О РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ ГРАНИЧНО-КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

В. Н. Красильников
(Ленинград)

Рассматривается постановка задач о распространении волн в присутствии границ, на которых выполняются однородные граничные условия высокого порядка. Выясняется, что на контурах разрыва коэффициентов последнего необходимо задавать дополнительные условия, названные в работе «контактными». Решается простейшая задача на применение контактных условий — об отражении поверхностной изгибной волны от линии разрыва упругой пластины, покрывающей жидкое полупространство.

В последнее время повысилось внимание к задачам распространения волн в присутствии поверхностей, на которых задаются однородные граничные условия, включающие в себя производные высокого порядка. Так, в частности, описывается влияние на звуковые волны упругих оболочек, подверженных чистому изгибу, или тонких пленок типа мембраны. Лэмбом [1] рассмотрено распространение волн в присутствии полубесконечной пластины.

Интересен также случай, когда коэффициенты в однородном граничном условии являются кусочно-постоянными, что соответствует, например, оболочке, составленной из нескольких однородных частей. Такие задачи обладают некоторой спецификой, и вопрос об их правильной постановке решается теоремой единственности, которая рассматривается ниже.

Пусть однородная жидкость (ρ — плотность, c — скорость звука) заполняет некоторый объем V, ограниченный поверхностью S (которую можно считать, например, относящейся к классу ВН по Ляпунову), частью, вообще говоря, уходящей на бесконечность. Пусть далее звуковое поле (потенциал скорости φ, давление p, скорость $\mathbf{v}$) удовлетворяет:

1) в объеме V волновому уравнению

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -f(\mathbf{r}, t) \tag{1}$$

где $f(\mathbf{r}, t)$ — функция источников поля, отличная от нуля лишь в конечной части V;

2) нулевым начальным условиям

$$p = -\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0, \quad \mathbf{v} = \operatorname{grad}\varphi = 0 \text{ при } t = 0 \tag{2}$$

3) следующим граничным условиям на конечной части поверхности S (которую считаем разбитой на несколько частей S_k):

$$D_k\nabla^4 u - \alpha_k\nabla^2 u + \beta_k u + \mu_k\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial n} \quad \text{на } S_k \tag{3}$$

Здесь параметры D_k, α_k, β_k и μ_k постоянны и положительны на S_k, а u — функция времени и точки поверхности; исключая ее из (3), можно получить однородное граничное условие в виде

$$\frac{\partial}{\partial n}\left\{D_k\nabla^4\varphi - \alpha_k\nabla^2\varphi + \beta_k\varphi + \mu_k\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right\} = -\rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \quad \text{на } S_k \tag{4}$$

Здесь $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали, а под ∇^k следует понимать операторы дифференцирования по ортогональным к $\mathbf{n}$ координатам;

4) на контурах разрыва параметров L_k некоторой совокупности линейных условий, обеспечивающих непрерывность нормальных составляющих определенного на поверхности S вектора

$$\mathbf{I} = D_k\left(\nabla^3 u\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla^2 u\frac{\partial\nabla u}{\partial t}\right) - \alpha_k\nabla u\frac{\partial u}{\partial t} \tag{5}$$

(эти условия будем называть в дальнейшем контактными). При условиях (1)—(5) решение поставленной граничной задачи линейной акустики будет единственным (если исключить из рассмотрения практически неинтересный класс функций, отличных от нуля на множестве точек меры нуль).

Прежде чем доказывать сделанное утверждение, целесообразно прокомментировать некоторые из выписанных условий. Уравнения (3) имеют простой смысл равенства сил и смещений, если отождествить u со смещением ограничивающей оболочки по нормали от положения равновесия, $D_k\nabla^4 u$ с силой, возникающей при изгибе, а $\alpha_k\nabla^2 u$ с силой мембранного типа, характерной для капиллярных явлений. Член $\beta_k u$ интерпретируется как квазиупругая сила, μ_k — масса единицы поверхности оболочки, а $\mu_k \partial^2 u/\partial t^2$ — соответствующая сила инерции. Положительность постоянных D_k, α_k, μ_k и β_k соответствует условию стабильности границы: возникающие при ее деформации силы стремятся вернуть ее к положению равновесия ($u = 0$).

