limits_{\Gamma} (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{X}) \cdot d\mathbf{r} \geqslant \varepsilon \sqrt{qc_2} - N(u^*) \tag{1.5}$$

Теперь заметим, что выбором контура Г величину $N(u^*)$ можно сделать сколь угодно малой, оставляя неизменной оценку криволинейного интеграла по соответствующей ортогональной траектории. Вдоль такого контура интеграл (1.4) в силу неравенства (1.5) имел бы положительное значение, но это невозможно.

Полученное противоречие доказывает теорему.

2. В условиях доказанной теоремы оценим возможные отклонения вдоль траекторий с начальными данными, удовлетворяющими неравенству

$$\|x\|_2 \leqslant r_0 \tag{2.1}$$

Пусть вне области (2.1) величина $\|X\|_2^2$ ограничена снизу положительным числом q. Вследствие непрерывной зависимости решений от начальных данных на сфере $\|x\|_2 = r_0$ существует точка (x_{10}, x_{20}, x_{30}), через которую проходит интегральная кривая с максимально возможным отклонением

$$\max \|x(t)\|_2 = R \qquad (0 \leqslant t < \infty) \tag{2.2}$$

Интегральная кривая, проходящая через точку (x_{10}, x_{20}, x_{30}), пересекает радиус-вектор в этой точке ортогонально. Действительно, пусть это не так. Отметим точку указанной интегральной кривой, расстояние которой до начала координат равно R. Очевидно, радиус-вектор в этой точке пересекается интегральной кривой ортогонально. Поэтому на продолжении ее радиус-вектора в силу непрерывной зависимости решений от начальных данных найдется точка, через которую проходит интегральная кривая, выходящая из области (2.1). Это противоречит смыслу числа R.

Рассмотрим интегральную поверхность, образованную интегральными кривыми, пересекающими достаточно малый отрезок радиус-вектора точки (x_{10}, x_{20}, x_{30}), примыкающий к этой точке. Как и выше, запишем уравнение при помощи однопараметрического семейства решений системы (1.1) в виде

$$x_i = x_i(u, t), \quad (i = 1, 2, 3), \quad u \in [0, 1]$$

Установим одно свойство ортогональных траекторий на таких поверхностях. В координатах u, t Пуанкаре [2] уравнение ортогональных траекторий на интегральной поверхности может быть записано в виде

$$x_i = x_i(u, t(u)) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

где функция $t(u)$ — решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dt}{du} = -\left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x_i}{\partial u} X_i\right) : \sum_{i=1}^{3} X_i^2 \tag{2.3}$$

В области $0 \leqslant u \leqslant t$, $0 \leqslant t < \infty$ правая часть уравнения (2.3), вследствие условия гладкости правых частей системы (1.1) и отсутствия особых точек, отличных от начала координат, имеет непрерывные частные производные [6] по t и u. В таком случае решение уравнения (2.3) с начальными данными u_0, t_0 либо определено для всех $u \in [0, 1]$, либо имеет вертикальную асимптоту [7] при некотором значении $u \in [0, 1]$. Так что, исходя из любой точки интегральной кривой $x_i = x_i(1, t)$, $(i = 1, 2, 3)$, можно построить ортогональную траекторию, лежащую на интегральной поверхности, которая либо пересекает интегральную кривую $x_i = x_i(0, t)$, $(i = 1, 2, 3)$, либо при продолжении входит в область (2.1). Из последующих рассуждений станет ясно, что можно ограничиться рассмотрением лишь первой возможности.

Через точку интегральной кривой, в которой выполняется равенство (2.2), проведем ортогональную траекторию, лежащую на интегральной поверхности, до пересечения с интегральной кривой $x_i = x_i(0, t)$. Обозначим расстояние точки пересечения до начала координат через R_1.

