Отсюда следует, что при замене в дифференциальном уравнении (3.2) $\varphi(H)$ его мажорантой или минорантой допускается ошибка в вычислении v, не превышающая 26% (в первом примере) и 13% (во втором).

Выберем $\varphi_2(H)$ в виде полинома (4.4), причем примем

$$2c_2(c_1+c_2)-\frac{1}{4}c_1^2=0, \qquad \frac{1}{2}c_1(c_1+c_2)=1$$

Вычисления для $\varphi_2(H)$ и v_2 дают следующие значения:

$$\varphi_2(H)=H-0.230H^3-0.024H^4, \qquad v_2=0.411\sqrt{m_0/t}$$

Для $\varphi_1(H)=H>\varphi_2(H)$ имеем согласно [4]

$$v_1=0.628\sqrt{m_0/2t}$$

При $\varphi_3(H)=0.746H<\varphi_2(H)$

$$v_3=0.384\sqrt{m_0/t}$$

Таким образом

$$v_1/v_2=1.084, \qquad v_2/v_3=1.031$$

Очевидно, что при $\varphi_1(H)\geqslant\varphi(H)\geqslant\varphi_2(H)$ ошибка в результате замены $\varphi(H)$ функциями $\varphi_1(H)$ или $\varphi_2(H)$ будет не более 8.4%, а при $\varphi_2(H)\geqslant\varphi(H)\geqslant\varphi_3(H)$ не более 3.1%.

В заключение отметим, что так как неустановившаяся фильтрация газа описывается уравнением вида (1.1), то предложенный метод может быть в ряде случаев использован для оценки приближенных решений задач подземной газодинамики.

Поступила 10 IV 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова-Кочина П. Я. К теории неустановившихся движений в многослойной среде. ПММ, 1951, т. XV, вып. 4.
2. Аравин В. И., Нумеров С. Н. Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде. Гостехиздат, 1953.
3. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. ИИЛ, М., 1954, т. II.
4. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. Гостехиздат, 1952.
5. Баренблатт Г. И., Вишик М. И. О конечности скорости распространения в задачах нестационарной фильтрации жидкости и газа. ПММ, 1956, т. XX, вып. 3.

ЗАМЕЧАНИЯ К ЭНЕРГЕТИЧЕСКОМУ ПРИНЦИПУ В МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

К. Н. Степанов, В. В. Хоменюк

(Харьков)

Полученный в работах Лундквиста [1, 2], Бернштейна и др. [3] энергетический принцип нашел широкое применение при решении задач об устойчивости равновесных магнитогидродинамических конфигураций. Энергетический принцип является аналогом известных теорем [4,5,6] об устойчивости состояния равновесия системы материальных точек. Доказательство энергетического принципа, проведенное в работе [3], основывается на разложении малых смещений идеально проводящей жидкости в ряд по полной системе нормальных колебаний.

В работе дается доказательство теорем об устойчивости равновесных конфигураций идеально проводящей жидкости при помощи функций Ляпунова.

Заметим, что совокупность решений задачи Коши уравнений движения для малых смещений невязкой идеально проводящей жидкости от положения равновесия определяет общую систему. Зубов [6] использовал аналог функций Ляпунова для доказательства теорем об устойчивости инвариантного множества общей системы. А. А. Мовчан [7] применил функции Ляпунова для исследования устойчивости упругих систем.

1°. Как показано в работах [3,8,9], уравнения движения для малых смещений $\xi(\mathbf{r}, t)$ невязкой идеально проводящей жидкости от положения равновесия имеют вид

$$\rho\ddot{\xi}_i = F_i(\xi) \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{1}$$

Здесь точка сверху обозначает дифференцирование по времени, F — линейный самосопряженный оператор.

$$\mathbf{F}(\xi) = \nabla(\xi\cdot\nabla p) + \gamma\nabla(p\operatorname{div}\xi) + \frac{1}{4\pi}(\operatorname{rot}\operatorname{rot}(\xi\times\mathbf{H})\times\mathbf{H}) + \frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}\mathbf{H}\times\operatorname{rot}(\xi\times\mathbf{H})$$

Здесь ρ, p и $\mathbf{H}$ — равновесные значения плотности, давления жидкости и магнитного поля, γ — показатель адиабаты.