Контактные условия тоже допускают простую интерпретацию. Вектор $\mathbf{I}$ есть вектор плотности потока энергии в оболочке рассматриваемого типа; первое слагаемое в (5) связано с переносом упругой энергии при изгибных колебаниях (как это показано в нашей работе [2]), а второе — с энергией, переносимой вдоль мембраны. Граничные условия высокого порядка соответствуют достаточно сложной в физическом смысле поверхности, которая оказывается способной к самостоятельной передаче энергии; с этой точки зрения контактные условия вполне естественны.

Для доказательства теоремы единственности составим разность двух возможных решений ($p = p_1 - p_2$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$, $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$). Для него справедлива следующая теорема энергии [3]:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V \left(\rho\frac{v^2}{2} + \frac{p^2}{2\rho c^2}\right) dV + \oint\limits_S p v_n\, dS = 0 \tag{6}$$

где интегрирование во втором слагаемом ведется лишь по конечной части поверхности S (ибо рассматривается нестационарная задача). Используя граничные условия (3) и выполняя очевидные операции интегрирования по частям, для некоторой части поверхности S_k можно написать

$$\int\limits_{S_k} p v_n\, dS = \oint\limits_{L_k} I_t\, dl + \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\int\limits_{S_k}\left[D_k(\nabla^2 u)^2 + \alpha_k(\nabla u)^2 + \beta_k u^2 + \mu_k\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right] dS \tag{7}$$

Здесь I_t — нормальная к ограничивающему контуру L_k составляющая вектора $\mathbf{I}$, определенного (5); t — вектор внешней нормали.

В формулу (6) входит сумма по всем областям S_k; при этом интеграл по каждому контуру L_k встретится дважды, но с разными знаками у единичных векторов нормали. Контактные условия предполагаются линейными, следовательно, непрерывность величин I_t имеет место и для разностного поля, в силу этого

$$\sum_k \oint\limits_{L_k} I_t\, dl = 0$$

и теорема энергии сводится к виду

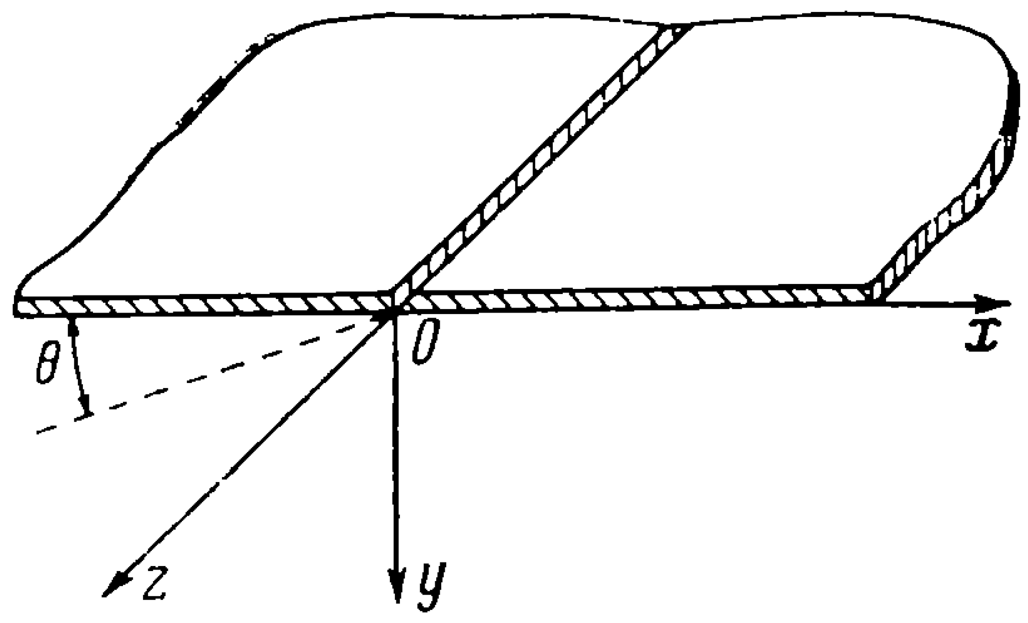
$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\left\{\int\limits_V\left(\rho v^2 + \frac{p^2}{\rho c^2}\right) dV + \sum_k\int\limits_{S_k}\left[D_k(\nabla^2 u)^2 + \alpha_k(\nabla u)^2 + \beta_k u^2 + \mu_k\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right] dS\right\} = 0 \tag{8}$$

В силу нулевых начальных условий для разностного поля и неотрицательности коэффициентов (D_k, α_k, β_k, μ_k) из (8) следует, что разностное решение тождественно равно нулю.

