Определив φ для любой точки P, находящейся вдали от тора, можно написать полное выражение потенциала скоростей Φ с учетом временного множителя и интенсивности звука J_0 в виде

$$\Phi = J_0 e^{i(kx+\sigma t)} + J_0 \frac{kQ}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{i(\sigma t - kR_0 - \pi)}}{R_0} + J_0 \frac{k^2 Q}{4\pi} \frac{e^{i(\sigma t - kR_0 - \pi)}}{R_0} + Q(k^3) \tag{4.8}$$

Определяя действительную часть, имеем

$$\Phi = J_0 \cos(kx + \sigma t) + J_0 \frac{kQ}{4} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\cos(\sigma t - kR_0 - \pi)}{R_0} + $$

$$+ J_0 \frac{k^2 Q}{4} \frac{\cos(\sigma t - kR_0 - \pi)}{R_0} + O(k^3) \tag{4.9}$$

$$(R_0 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

Из формулы (4.9) видно, что потенциал скоростей звуковой волны в любой точке, находящейся на большом расстоянии от тора, равен сумме трех потенциалов скоростей, причем первый член представляет собой потенциал скоростей плоской звуковой волны, исходящей от бесконечности и распространяющейся с постоянной скоростью σ / k по направлению отрицательной оси Ox, второй член — от диполя, находящегося в начале координат, а третий член — от точечного источника, находящегося также в начале координат.

Таким образом, задача, поставленная в § 1, решена формулой (4.9).

Поступила 21 III 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Ламб Г. Гидродинамика. Гостехиздат, 1947.

ЦИКЛИЧЕСКИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО ИНТЕГРАЛА ПЛОЩАДЕЙ

А. А. Богоявленский (Москва)

В работе Чаплыгина [1] дано обобщение теоремы площадей и получены соответствующие интегралы. Там же указано на возможность обобщения полученных результатов в смысле Чаплыгина. Наиболее типичные обобщенные интегралы площадей приведены в §§ 1, 2, 4 работы [1].

Не рассматривая всех обобщений, следующих из работы [1], можно показать, что указанные интегралы суть интегралы циклических перемещений по Четаеву [2].

Сохраним обозначения величин и определения, принятые Чаплыгиным.

К § 1 работы [1]. Свойства связей, наложенных на систему, раскрываются посредством тех возможных перемещений, которые состоят из вращения системы материальных точек без изменения конфигурации вокруг прямой Az.

Пусть этому вращению соответствует угол $\delta\theta$.

Положение механической системы можно определить по Пуанкаре—Четаеву зависимыми переменными

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \beta_i^k, \quad x', \quad y', \quad z' \quad (i, k = 1, 2) \tag{1}$$

где β_i^k — косинусы углов между системой осей $Axyz$ и вновь введенной прямоугольной системой осей $Ax'y'z'$, ось z' которой совпадает с прямой Az и система поворачивается вокруг этой оси на угол $\delta\theta$. Нижний индекс относится к осям x, y, z, верхний — к осям x', y', z'.

Переменные β_i^k удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\frac{d\beta_i^1}{dt} = \beta_i^2 \frac{d\theta}{dt}, \qquad \frac{d\beta_i^2}{dt} = -\beta_i^1 \frac{d\theta}{dt} \qquad (i, k = 1, 2) \tag{2}$$

Действительные перемещения определяются независимыми переменными η_i, за которые можно взять

$$\frac{d\alpha}{dt}, \quad \frac{d\beta}{dt}, \quad \frac{d\gamma}{dt}, \quad \frac{d\theta}{dt}, \quad \eta_\nu \qquad (\nu = 5, 6, \ldots)$$

Здесь η_ν — часть проекций скоростей материальных точек в подвижной системе координат $x'y'z'$ на эти оси или соответственно выбранные независимые переменные, характеризующие движение механической системы в этой системе координат.

Изменение произвольной функции f от переменных (1) на возможном перемещении можно определить так:

$$\delta f = \sum_{j=1}^{4} \omega_j X_j f + \Sigma \omega_\nu X_\nu f$$

Параметры возможных перемещений

$$\omega_1 = \delta\alpha, \quad \omega_2 = \delta\beta, \quad \omega_3 = \delta\gamma, \quad \omega_4 = \delta\theta, \quad \omega_\nu \quad (\nu = 5, 6, \ldots)$$

Операторы соответствующих перемещений

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial\alpha}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial\beta}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial\gamma}, \quad X_4 = \sum_{i=1}^{2}\left(\beta_i^2 \frac{\partial}{\partial\beta_i^1} - \beta_i^1 \frac{\partial}{\partial\beta_i^2}\right), \quad X_{\nu\,(\nu=5,\,6\,\ldots)}$$

За параметры ω_ν возможных перемещений можно взять бесконечно малые изменения относительных координат материальных точек в системе осей $x'y'z'$.

Тогда вид операторов X_ν, подобно X_i $(i = 1, 2, 3)$, очевиден. Операторы X_ν не зависят от переменных α, β, γ, β_i^k и составляют подгруппу относительных перемещений. Возможные перемещения образуют абелеву группу.