Будем для простоты считать, что жидкость занимает конечный объем V, ограниченный поверхностью S, причем плотность ρ и смещения ξ обращаются в нуль на S.

Уравнение (1) имеет интеграл энергии

$$E = T + U = \text{const} \tag{2}$$

где

$$T\{\dot{\xi}\} = \frac{1}{2}\int\limits_V \rho\dot{\xi}^2\,d\mathbf{r}, \qquad U\{\xi\} = -\frac{1}{2}\int\limits_V \xi\,\mathbf{F}(\xi)\,d\mathbf{r} \tag{3}$$

Введем обозначения

$$\|\xi\| = \sup\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}, \qquad \|\dot{\xi}\| = \sup\sqrt{\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2 + \dot{\xi}_3^2}$$

Ясно, что

(1) $T = U = 0$ при $\|\xi\| = 0$, $\|\dot{\xi}\| = 0$

(2) $T \to 0$, $U \to 0$ при $\|\xi\| \to 0$, $\|\dot{\xi}\| \to 0$

(3) $T\{\dot{\xi}\} \geqslant 0$

Будем считать $\xi(\mathbf{r})$ дважды непрерывно дифференцируемыми функциями $\mathbf{r} \in V$. Пусть $\xi = \xi(t, \mathbf{r}, \xi_0(\mathbf{r}), \dot{\xi}_0(\mathbf{r}))$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$\xi = \xi_0(\mathbf{r}), \quad \dot{\xi} = \dot{\xi}_0(\mathbf{r}) \quad \text{при } t = 0$$

Дадим теперь определения устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости положения равновесия рассматриваемой системы.

Состояние равновесия $\xi = 0$, $\dot{\xi} = 0$ устойчиво, если по любым $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ можно указать такие $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$, что если $\|\xi_0(\mathbf{r})\| < \delta_1$ и $\|\dot{\xi}_0(\mathbf{r})\| < \delta_2$, то

$$\|\xi(t, \mathbf{r}, \xi_0(\mathbf{r}), \dot{\xi}_0(\mathbf{r}))\| < \varepsilon_1, \quad \|\dot{\xi}(t, \mathbf{r}, \xi_0(\mathbf{r}), \dot{\xi}_0(\mathbf{r}))\| < \varepsilon_2 \quad \text{при } t \geqslant 0$$

Состояние равновесия асимптотически устойчиво, если оно устойчиво и, кроме того,

$$\|\xi(t, \mathbf{r}, \xi_0(\mathbf{r}), \dot{\xi}_0(\mathbf{r}))\| \to 0, \quad \|\dot{\xi}(t, \mathbf{r}, \xi_0(\mathbf{r}), \dot{\xi}_0(\mathbf{r}))\| \to 0 \quad \text{при } t \to +\infty.$$

Состояние равновесия неустойчиво, если существует хотя бы одно из чисел $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ таких, что какие бы $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$ ни взять, всегда существуют такие $\xi_0(\mathbf{r})$ и $\dot{\xi}_0(\mathbf{r})$, $\|\xi_0(\mathbf{r})\| < \delta_1$, $\|\dot{\xi}_0(\mathbf{r})\| < \delta_2$, что будет выполняться хотя бы одно из неравенств

$$\|\xi(t, \mathbf{r}, \xi_0(\mathbf{r}), \dot{\xi}_0(\mathbf{r}))\| \geqslant \varepsilon_1, \qquad \|\dot{\xi}(t, \mathbf{r}, \xi_0(\mathbf{r}), \dot{\xi}_0(\mathbf{r}))\| \geqslant \varepsilon_2$$

хотя бы для одного значения $t \geqslant 0$.