Таким образом, доказана теорема единственности для задачи с начальными данными и показана необходимость учета контактных условий. Очевидно, что они потребуются и в более общих случаях. Так в формулировке теоремы для стационарных задач следует заменить условие (2) принципом излучения (в соответствующем виде). Если же область V включает в себя точки, где решение может терять аналитичность (ребро клина или, в нашем случае, контур контакта), то в них необходимо накладывать условие слабой особенности поля, т. е. непрерывности потенциала φ. Эти варианты теоремы единственности неоднократно обсуждались (см., например, [4]).

Рассмотрим простейшую гранично-контактную задачу.

Пусть полупространство $y < 0$, заполненное несжимаемой жидкостью плотности ρ, покрыто тонкой пластиной постоянной жесткости D, массой которой пренебрежем (фиг. 1). На линии ($x = 0$, $y = 0$) контакт между частями пластины, вообще говоря, нарушен. Например, оба края полупластин свободны, или между ними существует шарнирное закрепление; наличие спая соответствует тривиальному случаю бесконечной однородной пластины. Если на такой контакт набегает поверхностная изгибная волна, то интересно выяснить степень ее отражения, так как такая задача связана с проблемой отражения изгибных волн от трещин в ледовом покрове; случай шарнирного соединения может дать некоторое представление об отражении изгибных волн от места налегания двух льдин одна на другую. Как следует из (2), существует диапазон частот, в котором предложенная модель является приемлемой.



Фиг. 1

Поставленную задачу приведем в соответствие с теоремой единственности. Потенциал скорости в жидкости $\varphi(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0 \tag{9}$$

и для монохроматических режимов всюду на поверхности (кроме линии контакта) подчинен граничному условию (4)

$$\frac{d}{dy}\nabla^4\varphi - q^5\varphi = 0 \text{ при } \begin{cases} y = 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \left(q = \left[\frac{\omega^2\rho}{D}\right]^{1/5}\right) \tag{10}$$

Здесь оператор ∇ действует лишь на координаты x и z, а q имеет смысл волнового числа изгибной волны для однородной пластины.

Контактные условия на трещине в силу произвольности смещений u и углов наклона $\partial u/\partial x$ краев полупластин следует задавать в виде

$$\lim \nabla^2 u = 0 \quad \text{при } x \to \pm 0, \qquad \lim \frac{\partial\nabla^2 u}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x \to \pm 0 \tag{11}$$

Эти условия совпадают с хорошо известными в теории пластин условиями «свободного края». Заметим, что в случае шарнирного соединения (непрерывность смещений и произвольность наклона) контактные условия формулируются несколько иначе

