ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКИХ ЗВУКОВЫХ ВОЛН (ДЛЯ ДЛИННЫХ) НА ТОРЕ

П. И. Цой (Тула)

§ 1. Рассмотрим систему плоских звуковых волн (для длинных), движущихся в направлении отрицательной оси (фиг. 1) и падающих на неподвижный тор (с радиусом сечения a и радиусом тора l) с осью симметрии, совпадающей с осью Ox, относительно координатной системы отсчета $Oxyz$.

В случае простого гармонического движения с временным множителем $e^{i\sigma t}$ потенциал скоростей Φ звуковых волн определяется уравнением

$$\triangle \Phi + k^2 \Phi = 0 \qquad \left(k = \frac{\sigma}{c}\right) \tag{1.1}$$

с граничным условием на поверхности тора Σ в виде

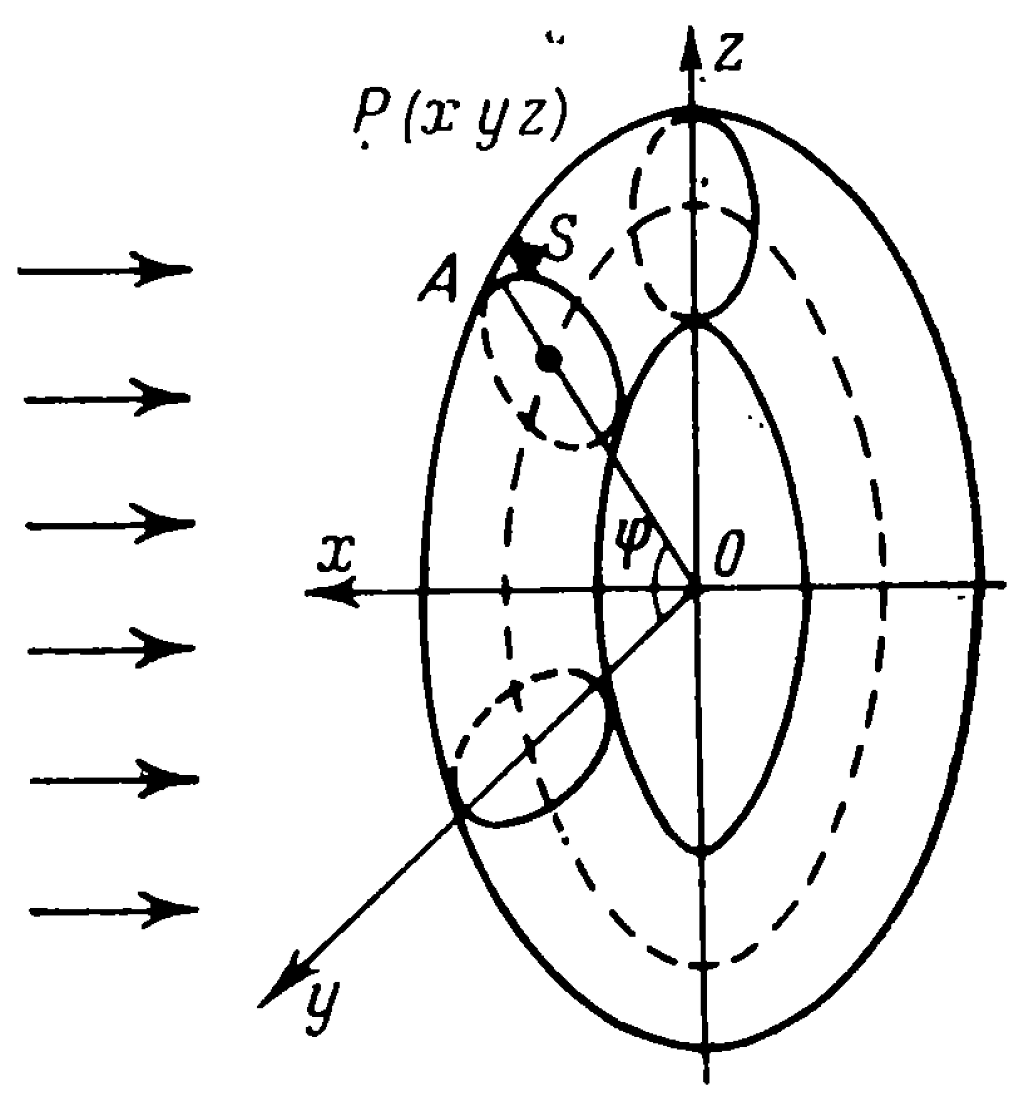
$$\partial \Phi / \partial n = 0 \tag{1.2}$$

Здесь c — скорость звука, n — внутренняя нормаль к поверхности тора Σ.