При соответствующих связях возможно выбрать параметры ω_ν так, что число их будет меньше числа всех относительных координат. Это замечание следует иметь в виду во всех параграфах.

Из выражения живой силы системы T видно, что

$$X_4(T) = 0$$

Силы, наложенные на систему, таковы, что точки приложения двух приведенных сил могут быть выбраны независимо от β_i^k. Тогда

$$X_4(U) = 0$$

Перемещение X_4 есть циклическое перемещение по Четаеву. Этому перемещению соответствует первый интеграл Чаплыгина (2) из работы [1]

$$\frac{\partial L}{\partial \eta_4} = \text{const}$$

К § 2 работы [1]. Пусть, как и в § 1, вращению части (I) системы соответствует угол $\delta\theta$ и вращению части (II) — угол $\delta\varphi$.

Положение механической системы можно определить зависимыми переменными

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \alpha',\ \beta',\ \gamma',\ \beta_i^k,\ \alpha_i^k,\ x_1',\ y_1',\ z_1',\ x_2',\ y_2',\ z_2' \qquad (3)$$

где β_i^k, α_i^k — косинусы углов осей для (I) и (II) частей системы соответственно, x_1', y_1', z_1', x_2', y_2', z'_2 — относительные координаты материальных точек в соответствующих системах осей, введенных, как для § 1.

Переменные β_i^k удовлетворяют уравнениям (2), α_i^k — тем же уравнениям после замены α_i^k, φ вместо β_i^k θ.

Возможные перемещения системы определим соотношением

$$\delta\varphi = k\delta\theta, \qquad (k = L : L')$$

Действительные перемещения характеризуются переменными

$$\frac{d\alpha}{dt},\ \frac{d\beta}{dt},\ \frac{d\gamma}{dt},\ \frac{d\alpha'}{dt},\ \frac{d\beta'}{dt},\ \frac{d\gamma'}{dt},\ \frac{d\theta}{dt},\ \eta_{\nu\,(\nu=8,\,9,\,\ldots)}$$

Величины η_ν имеют тот же смысл, что и в § 1 для (I) и (II) частей системы.

Вращения $d\theta / dt$ и $d\varphi / dt$ этих частей системы связаны тем же соотношением, что и возможные перемещения

$$\frac{d\varphi}{dt} = k\,\frac{d\theta}{dt}$$

Изменение произвольной функции f от переменных (3) на возможном перемещении

$$\delta f = \sum_{j=1}^{7} \omega_j X_j f + \Sigma \omega_\nu X_\nu f$$

Параметры возможных перемещений

$$\omega_1 = \delta\alpha,\ \omega_2 = \delta\beta,\ \omega_3 = \delta\gamma,\ \omega_4 = \delta\alpha',\ \omega_5 = \delta\beta',\ \omega_6 = \delta\gamma',\ \omega_7 = \delta\theta,\ \omega_\nu \quad (\nu=8,9,\ldots)$$

Операторы соответствующих перемещений

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial\alpha},\quad X_2 = \frac{\partial}{\partial\beta},\quad X_3 = \frac{\partial}{\partial\gamma},\quad X_4 = \frac{\partial}{\partial\alpha'},\quad X_5 = \frac{\partial}{\partial\beta'},\quad X_6 = \frac{\partial}{\partial\gamma'}$$

$$X_7 = \sum_{i=1}^{2}\left\{\left(\beta_i^2 \frac{\partial}{\partial\beta_i^1} - \beta_i^1 \frac{\partial}{\partial\beta_i^2}\right) + k\left(\alpha_i^2 \frac{\partial}{\partial\alpha_i^1} - \alpha_i^1 \frac{\partial}{\partial\alpha_i^2}\right)\right\},\quad X_\nu \quad (\nu=8,9,\ldots)$$

За параметры ω_ν возможных перемещений можно взять бесконечно малые изменения относительных координат материальных точек в соответствующих системах осей. Вид операторов X_ν очевиден. Эти операторы не зависят от переменных α, β, γ, α', β', γ', β_i^k, α_i^k и составляют подгруппы относительных перемещений механической системы. Возможные перемещения образуют абелеву группу.

Из выражения живой силы и силовой функции видно, что

$$X_7 (T + U) = 0$$

Перемещение X_7 есть циклическое по Четаеву.

Этому перемещению соответствует первый интеграл Чаплыгина (4) из работы [1]

$$S + kS' = \text{const}$$

Эти результаты легко распространяются на систему, рассмотренную Чаплыгиным в § 3 работы [1].

К § 4 работы [1]. Результаты этого параграфа продолжены дальше автором статьи в работе [3] в том смысле, что указанный интеграл найден при других силах и связях, наложенных на механическую систему. Поэтому циклические перемещения будем находить при этих новых условиях. Для условий Чаплыгина анализ сохраняется.