2°. Перейдем теперь к формулировке и доказательству теоремы об устойчивости состояния равновесия идеально проводящей невязкой жидкости.

Теорема 1. (Необходимое условие устойчивости). Для того чтобы состояние равновесия $\xi = 0$, $\dot{\xi} = 0$ было устойчиво, необходимо, чтобы было $U\{\xi\} \geqslant 0$.

Доказательство. Пусть рассматриваемое состояние равновесия устойчиво. Покажем, что при этом $U\{\xi\} \geqslant 0$. Предположим, что существует такое $\xi^*(\mathbf{r})$, что

$$U\{\xi^*(\mathbf{r})\} < 0, \qquad \|\xi^*(\mathbf{r})\| \neq 0$$

Положим

$$V\{\xi, \dot{\xi}\} = \int_V \rho\, \xi\dot{\xi} d\mathbf{r} \tag{4}$$

Если ξ решение (1), то

$$\frac{dV\{\xi, \dot{\xi}\}}{dt} = 2(T\{\dot{\xi}\} - U\{\xi\})$$

Какие бы $\delta_1^* > 0$ и $\delta_2^* > 0$ ни взять, всегда существуют $\xi_0^*(\mathbf{r})$ и $\dot{\xi}_0^*(\mathbf{r})$ такие, что

$$0 < \|\xi_0^*(\mathbf{r})\| < \delta_1^*, \qquad 0 < \|\dot{\xi}_0^*(\mathbf{r})\| < \delta_2^*$$

$$U\{\xi_0^*\} < 0, \qquad V\{\xi_0^*, \dot{\xi}_0^*\} > 0, \qquad T\{\dot{\xi}_0^*\} + U\{\xi_0^*\} < 0$$

Тогда для решений уравнения (1) с начальными данными

$$\xi = \xi_0^*(\mathbf{r}), \quad \dot{\xi} = \dot{\xi}_0^*(\mathbf{r}) \quad \text{при } t = 0$$

будем иметь

$$\frac{dV\{\xi, \dot{\xi}\}}{dt} \geqslant 2\mu > 0 \quad \text{при } t \geqslant 0 \quad (-\mu = T\{\dot{\xi}_0^*\} + U\{\xi_0^*\} < 0)$$

Отсюда следует, что

$$V \geqslant V_0 + \mu t \to +\infty \quad \text{при } t \to +\infty, \qquad (V_0 = V \text{ при } t = 0) \tag{5}$$

Так как состояние равновесия устойчиво, то по любым $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ найдутся $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$ такие, что если $\|\xi_0(\mathbf{r})\| < \delta_1$ и $\|\dot{\xi}_0(\mathbf{r})\| < \delta_2$, то

$$\|\xi(t, \mathbf{r}, \xi_0(\mathbf{r}), \dot{\xi}_0(\mathbf{r}))\| < \varepsilon_1, \qquad \|\dot{\xi}(t, \mathbf{r}, \xi_0(\mathbf{r}), \dot{\xi}_0(\mathbf{r}))\| < \varepsilon_2 \quad \text{при } t \geqslant 0$$

Возьмем теперь в качестве δ_1^* и δ_2^* соответственно δ_1 и δ_2. Тогда при $t \geqslant 0$ будем иметь, что

$$\|\xi(t, \mathbf{r}, \xi_0^*(\mathbf{r}), \dot{\xi}_0^*(\mathbf{r}))\| < \varepsilon_1, \qquad \|\dot{\xi}(t, \mathbf{r}, \xi_0^*(\mathbf{r}), \dot{\xi}_0^*(\mathbf{r}))\| < \varepsilon_2$$

Отсюда следует, что для рассматриваемых решений

$$|V| \leqslant \varepsilon_1 \varepsilon_2 M \qquad \left(M = \int_V \rho d\mathbf{r}\right)$$

Это противоречит (5). Следовательно, предположение о том, что $U\{\xi\} < 0$, неверно. Теорема доказана.