Будем искать решение уравнения (1.1) в виде

$$\Phi = e^{ikx} + \varphi \tag{1.3}$$

где первый член представляет собой потенциал скоростей набегающих волн по направлению отрицательной оси ox из бесконечности, а второй— функция возмущения, вызванного отраженными волнами от поверхности тора.



Фиг. 1

Функция φ удовлетворяет уравнению (1.1).

Установим граничное условие для функции φ. Для этого введем новую координатную систему r', θ, ψ, представленную на фиг. 2 и связанную с прямоугольными координатами x, y, z соотношениями

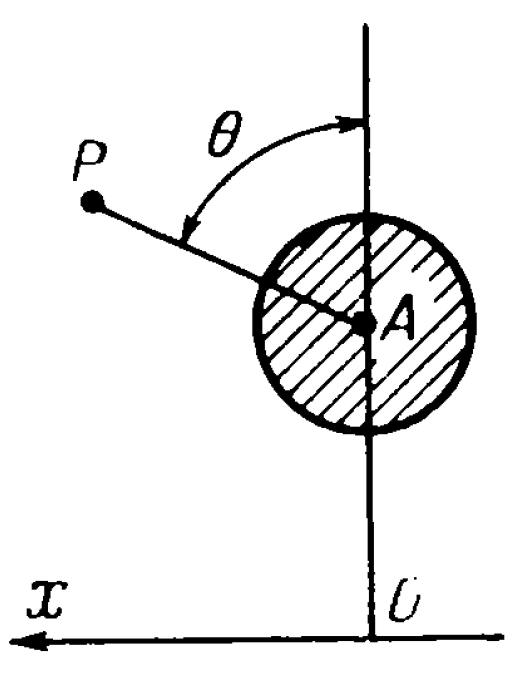
$$x = r' \sin\theta, \qquad y = (l + r' \cos\theta)\cos\psi, \qquad z = (l + r'\cos\theta)\sin\psi \tag{1.4}$$

Уравнения поверхности тора в этой системе имеют вид

$$x = a\sin\theta, \qquad y = (l + a\cos\theta)\cos\psi, \qquad z = (l + a\cos\theta)\sin\psi \tag{1.5}$$

Так как длина волны λ велика по сравнению с радиусом сечения тора a (т. е. k мало), то вблизи поверхности тора Σ можно разложить e^{ikx} в ряд Тейлора. Имеем

$$e^{ikx} = 1 + kir' \sin\theta - \frac{k^2 r'^2 \sin^2\theta}{2} + \cdots \tag{1.6}$$



Фиг. 2

На поверхности тора Σ

$$\partial\varphi/\partial n = -\,\partial\varphi/\partial r' \quad \text{при } r' = a \tag{1.7}$$

Тогда функция φ на основании (1.1), (1.2), (1.6) и (1.7) удовлетворяет граничному условию

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial r'}\left(-e^{ikx}\right) = -[-ki\sin\theta - k^2 r' \sin^2\theta + \ldots]_{r'=a} =$$

$$= +ki\sin\theta - k^2 a \sin^2\theta + \ldots \tag{1.8}$$

Если учтем граничное условие (1.8), то решение уравнения (1.4) можно выразить через поверхностный интеграл, т. е. потенциал скоростей отраженных волн для точки P можно определить по формуле [1]

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Sigma}\left[\varphi\,\frac{\partial}{\partial n}\,\frac{e^{-ik\rho}}{\rho} - \frac{e^{-ik\rho}}{\rho}\,\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right]d\sigma \tag{1.9}$$

Здесь ρ — расстояние между фиксированной точкой P, лежащей вне Σ, и произвольной точкой поверхности тора Σ.

