ОБ ОДНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ СПЛОШНОГО ЦИЛИНДРА

А. Ф. Хрусталев
(Харьков)

Предлагается способ построения функции распределения температуры для неограниченного сплошного цилиндра, боковая поверхность которого на половине длины имеет температуру $T = f(z)$, тогда как другая половина боковой поверхности цилиндра излучает тепло в окружающую среду по закону Ньютона.

Решение рассматриваемой задачи сводится к определению функции $T(r, z)$, удовлетворяющей уравнению Лапласа в цилиндрических координатах

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \tag{1}$$

и граничным условиям

$$\frac{\partial T}{\partial r} + hT = 0 \quad \text{при } r = R, \ 0 < z < +\infty \tag{2}$$

$$T = f(z) \quad \text{при } r = R, \ -\infty < z < 0 \tag{3}$$

Относительно функции $f(z)$ предположим, что ее можно представить в промежутке $(-\infty, 0)$ интегралом Фурье, т. е.

$$f(z) = \int_{-\infty}^{0} A(\beta)\cos\beta z\, d\beta, \qquad A(\beta) = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{0} f(v)\cos\beta v\, dv \tag{4}$$

Предварительно найдем решение уравнения (1), удовлетворяющее таким граничным условиям

$$\frac{\partial T}{\partial r} + hT = 0 \quad \text{при } r = R, \ 0 < z < +\infty \tag{5}$$

$$T = A\cos\beta z = \frac{1}{2}A\left(e^{i\beta z} + e^{-i\beta z}\right) \quad \text{при } r = R, \ -\infty < z < 0 \tag{6}$$

Здесь A и β вещественные параметры.

Как и в [1,2], возьмем вспомогательное решение уравнения (1) в виде

$$T_0(r, z) = BJ_0(mr)\,e^{mz}$$

где m комплексный параметр.

Рассматривая B как функцию параметра $u = mR$, построим интеграл

$$T_1 = \frac{1}{R}\int_C B(u)\,J_0(\rho u)\,e^{\lambda u}\,du \tag{7}$$

причем контур интегрирования C представляет собой мнимую ось с обходом по часовой стрелке двух точек $\pm i\beta R$, а $z = \lambda R$, $r = \rho R$.

Интеграл (7) будет удовлетворять уравнению (1), если он вместе со своими производными по ρ и λ до второго порядка включительно сходится абсолютно и равномерно в области

$$\rho < 1 \quad |\lambda| < \infty$$

Решение (7) принимает следующие значения на границе

$$\frac{\partial T_1}{\partial r} + hT_1 = \frac{1}{R}\int_C K(u)\,e^{\lambda u}\,du \quad \text{при } \rho = 1, \ |\lambda| < \infty \tag{8}$$

$$T_1 = \frac{1}{R}\int_C \psi(u)\,e^{\lambda u}\,du \quad \text{при } \rho = 1, \ |\lambda| < \infty \tag{9}$$

Здесь

$$B(u) = \frac{RK(u)}{hRJ_0(u) - uJ_1(u)}, \qquad \psi(u) = \frac{RJ_0(u)\,K(u)}{hRJ_0(u) - uJ_1(u)}$$

Функцию $K(u)$ определяем так, чтобы условия (8) и (9) обратились соответственно в (2) и (3), т. е.

$$\int_C K(u)\, e^{\lambda u}\, du = 0 \quad \text{при } \rho = 1,\ \lambda > 0 \tag{10}$$

$$\int_C \psi(u)\, e^{\lambda u}\, du = \frac{1}{2} A\left(e^{i\beta R\lambda} + e^{-i\beta R\lambda}\right) \quad \text{при } \rho = 1,\ \lambda < 0 \tag{11}$$

Граничное условие (10) будет выполнено, если $K(u)$ регулярна в области $\operatorname{Re}(u) < 0$ и удовлетворяет в этой области требованиям леммы Жордана.

Для того чтобы выполнялось граничное условие (11), функция $\psi(u)$ должна быть регулярна в области $\operatorname{Re}(u) > 0$, удовлетворять в этой области требованиям леммы Жордана и

$$\operatorname{res}\psi(u)e^{\lambda u}|_{u=i\beta R} + \operatorname{res}\psi(u)e^{\lambda u}|_{u=-i\beta R} = -\frac{A}{4\pi i}\left(e^{i\beta R\lambda} + e^{-i\beta R\lambda}\right)$$

Поэтому

$$\operatorname{res}K(u)e^{\lambda u}|_{u=i\beta R} + \operatorname{res}K(u)e^{\lambda u}|_{u=-i\beta R} = -\frac{A\left[hI_0(\beta R) + \beta I_1(\beta R)\right]}{4\pi i I_0(\beta R)}\left(e^{i\beta R\lambda} + e^{-i\beta R\lambda}\right)$$

Для построения $K(u)$, следуя [1,2], рассмотрим бесконечное произведение

$$\Pi(u) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 - u/a_k}{1 - u/b_k}$$

Здесь a_k и b_k — положительные корни уравнений

$$hRJ_0(u) - uJ_1(u) = 0, \qquad J_0(u) = 0 \tag{12}$$

соответственно, при этом согласно [2]

$$\Pi(u) \approx \sqrt{-u/hR} \tag{13}$$

для достаточно больших $|u|$ в области $0 < \delta \leqslant \arg u \leqslant 2\pi - \delta$

Теперь нетрудно установить, что

$$K(u) = -\frac{A\Pi(u)\left[hI_0(\beta R) + \beta I_1(\beta R)\right]}{4\pi i I_0(\beta R)}\left[\frac{1}{(u - i\beta R)\,\Pi(i\beta R)} + \frac{1}{(u + i\beta R)\,\Pi(-i\beta R)}\right]$$

удовлетворяет указанным выше требованиям, а функция

$$T_1 = \int_C \frac{J_0(\rho u)\, K(u)\, e^{\lambda u}}{hRJ_0(u) - uJ_1(u)}\, du = A\varphi(\rho, \lambda, \beta) \tag{14}$$

Здесь

$$\varphi(\rho, \lambda, \beta) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}\left[\frac{I_0(\rho z)}{I_0(z)}\operatorname{Im}\left\{\frac{1}{\Pi(-iz)}\left[\frac{\Pi(-i\beta R)}{z - \beta R} + \frac{\Pi(i\beta R)}{z + \beta R}\right]e^{i\lambda z}\right\} - \right.$$
$$\left. - \frac{I_0(\rho z)}{I_0(z)}\left(\frac{1}{z - \beta R} + \frac{1}{z + \beta R}\right)\sin\lambda z\right]dz + \frac{I_0(\rho z)}{I_0(z)}\cos\lambda\beta R$$

будет решением уравнения (1), удовлетворяющим условиям (5) и (6).

Рассматривая A как функцию параметра β, построим интеграл

$$T(\rho, \lambda) = \int_{-\infty}^{0} A(\beta)\, \varphi(\rho, \lambda, \beta)\, d\beta \tag{15}$$

где $A(\beta)$ определяется равенством (4).

Функция (15) удовлетворяет уравнению (1) и граничным условиям (2) и (3).

Поступила 8 IV 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Данилевский А. М. Про розподіл струму в циліндричному електроді. Записки Науково-дослід. інституту мат. та мех. ХДУ, 1936р, т. 13, серія 4, вип. 1.
2. Хрусталев А. Ф., Коган Б. И. О распределении температуры в сплошном бесконечном цилиндре. Изв. вузов, математика, № 3, 1960.