Из теоремы 1 следует, что если существуют такие $\xi(\mathbf{r})$, что $U\{\xi(\mathbf{r})\} < 0$, то рассматриваемое состояние равновесия неустойчиво.

Нетрудно доказать, что состояние равновесия идеально проводящей невязкой жидкости не может быть асимптотически устойчивым.

3°. Если рассматриваемая жидкость является вязкой, то уравнения движения будут иметь вид

$$\rho\ddot{\xi}_i = F_i(\xi) + f_i(\dot{\xi}) \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{6}$$

Сила вязкого трения f_i равна

$$f_i = \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\zeta\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right) \tag{7}$$

где η и ζ — первый и второй коэффициенты вязкости, $v_i = \dot{\xi}_i$.

Из (6) легко найти, что

$$d(T + U)/dt = -W \leqslant 0 \tag{8}$$

где

$$W\{\dot{\xi}\} = -\int_V v_i f_i d\mathbf{r} = \frac{1}{2}\int_V \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)^2 d\mathbf{r} + \int_V \zeta\left(\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)^2 d\mathbf{r} \tag{9}$$

Исследуем теперь влияние сил вязкости на устойчивость состояния равновесия. В случае несжимаемой жидкости этот вопрос рассмотрен Харом другим методом [10].

Теорема 2. Если существует $\xi(\mathbf{r})$ такое, что $U\{\xi(\mathbf{r})\} < 0$, то состояние равновесия неустойчиво и при наличии сил вязкости.

Доказательство. Предположим, что состояние равновесия устойчиво. Выберем $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$, тогда существуют $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$ такие, что если

$$\|\xi_0(\mathbf{r})\| < \delta_1, \quad \|\dot{\xi}_0(\mathbf{r})\| < \delta_2 \tag{10}$$

то при $t \geqslant 0$

$$\|\xi(t, \mathbf{r}, \xi_0(\mathbf{r}), \dot{\xi}_0(\mathbf{r})\| < \varepsilon_1, \quad \|\dot{\xi}(t, \mathbf{r}, \xi_0(\mathbf{r}), \dot{\xi}_0(\mathbf{r}))\| < \varepsilon_2 \tag{11}$$

Положим

$$V\{\xi, \dot{\xi}\} = \int\limits_V \rho\xi\dot{\xi}\,d\mathbf{r} + \frac{1}{4}\int\limits_V \eta\left(\frac{\partial\xi_i}{\partial x_k} + \frac{\partial\xi_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial\xi_l}{\partial x_l}\right)^2 d\mathbf{r} + \frac{1}{2}\int\limits_V \zeta\left(\frac{\partial\xi_l}{\partial x_l}\right)^2 d\mathbf{r} \tag{12}$$

Если ξ решение уравнения (6), то

$$dV / dt = 2(T - U) \tag{13}$$

Существуют $\xi_0{}^*(\mathbf{r})$ и $\dot{\xi}_0{}^*(\mathbf{r})$ такие, что

$$\|\xi_0{}^*(\mathbf{r})\| < \delta_1, \quad \|\dot{\xi}_0{}^*(\mathbf{r})\| < \delta_2$$

$$\mu = -T\{\dot{\xi}_0{}^*(\mathbf{r})\} - U\{\xi_0{}^*(\mathbf{r})\} > 0, \; V\{\xi_0{}^*(\mathbf{r}), \dot{\xi}_0{}^*(\mathbf{r})\} > 0 \tag{14}$$

Так как при $t \geqslant 0$

$$\|\xi(t, \mathbf{r}, \xi_0{}^*(\mathbf{r}), \dot{\xi}_0{}^*(\mathbf{r}))\| < \varepsilon_1 \quad \|\dot{\xi}(t, \mathbf{r}, (\xi_0{}^*(\mathbf{r}), \dot{\xi}_0{}^*(\mathbf{r}))\| < \varepsilon_2$$