Так как функция φ на поверхности тора неизвестна, то пока нельзя определить $\varphi(P)$ по формуле (1.9). Поэтому в следующих двух параграфах рассмотрим определение функции φ на поверхности тора Σ.

§ 2. Предположим, что на поверхности тора и вблизи его функция может быть разложена в ряд

$$\varphi = \varphi_0 + k\varphi_1 + k^2\varphi_2 + \ldots, \tag{2.1}$$

где $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ — пока неизвестные функции. Подставляем это разложение (возможное на основании формулы (1.8)) в (1.4), и приравняя коэффициенты при одинаковых степенях в обеих частях тождества, получим дифференциальные уравнения

$$\Delta\varphi_0 = 0, \qquad \Delta\varphi_1 = 0, \qquad \Delta\varphi_2 + \varphi_0 = 0 \text{ и т. д.} \tag{2.2}$$

Из (1.8) и (2.1) вытекает, что на поверхности тора функции $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ будут удовлетворять следующим соответствуюпим граничным условиям:

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial n} = 0, \qquad \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = i\sin\theta, \qquad \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = -a\sin^2\theta \tag{2.3}$$

Если нужно определить решение уравнения (1.1) для длинных звуковых волн с точностью до $O(k^3)$, то для определения φ на поверхности тора Σ необходимо решить три первых дифференциальных уравнения системы (2.2) с соответствующими граничными условиями (2.3) на Σ. Тогда функция φ будет иметь вид

$$\varphi = \varphi_0 + k\varphi_1 + k^2\varphi_2 + O(k^3) \tag{2.4}$$

§ 3. Известно, что в криволинейной ортогональной системе координат x_1, x_2, x_3 оператор $\Delta\varphi$ определяется формулой

$$\Delta\varphi = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{h_1h_3}{h_2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{h_1h}{h_3}\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)\right\} \tag{3.1}$$

Здесь h_1, h_2, h_3 — метрические коэффициенты, или коэффициенты Ламэ. Ортогональные коэффициенты $x_1 = r'$, $x_2 = \theta$, $x_3 = \psi$ связаны с прямоугольными координатными уравнениями (1.4).

Метрические коэффициенты соответственно равны

$$h_1 = 1, \qquad h_2 = r', \qquad h_3 = l + r'\cos\theta$$

Поэтому формула (3.1) примет вид (3.2)

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + \frac{1}{(l + r'\cos\theta)^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\psi^2} + \frac{l + 2r'\cos\theta}{r'(l + r'\cos\theta)}\frac{\partial\varphi}{\partial r'} - \frac{\sin\theta}{r'(l + r'\cos\theta)}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}$$

В силу симметрии тора относительно оси Ox функции φ_0 и φ_1 не будут зависеть от ψ. Следовательно, первые два уравнения Лапласа из (2.2) на основании (3.2) принимают вид

$$\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'^2}\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial\theta^2} + \frac{l + 2r'\cos\theta}{r'(l + r'\cos\theta)}\frac{\partial\varphi_0}{\partial r'} - \frac{\sin\theta}{r'(l + r'\cos\theta)}\frac{\partial\varphi_0}{\partial\theta} = 0 \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'^2}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\theta^2} + \frac{l + 2r'\cos\theta}{r'(l + r'\cos\theta)}\frac{\partial\varphi_1}{\partial r'} - \frac{\sin\theta}{r'(l + r'\cos\theta)}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\theta} = 0 \tag{3.4}$$

Уравнение (3.3) с граничным условием $\partial\varphi_0/\partial n = 0$ имеет единственное решение

$$\varphi_0 = \text{const} = c \tag{3.5}$$

Решение уравнения (3.4) с граничным условием $\partial\varphi_1/\partial n = i\sin\theta$ будем искать в виде $\varphi_1 = -ir'\sin\theta$.