Рассмотрим замкнутый контур L, образованный линиями: построенным отрезком ортогональной траектории, отрезками интегральных кривых, проходящими через его концы, и отрезком радиус-вектора точки (x_{10}, x_{20}, x_{30}), длину которого обозначим через l_1. Непосредственная оценка дает

$$\oint_L (\beta_2 X_3 - \beta_3 X_2)\, dx_1 + (\beta_3 X_1 - \beta_1 X_3)\, dx_2 + (\beta_1 X_2 - \beta_2 X_1)\, dx_1 \geqslant \sqrt{qc_2}\,(R - R_1) - N_1$$

$$\left(N_1 = \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \max_{\|x\| \leqslant r_0} \|X\|_2 l_1\right) \tag{2.4}$$

Учитывая, что интеграл слева в неравенстве (2.4) на основании формулы (1.2) и условия (б) есть величина неположительная, получим неравенство

$$\sqrt{qc_2}\,(R - R_1) - N_1 \leqslant 0 \tag{2.5}$$

При $R_1 \leqslant r_0$ найдем

$$\sqrt{qc_2}\,(R - r_0) - N_1 \leqslant 0 \tag{2.6}$$

В этом случае, учитывая, что $l_1 < r_0$, из (2.6) получим искомую оценку

$$R \leqslant r_0 + \frac{N}{\sqrt{qc_2}} \qquad \left(N = \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \max_{\|x\|_2 \leqslant r_0} \|X\|_2 r_0\right) \tag{2.7}$$

Пусть $R_1 > r_0$. Рассмотрим область $\|x\|_2 \leqslant r_1$ такую, что интегральные кривые с начальными данными из этой области имеют максимально возможное отклонение, равное R_1. Обозначим через R_2, l_2 величины, имеющие такое же значение по отношению к области $\|x\|_2 \leqslant r_1$, как R_1, l_1 к области (2.1). Здесь снова могут представиться два случая: $R_2 > r_0$ и $R_2 \leqslant r_0$.

В первом случае справедливо неравенство

$$\sqrt{qc_2}\,(R_1 - R_2) - N_2 \leqslant 0 \qquad \left(N_2 = \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \max_{\|x\|_2 \leqslant r_0} \|X\|_2 l_2\right) \tag{2.8}$$

Во втором — неравенство

$$\sqrt{qc_2}\,(R_1 - r_0) - N_2 \leqslant 0 \tag{2.9}$$

Если имеет место неравенство (2.9), то с учетом неравенства (2.5) снова приходим к оценке (2.7). Действительно, складывая неравенства (2.5) и (2.8) почленно, получим

$$\sqrt{qc_2}\,(R - r_0) - (N_1 + N_2) \leqslant 0$$

Замечая, что $N_1 + N_2 < N$, убеждаемся в справедливости неравенства (2.7). При продолжении таких рассуждений могут представиться две возможности. Первая — на некотором конечном шагу окажется, что соответствующая величина, скажем R_n, не превосходит r_0. В этом случае имеем следующие n неравенств:

$$\sqrt{qc_2}\,(R - R_1) - N_1 \leqslant 0$$

$$\sqrt{qc_2}\,(R_1 - R_2) - N_2 \leqslant 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sqrt{qc_2}\,(R_{n-1} - R_n) - N_n \leqslant 0$$

Складывая эти неравенства и учитывая, что

$$R_n \leqslant r_0,\ N_1 + N_2 + \ldots + N_n < N$$

снова получим оценку (2.7). Вторая возможность состоит в том, что $R_n < r_0$ при любом n.

Покажем, что всегда может быть реализована первая возможность. Для этого достаточно доказать, что величины $l_1, l_2, \ldots$ в некоторой ограниченной замкнутой области, не содержащей начала координат, можно выбирать не меньшими некоторого положительного предела.

Предположим, что интегральные кривые с начальными данными из области $\| x \|_2 \leqslant d$ не покидают области (2.1). Такая область, очевидно, существует. Рассмотрим произвольную точку области $d \leqslant \| x \|_2 \leqslant r_0$. Интегральная кривая, проходящая через эту точку, имеет в этой точке вполне определенную касательную и, следовательно, вполне определенную нормальную плоскость P. В силу непрерывности правых частей системы (1.1) можно указать такое положительное число δ, что через точки P, лежащие внутри и на границе сферы, описанной с центром в рассматриваемой точке радиусом δ, проходят интегральные кривые, пересекающие P под углом, не меньшим $1/4\pi$. Если под δ понимать наибольшее из возможных значений, то δ явится вполне определенной, непрерывной функцией в области $d \leqslant \| x \|_2 \leqslant r_0$. Так как функция δ в этой области принимает строго положительные значения, то наименьшее ее значение будет также строго положительным. Обозначим наименьшее значение функции δ в области $d \leqslant \| x \|_2 \leqslant r_0$ через δ_0. Отсюда следует, что величины $l_1, l_2, \ldots$ можно выбирать не меньшими δ_0. При таком выборе величин $l_1, l_2, \ldots$ через конечное число шагов получим

$$R_n \leqslant r_0 \quad \left(n \leqslant E\left(\frac{r_0 - d}{\delta_0}\right) + 1\right)$$

Этим оценка (2.7) доказана.