то существует $\lambda > 0$ такое, что при $t \geqslant 0$

$$V\{\xi(t, \mathbf{r}, \xi_0{}^*(\mathbf{r}), \dot{\xi}_0{}^*(\mathbf{r})), \quad \|\dot{\xi}(t, \mathbf{r}, \xi_0^*(\mathbf{r}), \dot{\xi}_0{}^*(\mathbf{r}))\} < \lambda \tag{15}$$

С другой стороны, так как при $t \geqslant 0$

$$T\{\dot{\xi}(t, \mathbf{r}, \xi_0{}^*(\mathbf{r}), \dot{\xi}_0{}^*(\mathbf{r}))\} + U\{\xi(t, \mathbf{r}, \xi_0{}^*(\mathbf{r}), \dot{\xi}_0{}^*(\mathbf{r}))\} \leqslant -\mu < 0$$

получим, что при $t \geqslant 0$

$$\frac{d}{dt}V\{\xi(t, \mathbf{r}, \xi_0{}^*(\mathbf{r}), \dot{\xi}_0{}^*(\mathbf{r})), \quad \dot{\xi}(t, \mathbf{r}, \xi_0{}^*(\mathbf{r}), \dot{\xi}_0{}^*(\mathbf{r}))\} \geqslant 2\mu > 0 \tag{16}$$

Следовательно, при $t \to +\infty$

$$V\{\xi(t, \mathbf{r}, \xi_0{}^*(\mathbf{r}), \dot{\xi}_0{}^*(\mathbf{r})), \quad \dot{\xi}(t, \mathbf{r}, \xi^*(\mathbf{r}), \dot{\xi}_0{}^*(\mathbf{r}))\} \to +\infty \tag{17}$$

что противоречит (15). Полученное противоречие показывает, что сделанное предположение о том, что состояние равновесия устойчиво, неверно. Теорема доказана.

Теорема 2 аналогична известной теореме Кельвина [5] о влиянии диссипативных сил на устойчивость состояния равновесия системы материальных точек.

Замечание. Использованные для доказательства теорем 1—2 функционалы (4) и (12) будут аналогом функций Ляпунова в виде квадратичных форм, которые применил Четаев [5,11] для доказательства некоторых теорем об устойчивости.

Поступила 28 I 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Lundquist S. On the Sability of Magneto — Hydrostatic Fields. Phys. Rev., 1951, 83, № 2.
2. Lundquist S. Studies in Magneto-hydrodynamics. Ark. Fys., 1952, B 5, № 15.
3. Bernstein I. B., Frieman E. A., Kruskal M. D., Kulsrud R. M. An energie principle for hydromagnetic stability problems. Proc. Roy. Soc., 1958, v. A244, № 1236.
4. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Гостехтеориздат, М.—Л., 1950.
5. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Гостехтеориздат, М., 1955.
6. Зубов В. И. Методы Ляпунова и их применение. Изд-во ЛГУ, 1957.
7. Мовчан А. А. О прямом методе Ляпунова в задачах устойчивости упругих систем. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 3.
8. Hein K., Lüst R., Schlüter A. Zur Stabilitäts eines Plasmas. Zeitschr. Naturforsch., 1957, B. 12a, H. 10.
9. Брагинский С. И., Кадомцев Б. Б. Стабилизация плазмы с помощью охраняющих проводников. Статья в сб. Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. Изд-во АН СССР, М., 1958, т. 3, стр. 300—326.
10. Hare A. The effect of viscosity on the stability of incompressible magnetohydrodynamic systems. Phil. Mag., 1959, v. 4, № 48.
11. Четаев Н. Г. О некоторых вопросах устойчивости и неустойчивости неправильных систем. ПММ, 1948, т. XII, вып. 5.