Непосредственной проверкой можно показать, что функция φ_1 удовлетворяет уравнению (3.4) и условию $\partial\varphi_1/\partial n = i\sin\theta$ на поверхности тора Σ. Так как на поверхности тора $r' = a$, то

$$\varphi_1 = -ia\sin\theta \tag{3.6}$$

В силу (3.2), (3.5) и симметрии тора уравнение для φ_2 из (2.2) принимает вид

$$\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'^2}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial\theta^2} + \frac{l + 2r'\cos\theta}{r'(l + r'\cos\theta)}\frac{\partial\varphi_2}{\partial r'} - \frac{\sin\theta}{r'(l + r'\cos\theta)}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\theta} + c = 0 \tag{3.7}$$

с граничным условием

$$\partial\varphi_2/\partial n = -a\sin^2\theta \tag{3.8}$$

Найдем решение уравнения (3.7) для случая, когда $c = -1$. Непосредственной проверкой можно показать, что функция $\varphi_2 = +\,{}^1/_2 r'^2 \sin^2\theta$ удовлетворяет уравнению (3.7) и условию (3.8). На поверхности тора

$$\varphi_2 = +\frac{1}{2} a^2 \sin^2\theta \tag{3.9}$$

В силу (2.4), (3.5), (3.6) и (3.9) функция φ на Σ имеет

$$\varphi = -\left(1 + kia\sin\theta - k^2\frac{a^2\sin^2\theta}{2}\right) + O(k^3) \tag{3.10}$$

§ 4. Полагая φ и $\partial\varphi/\partial n$ на Σ согласно (3.10) и (1.8), из (1.9) получим

$$\varphi(P) = -\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma}\left[\left(1 + kia\sin\theta - \frac{k^2a^2\sin^2\theta}{2}\right)\frac{\partial}{\partial n}\frac{e^{-ik\rho}}{\rho} + \right.$$
$$\left. + (ki\sin\theta - k^2 a\sin^2\theta)\frac{e^{-ik\rho}}{\rho}\right]d\sigma + O(k^3) \tag{4.1}$$

По этой формуле (4.1) можно определить потенциал скоростей отраженных волн для любой точки $P(x, y, z)$, лежащей вне тора.

Теперь найдем приближенное значение интеграла (4.1), когда расстояния ρ велики по сравнению с размером тора.

Пусть $OM = R$, $MR = \rho$, $OP = R_0$, $\angle YOC = \psi$ и $\angle DCM = \theta$, где M — произвольная переменная точка, лежащая на поверхности тора с координатами (1.5) (фиг. 3).

Напишем следующее приближение

$$\frac{e^{-ik\rho}}{\rho} = \left[1 - x_1\frac{\partial}{\partial x} - y_1\frac{\partial}{\partial y} - z_1\frac{\partial}{\partial z}\right]\frac{e^{-ikR_0}}{R_0} + \ldots \tag{4.2}$$

где $R_0 = OP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ — расстояние точки P от начала. Из (4.2) имеем (4.3)