Замечание 2.1. Анализ доказательства теоремы и неравенства (2.7) показал бы, что для асимптотической устойчивости решения $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ системы (1.1) относительно начальных возмущений из области $\| x \|_2 \leqslant r_0$ достаточно, чтобы условие (б) теоремы выполнялось в области $\| x \|_2 \leqslant R$, где R — любое число, удовлетворяющее неравенству

$$R \geqslant r_0 + \frac{N}{\sqrt{qc_2}}$$

Входящие в это неравенство величины имеют то же значение, что и выше.

Замечание 2.2. В работе ([5], стр. 110) как следствие одной общей теоремы приводится критерий асимптотической устойчивости невозмущенного движения относительно любых начальных возмущений, состоящий в том, чтобы матрица третьего порядка

$$\left\| \frac{\partial X_i}{\partial x_k} + \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \right\|_1^3 \tag{2.10}$$

имела отрицательные собственные числа, ограниченные сверху некоторой отрицательной постоянной. Вычисления показывают, если матрица (2.10) обладает таким свойством, то квадратичная форма системы (1.1), отвечающая единичной матрице (1.3), будет определенно отрицательной. Обратное утверждение неверно, в чем можно убедиться на простых примерах. Таким образом, если в качестве матрицы, о которой идет речь в нашей теореме, взять единичную матрицу $\| \delta_{ij} \|_1^3$, то получим критерий асимптотической устойчивости при любых начальных возмущениях, налагающий на системы (1.1) условия несколько слабее, чем приведенный критерий из работы [5].

3. *Пример* [8]. Рассмотрим систему

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 - f(x_1), \qquad \frac{dx_2}{dt} = x_3 - x_1, \qquad \frac{dx_3}{dt} = -ax_1 \tag{3.1}$$

$$a > 0, \qquad f'(x_1) > a \tag{3.2}$$

Система первого приближения, составленная для уравнений (3.1) в точке $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, имеет вид

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 - f'(0)\, x_1, \qquad \frac{dx_2}{dt} = x_3 - x_1, \qquad \frac{dx_3}{dt} = -ax_1$$

В силу условия (3.2) характеристическое уравнение этой системы имеет корни с отрицательными действительными частями. Отсюда на основании теоремы Ляпунова ([1], стр. 127) заключаем, что решение $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ системы (3.1) асимптотически устойчиво относительно начальных возмущений из некоторой окрестности точки $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Квадратичная форма системы (3.1), отвечающая матрице

$$\| a_{ij} \|_1^3 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & a & 2a^2 \end{Vmatrix}$$

имеет вид

$$-[f'(x_1) + a]\, A_2^2 - 2a^2 f'(x_1)\, A_3^2 - 2a\, [f'(x_1) + a]\, A_2 A_3 \tag{3.3}$$

Учитывая условие (3.2), на основании критерия Сильвестра, находим, что квадратичная форма величин A_2, A_3 будет определенно отрицательной.

Далее заметим, что якобиан системы (3.1) при любых значениях x_1, x_2, x_3 отличен от нуля, он равен $-a$. Отсюда нетрудно получить, что вне всякой сферы с центром в начале координат величина $\| X \|_2$ для системы (3.1) ограничена снизу некоторым положительным числом. Таким образом, для системы (3.1) при условии (3.7) выполнены все условия доказанной теоремы. Следовательно, решение этой системы $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ асимптотически устойчиво относительно любых начальных возмущений.

В заключение приношу благодарность Н. Н. Красовскому за внимание и ценные советы по данной работе.

Поступила 7 IV 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Гостехиздат, 1950.
2. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. Гостехиздат, 1947.
3. Еругин Н. П. О некоторых вопросах теории устойчивости движения и качественной теории дифференциальных уравнений. ПММ, 1950, т. XIV, вып. 5.
4. Еругин Н. П. Качественное исследование интегральных кривых систем дифференциальных уравнений. ПММ, 1950, XIV, вып. 6.
5. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. Физматгиз, М., 1959.
6. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Гостехиздат, 1947.
7. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. Гостехиздат, 1953.
8. Плисс В. А. Некоторые проблемы теории устойчивости в целом. Изд-во ЛГУ, 1958.