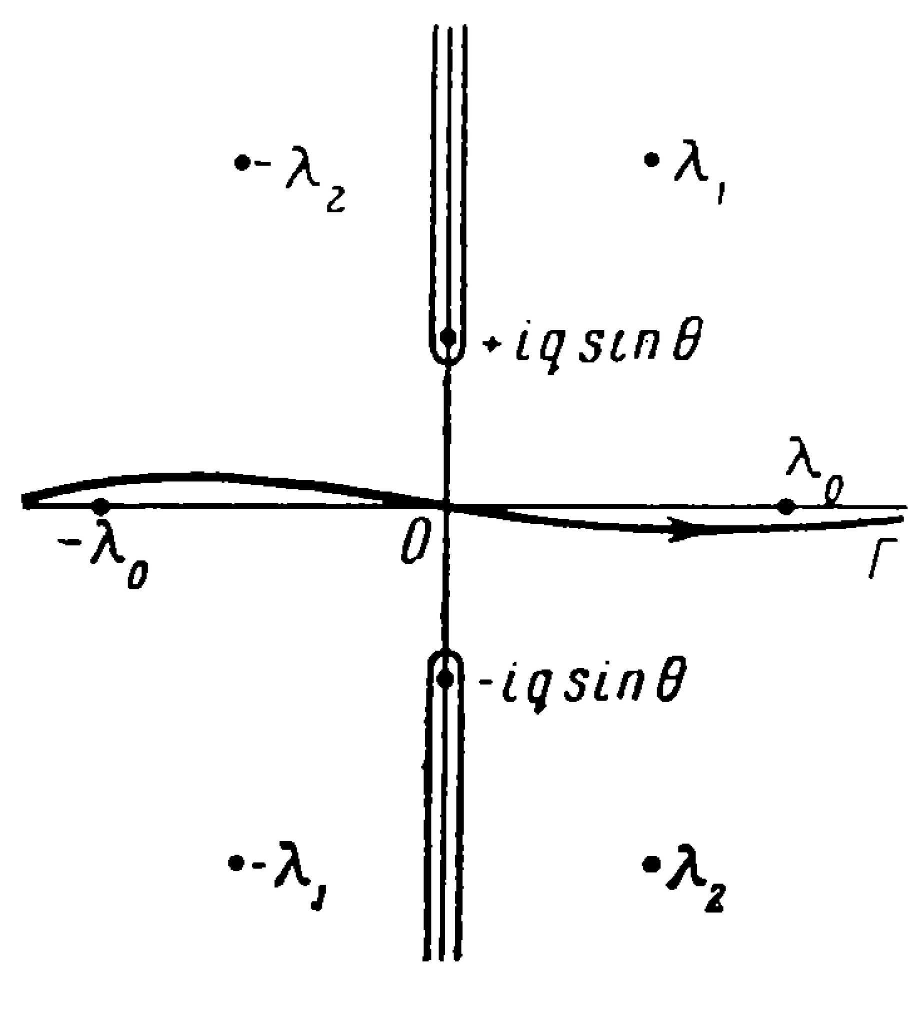
$$\lim_{x\to\pm 0} \nabla^2 u = 0, \qquad \lim_{x\to+0} u = \lim_{x\to-0} u$$
$$\lim_{x\to+0} \frac{\partial\nabla^2 u}{\partial x} = \lim_{x\to-0} \frac{\partial\nabla^2 u}{\partial x} \tag{12}$$

Условия (11) на основании второго из равенств (3) легко переносятся на потенциал скорости φ.

Требование слабой особенности (отсутствия источников) означает непрерывность потенциала на линии ($x = 0$, $y = 0$).

Принцип излучения удобно использовать в следующем виде. Выделим из полного поля φ набегающую плоскую изгибную волну

$$\varphi_0 = Ae^{iq(x\cos\theta + z\sin\theta) - qy} \tag{13}$$



Фиг. 2

где θ — угол падения волны на линию контакта; тогда возникающее за счет влияния трещины «вторичное» поле $\varphi_1 = \varphi - \varphi_0$ при $|x| \to \infty$ представляет собой уходящую от контакта изгибную волну, а при $y \to \infty$ исчезает.

Будем искать «вторичное» поле φ_1 в виде $\Phi(x, y) \exp iq\sin\theta z$, где $\Phi(x, y)$ представимо следующим контурным интегралом:

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda) \exp\left[i\lambda x - \sqrt{\lambda^2 + q^2\sin^2\theta}\, y\right] d\lambda \tag{14}$$

Здесь $f(\lambda)$ — функция, подлежащая определению; контур Г выбран на плоскости λ способом, указанным на фиг. 2, а ветвь корня фиксирована так, что на нашем листе римановой поверхности $\mathrm{Re}\sqrt{\lambda^2 + q^2\sin^2\theta} \geqslant 0$; это соответствует требованию убывания поля при $y \to \infty$.