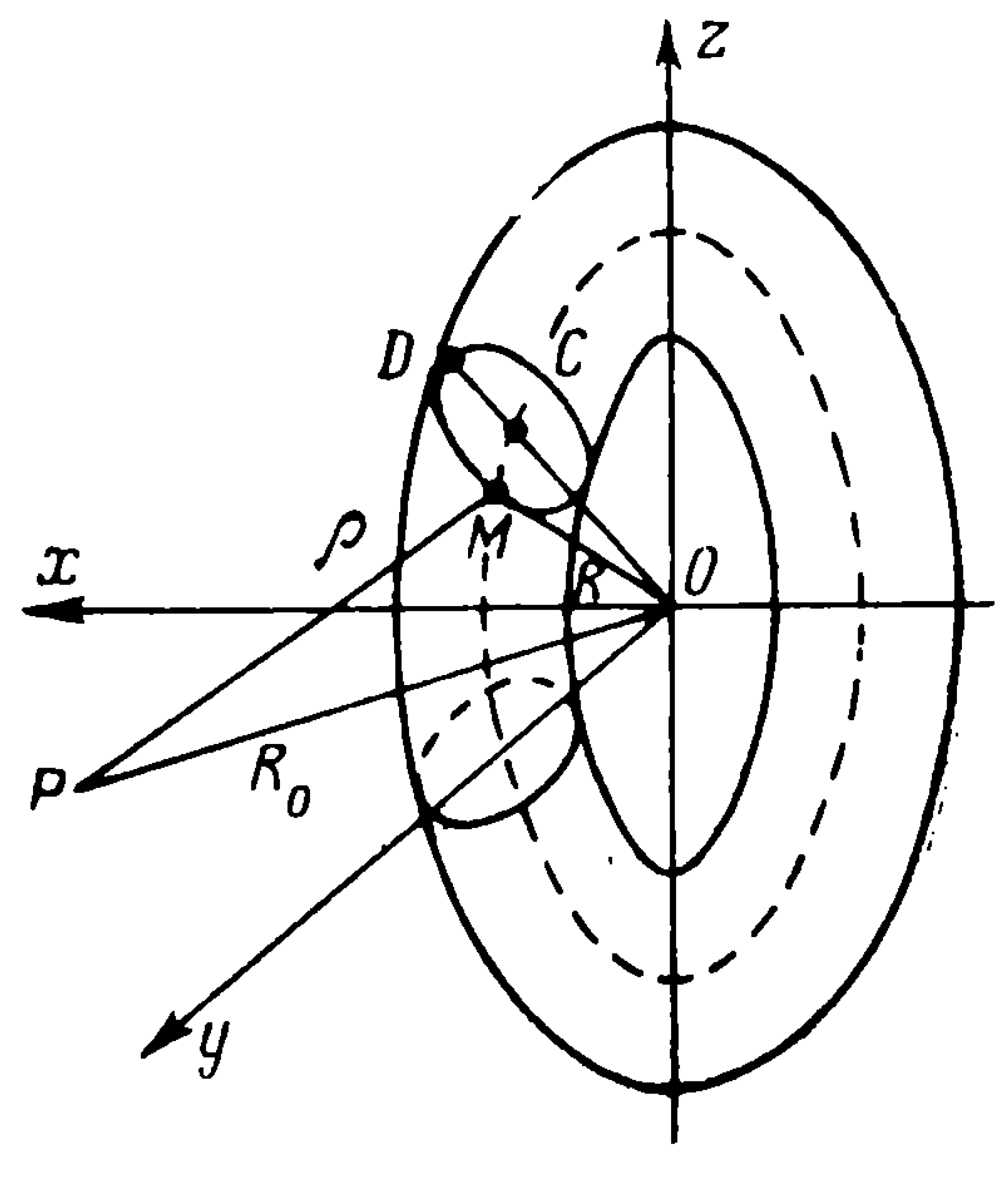
$$\frac{\partial}{\partial n}\frac{e^{-ik\rho}}{\rho} = -\left(l_1\frac{\partial}{\partial x} + m_1\frac{\partial}{\partial y} + n_1\frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{e^{-ikR_0}}{R_0} + \ldots$$

Здесь l_1, m_1, n_1 — направляющие косинусы внешней нормали. Имеем (4.4)

$$l_1 = -\sin\theta,\quad m_1 = -\cos\theta\cos\psi,\quad n_1 = -\cos\theta\sin\psi$$

Элементарная площадь $d\sigma$ на поверхности тора равна

$$d\sigma = a(l + a\cos\theta)\,d\theta d\psi \tag{4.5}$$



Фиг. 3

Тогда формула (4.1) на основании (4.2)—(4.5) примет следующий вид:

$$\varphi(P) = -\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\left(1 + kia\sin\theta - \frac{k^2 a\sin^2\theta}{2}\right)\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial x} + \cos\psi\frac{\partial}{\partial y} + \right.\right.$$
$$\left. + \cos\theta\sin\psi\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{e^{ikR_0}}{R_0} - (ki\sin\theta - k^2 a\sin^2\theta)\left(1 - \sin\theta\frac{\partial}{\partial x} - \right.$$
$$\left.\left. - \cos\theta\cos\psi\frac{\partial}{\partial y} - \cos\theta\sin\psi\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{e^{-ikR_0}}{R_0}\right]a(l + a\cos\theta)\,d\theta d\psi + O(k^3) \tag{4.6}$$

или

$$\varphi(P) = -\frac{kQi}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\frac{e^{-ikR_0}}{R_0} - \frac{k^2Q}{4\pi}\frac{e^{-ikR_0}}{R_0} + O(k^3) \tag{4.7}$$

где $Q = 2\pi^2a^2l$ — объем тора.