Пусть, как в § 1, вращению системы (I) соответствует угол $\delta\theta$, поступательному перемещению системы (II) вдоль прямой n — перемещение на расстояние δl в предположении неизменяемости систем (I) и (II).

Примем обозначения части величин соответственно § 1 и 2.

Положение механической системы определим зависимыми переменными

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \beta_i^k,\ x_1',\ y_1',\ z_1',\ x_2,\ y_2,\ z_2 \qquad (4)$$

где x_2, y_2, z_2 — координаты материальных точек системы (II) в системе осей $Axyz$

Возможные перемещения системы определим соотношением

$$\delta l = \varkappa\delta\theta, \qquad \varkappa^2 = a^2 + b^2$$

Пусть параметры действительного перемещения

$$\frac{d\alpha}{dt},\quad \frac{d\beta}{dt},\quad \frac{d\gamma}{dt},\quad \frac{d\theta}{dt},\quad \eta_\nu \qquad (\nu=5,6,\ldots)$$

Вращение системы (I) и поступательное перемещение системы (II) связаны тем же соотношением, что и возможные перемещения

$$\frac{dl}{dt} = \varkappa \frac{d\theta}{dt}, \qquad \varkappa^2 = a^2 + b^2 \qquad (5)$$

Переменные β_i^k удовлетворяют уравнениям (2), переменные x_2, y_2 в силу (5) — уравнениям

$$\frac{dx_2}{dt} = -b\frac{d\theta}{dt} + \frac{a}{\varkappa}\frac{dh}{dt}, \qquad \frac{dy_2}{dt} = a\frac{d\theta}{dt} + \frac{b}{\varkappa}\frac{dh}{dt}$$

Здесь dh/dt — скорость изменения проекции на прямую AC расстояния от A до материальной точки системы (II).

Изменение функции положения системы f от переменных (4) на возможном перемещении

$$\delta f = \sum_{j=1}^{4} \omega_j X_j f + \Sigma \omega_\nu X_\nu f$$

Параметры возможных перемещений

$$\omega_1 = \delta\alpha, \quad \omega_2 = \delta\beta, \quad \omega_3 = \delta\gamma, \quad \omega_4 = \delta\vartheta, \ \omega_\nu \qquad (\nu = 5, 6, \ldots)$$

Операторы соответствующих перемещений

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial\alpha}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial\beta}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial\gamma}$$

$$X_4 = \sum_{i=1}^{2} \left(\beta_i^2 \frac{\partial}{\partial\beta_i^1} - \beta_i^1 \frac{\partial}{\partial\beta_i^2}\right) + a\Sigma \frac{\partial}{\partial y_2} - b\Sigma \frac{\partial}{\partial x_2}, \qquad X_\nu \qquad (\nu = 5, 6, \ldots)$$

За параметры ω_ν возможных перемещений можно взять бесконечно малые изменения относительных координат материальных точек системы (I), как в § 1, 2 и проекций δh на прямую AC расстояний от A до материальных точек системы (II).

Вид операторов X_ν для системы (I) очевиден, а для системы (II)

$$X_\nu = \frac{1}{\varkappa}\left(a \frac{\partial}{\partial x_2} + b \frac{\partial}{\partial y_2}\right)$$

Эти операторы не зависят от переменных α, β, γ, β_i^k и составляют подгруппы относительных перемещений систем (I) и (II).

Возможные перемещения образуют абелеву группу.

Из выражения живой силы и силовой функции системы следует

$$X_4 (T + U) = 0$$

X_4 есть циклическое перемещение по Четаеву. Ему соответствует первый интеграл Чаплыгина (11) из работы [1] или (5) из работы [3]

$$\frac{\partial L}{\partial \eta_4} = \text{const}$$

Для указанных Чаплыгиным возможностей обобщения теоремы площадей полученные вычисления приложимы.

Пользуясь случаем, сделаем одно замечание к § 9 работы [1].

Согласно теореме площадей производные сумм моментов количеств движения оболочки записаны под видом ([1], стр. 52).

$$\frac{d}{dt}(J_x p - Mav) = -aN_y, \qquad \frac{d}{dt}(J_y q + Mau) = aN_x$$

Эта запись неточна. Второе уравнение должно быть записано так:

$$\frac{d}{dt}(J_y q + Mau) = aN_x + aMg \sin\varphi$$

Соответственно должны измениться получаемые из этого уравнения интегралы. Однако интегрирование найденных Чаплыгиным дифференциальных уравнений возможно в квадратурах только для случая $\varphi = 0$, т. е. все пропущенные члены выпадают. Эта описка не повлияла на окончательный вид формул.

Поступила 8 V 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Чаплыгин С. А. О некотором возможном обобщении теоремы площадей с приложением к задаче о катании шаров. Соб. соч., т. 1, Гостехиздат, 1948, стр. 26—56.
2. Четаев Н. Г. Об уравнениях Пуанкаре. ПММ, 1941, т. V, вып. 2, стр. 253—262.
3. Богоявленский А. А. Об одном виде обобщенного интеграла площадей. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 3, стр. 422—423.