Непрерывность потенциала будет обеспечена, если предположить, что $f(\lambda)$ убывает на бесконечности быстрее, чем $|\lambda|^{-1}$. Допуская это (оправдывающееся впоследствии) условие легко показать, что при $x > 0$ интеграл в (14) можно свести к интегралу по контуру Γ_+, охватывающему все особенности подынтегральной функции, лежащие выше контура Γ (в верхней полуплоскости λ), а при $x < 0$ исходный контур Γ трансформируется в Γ_- — контур, охватывающий особенности, расположенные ниже Γ. Интегралы же по контурам Γ_+ и Γ_- (как это видно из дальнейшего) допускают, по крайней мере, пятикратное дифференцирование по координатам x и y. Учитывая это, легко убедиться, что наложение на вторичное поле граничного условия (10) приводит к следующему соотношению для неизвестной функции $f(\lambda)$:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\pm} f(\lambda)\left([\lambda^2+q^2\sin^2\theta]^{5/2}-q^5\right)e^{i\lambda x}\,d\lambda=0 \tag{15}$$

Здесь

$$\Gamma_+ \quad \text{при } x>0, \qquad \Gamma_- \quad \text{при } x<0$$

В силу произвольности x (15) будет выполнено, если функция

$$F(\lambda)=f(\lambda)\,[(\lambda^2+q^2\sin^2\theta)^{5/2}-q^5]$$

не обладает особенностями на всей комплексной плоскости λ, кроме бесконечно удаленной точки, где она может иметь полюс конечного порядка, т. е. если $F(\lambda)$ — некоторый полином от λ. Требование непрерывности потенциала на линии контакта в задаче о трещине означает, что $F(\lambda)$ не содержит членов со степенями выше третьей, тогда $f(\lambda)\sim 1/\lambda^2$ при $\lambda\to\infty$ и интеграл (14) непрерывен. Заметим, что в задаче о шарнирном соединении условие непрерывности смещений, т. е. $\partial\varphi/\partial y$, заставляет считать $F(\lambda)$ полиномом второй степени. Итак, если

$$f(\lambda)=\frac{c_0+c_1\lambda+c_2\lambda^2+c_3\lambda^3}{\sqrt{(q^2\sin^2\theta+\lambda^2)^5}-q^5} \tag{16}$$

то граничное условие (10) выполнено. Явный вид $f(\lambda)$ указывает на то, что подынтегральная функция в (14) имеет особенности в виде точек ветвления и полюсов; на нашем листе римановой поверхности имеется шесть полюсов, схематическое расположение которых видно из фиг. 2. Очевидно также, что выбор контура Γ соответствует принципу излучения.

Остается наложить на полное поле контактные условия; для случая трещины их восемь — по числу неопределенных вещественных постоянных в (16). Очевидно, что в силу линейности соотношений (11) для отыскания коэффициентов $c_k=a_k+ib_k$ получается система из восьми линейных алгебраических уравнений со свободными членами, пропорциональными амплитуде падающей волны A. Коэффициенты системы определяются вычетами в полюсах $f(\lambda)$ и интегралами по берегам разрезов. Считая c_k принципиально известными, легко исследовать полученное решение. При этом вторичная волна состоит из расходящейся от трещины незатухающей изгибной волны (она описывается вычетами в точках $\pm\lambda_0$), неоднородной изгибной волны, амплитуда которой уменьшается с ростом $|x|$ по экспоненциальному закону (вычеты в точках $\pm\lambda_1$ и $\pm\lambda_2$) и расходящегося в глубь жидкости пространственного возмущения, амплитуда которого убывает с некоторой степенью обратного расстояния[1]. Это возмущение описывается интегралом по берегам разреза.

Особенно прост случай нормального падения ($\theta=0$) изгибной волны на трещину; при этом вычисления удается провести до конца, не прибегая к численному счету. Положение полюсов при $\theta=0$ очевидно

$$\lambda_0=q, \qquad \lambda_1=q\exp\frac{i2\pi}{5}, \qquad \lambda_2=q\exp\frac{-i2\pi}{5}$$

---

[1] В случае нормального падения закон убывания будет r^{-3}.