Из формулы (4.7) вытекает, что отраженные волны можно представлять себе полученными в результате совместного действия простого источника и диполя, находящихся в начале координатной системы $Oxyz$.

Определив φ для любой точки P, находящейся вдали от тора, можно написать полное выражение потенциала скоростей Φ с учетом временного множителя и интенсивности звука J_0 в виде

$$\Phi = J_0 e^{i(kx+\sigma t)} + J_0 \frac{kQ}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{i(\sigma t - kR_0 - \pi)}}{R_0} + J_0 \frac{k^2 Q}{4\pi} \frac{e^{i(\sigma t - kR_0 - \pi)}}{R_0} + Q(k^3) \tag{4.8}$$

Определяя действительную часть, имеем

$$\Phi = J_0 \cos(kx + \sigma t) + J_0 \frac{kQ}{4} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\cos(\sigma t - kR_0 - \pi)}{R_0} + $$
$$+ J_0 \frac{k^2 Q}{4} \frac{\cos(\sigma t - kR_0 - \pi)}{R_0} + O(k^3) \tag{4.9}$$
$$(R_0 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

Из формулы (4.9) видно, что потенциал скоростей звуковой волны в любой точке, находящейся на большом расстоянии от тора, равен сумме трех потенциалов скоростей, причем первый член представляет собой потенциал скоростей плоской звуковой волны, исходящей от бесконечности и распространяющейся с постоянной скоростью σ / k по направлению отрицательной оси Ox, второй член — от диполя, находящегося в начале координат, а третий член — от точечного источника, находящегося также в начале координат.

Таким образом, задача, поставленная в § 1, решена формулой (4.9).

Поступила 21 III 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Ламб Г. Гидродинамика. Гостехиздат, 1947.

ЦИКЛИЧЕСКИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО ИНТЕГРАЛА ПЛОЩАДЕЙ

А. А. Богоявленский (Москва)

В работе Чаплыгина [1] дано обобщение теоремы площадей и получены соответствующие интегралы. Там же указано на возможность обобщения полученных результатов в смысле Чаплыгина. Наиболее типичные обобщенные интегралы площадей приведены в §§ 1, 2, 4 работы [1].

Не рассматривая всех обобщений, следующих из работы [1], можно показать, что указанные интегралы суть интегралы циклических перемещений по Четаеву [2].

Сохраним обозначения величин и определения, принятые Чаплыгиным.

К § 1 работы [1]. Свойства связей, наложенных на систему, раскрываются посредством тех возможных перемещений, которые состоят из вращения системы материальных точек без изменения конфигурации вокруг прямой Az.

Пусть этому вращению соответствует угол $\delta\theta$.

Положение механической системы можно определить по Пуанкаре—Четаеву зависимыми переменными

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \beta_i^k, \quad x', \quad y', \quad z' \quad (i, k = 1, 2) \tag{1}$$

где β_i^k — косинусы углов между системой осей $Axyz$ и вновь введенной прямоугольной системой осей $Ax'y'z'$, ось z' которой совпадает с прямой Az и система поворачивается вокруг этой оси на угол $\delta\theta$. Нижний индекс относится к осям x, y, z, верхний — к осям x', y', z'.

Переменные β_i^k удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\frac{d\beta_i^1}{dt} = \beta_i^2 \frac{d\theta}{dt}, \qquad \frac{d\beta_i^2}{dt} = -\beta_i^1 \frac{d\theta}{dt} \qquad (i, k = 1, 2) \tag{2}$$

Действительные перемещения определяются независимыми переменными η_i, за которые можно взять

$$\frac{d\alpha}{dt}, \quad \frac{d\beta}{dt}, \quad \frac{d\gamma}{dt}, \quad \frac{d\theta}{dt}, \quad \eta_\nu \qquad (\nu = 5, 6, \ldots)$$