Выпишем в явном виде одно из контактных уравнений (11) (17)

$$\operatorname{Re}\lim \frac{\partial^3\varphi}{\partial x^2\,\partial y} = \operatorname{Re}\left\{\frac{F(\lambda_0)}{5\lambda_0} + \frac{F(\lambda_1)}{5\lambda_1} - \frac{F(-\lambda_2)}{5\lambda_2}\right\} + \operatorname{Re}\frac{q^5}{\pi i}\int\limits_0^{i\infty} \frac{\lambda^3 F(\lambda)}{\lambda^{10} - q^{10}}\,d\lambda + Aq^3 = 0$$

Входящая в (17) реальная часть интеграла просто вычисляется при помощи следующего приема:

$$\operatorname{Re} I_k = \operatorname{Re}\frac{q^5}{\pi i}\int\limits_0^{i\infty} \frac{c_k\,\lambda^{k+3}}{\lambda^{10} - q^{10}}\,d\lambda = \operatorname{Re}\frac{q^5\rho_k}{\pi i}\,e^{i\varepsilon_k}\int\limits_0^{i\infty}\frac{\lambda^{k+3}\,d\lambda}{\lambda^{10} - q^{10}}$$

где на вещественные величины ρ_k и ε_k накладывается одно условие

$$\rho_k\cos\varepsilon_k = a_k \quad (k\text{ — четное}), \qquad \rho_k\sin\varepsilon_k = b_k \quad (k\text{ — нечетное})$$

Если теперь фиксировать ε_k так, что

$$\varepsilon_k + (4 + k)\frac{2\pi}{5} = \frac{\pi}{2}$$

то очевидно, что

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{q\rho_k}{\pi i}\,e^{i\varepsilon_k}\,vp\int\limits_0^{\infty\exp(i2\pi/5)}\frac{\lambda^{k+3}\,d\lambda}{\lambda^{10} - q^{10}}\right\} = 0$$

Последний интеграл берется по лучу $\arg\lambda = 2\pi/5$, на котором лежит полюс λ_1 подынтегральной функции, поэтому при деформации исходного пути интегрирования в выбранный, необходимо добавить (со знаком минус) полувычет в точке λ_1. В результате получим

$$\operatorname{Re} I_k = -\frac{a_k\,q^{k-1}}{10\cos\varepsilon_k} \quad (k\text{ — четное}),\qquad \operatorname{Re} I_k = -\frac{b_k\,q^{k-1}}{10\sin\varepsilon_k} \quad (k\text{ — нечетное})$$

Остальные контактные уравнения весьма схожи с (17), что позволяет не только применить аналогичный метод вычисления коэффициентов, но и сильно упростить всю систему уравнений при помощи ряда тождественных преобразований. Ее решение имеет вид

$$c_0 = c_1 = 0, \qquad c_2 = (-1.8 + i2.4)\,Aq^2, \qquad c_3 = (-4.5 - i1.5)\,Aq^3 \tag{18}$$

Для случая шарнирного соединения аналогично получается

$$c_0 = c_1 = 0, \qquad c_2 = (-1.8 + i2.4)\,Aq^2 \tag{19}$$

Из (18) и (19) вытекают следующие значения коэффициентов отражения V и прохождения W для изгибных волн при нормальном падении: $V = 0.95$ и $W = 0.32$ — для случая трещины; $V = 0.6$ и $W = 0.8$ — для случая шарнирного соединения. При наклонном падении отражение должно возрасти, но и из приведенных данных ясен порядок эффекта. Следует отметить сильное отражение от трещины — только 10% энергии волны может пройти через нее. Тот факт, что значения V и W оказались не зависящими от частоты, соответствует наличию в задаче лишь одного параметра q. В реальных условиях на достаточно низких частотах изгибные волны на поверхности замерзшего моря переходят в изгибно гравитационные и чисто гравитационные. Вывод о постоянстве коэффициента отражения в этом диапазоне частот, разумеется, неприменим.

В заключение можно указать, что аналогичным способом решается задача об отражении поверхностных волн от линии разрыва мембраны. В этом случае $V = \sqrt{3}/2$, а $W = 1/2$.

Поступила 28 IV 1961 Ленинградский государственный университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Лэмб Г. Diffraction of a plane sound wave by a Semi — infinite thin elastic plate. J. Acoust. Soc. America, 1959, 31, № 7, 929—935.
2. Красильников В. Н. Влияние тонкого упругого слоя на распространение звука в жидком полупространстве. Акустический журнал, 1960, т. VI.
3. Кузнецов Д. С. Гидродинамика. Гидрометиздат, Л., 1951.
4. Стокер Дж. Волны на воде. ИИЛ, М., 1959.