ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ОЦЕНОК ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ И ГАЗА

А. М. Пирвердян

(Баку)

Точное решение нелинейного уравнения неустановившейся фильтрации жидкости со свободной поверхностью в пласте с переменной проницаемостью в вертикальном направлении сопряжено с большими математическими трудностями [1,2].

В статье используется одна теорема сравнения [3] для получения простых оценок приближенных решений уравнения одномерной фильтрации в пласте переменной проницаемости.

1. Рассмотрим известную задачу о вытекании жидкости плоскими волнами в пласт с нулевым уровнем грунтовых вод [4].

Предположим, что коэффициент фильтрации представляет собой некоторую заданную ограниченную функцию вертикальной координаты $k = k(z)$.

Дифференциальное уравнение фильтрации для этого случая имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi(H)\frac{\partial H}{\partial x}\right) = m(H)\frac{\partial H}{\partial t} \qquad \left(\varphi(H) = \int_0^H k(z)\,dz\right) \tag{1.1}$$

где $m(H)$ — переменный в вертикальном направлении коэффициент недостатка насыщения. Очевидно, $\varphi(H)$ — ограниченная неотрицательная функция.

Рассмотрим автомодельные решения вида

$$H = H(u) \qquad (u = xt^{-1/2}) \tag{1.2}$$

соответствующие случаю мгновенного подъема в бассейне с H_2 до $H_1 = 1$; в рассматриваемом случае, очевидно, $H_2 = 0$.

Подстановка (1.2) в (1.1) дает

$$\frac{d}{du}\left(\varphi(H)\frac{dH}{du}\right) = -\frac{u}{2}m(H)\frac{dH}{du} \tag{1.3}$$

В случае постоянного по мощности коэффициента фильтрации $k = k_1$ уравнение (1.1) вырождается в известное дифференциальное уравнение фильтрации Буссинеска для аналогичного граничного условия в нулевом сечении.

Уравнение (1.3) допускает точное решение для некоторых специальных видов функции $\varphi(H)$.

Для получения этих решений поступим следующим образом. Проинтегрировав уравнение (1.3) в пределах от нуля до H, получим

$$\begin{gathered}\varphi(H)\frac{dH}{du}\Big|_H - \varphi(H)\frac{dH}{du}\Big|_{H=0} = -\frac{1}{2}\int_0^H um(H)\,dH \\ \varphi(H) = -\frac{1}{2}\frac{du}{dH}Q(H) \qquad \left(Q(H) = \int_0^H um(H)\,dH\right)\end{gathered} \tag{1.4}$$

При этом учитывалось, что $\varphi(H)\,dH/du = 0$ при $H = 0$, в силу непрерывности распределения потока грунтовых вод и стремлении его к нулю при $x \to \infty$ $(u \to \infty)$.

Теперь, задаваясь видом зависимости $u = u(H)$, можно определить функцию $\varphi(H)$, а следовательно, и закономерность изменения проницаемости по мощности пласта.

Указанным обратным методом были найдены некоторые точные решения, при помощи которых можно дать оценку некоторым приближенным решениям.

Анализ этих точных решений показывает, что ограниченным неотрицательным значениям $\varphi(H)$ соответствуют только такие функции распределения насыщенности, которые при достаточно больших u тождественно равны нулю.

Эта особенность увязывается с конечностью распространения возмущения, доказанной в работе [5] для случая обобщенного уравнения Буссинеска – Лейбензона при вполне общей постановке задачи. Конечность скорости распространения возмущения для рассматриваемых здесь автомодельных задач также вытекает из следующих простых рассуждений.

В уравнении (1.4) будем стремить H к нулю; тогда $\varphi(H) \to 0$, $Q(H) \to 0$ (так как интеграл сходится), и дробь

$$\frac{du}{dH} = -\frac{2\varphi(H)}{Q(H)} \tag{1.5}$$

станет неопределенной.

Раскрывая неопределенность, получим

$$u'(0) = -\frac{2\varphi'(0)}{u(0)\,m(0)} = -\frac{2k(0)}{u(0)\,m(0)} \tag{1.6}$$

Предположим, что $k(0) \neq 0$, $m(0) \neq 0$. Если бы ось u являлась асимптотой интегральной кривой, то должно было бы быть $u(0) = \infty$, $u'(0) = -\infty$, но это противоречило бы (1.6).

2. Докажем, что через точку $u = 0$, $H = 1$ не может проходить более одной кривой, соответствующей условиям

$$H > 0,\ \ H' < 0 \ \text{и} \ \lim \varphi(H)\,H' = 0 \quad \text{при } u \to \infty$$

Обозначим через u^* координату фронта насыщенности. Если через точку (0, 1) проходит еще одна интегральная кривая (кроме $H(u)$) такая, что $H_1(u) \geqslant H(u)$, $(u_1(H) \geqslant u(H))$, то должен существовать отрезок $[0, u_0]$, для которого

$$-H_1'(u) \leqslant -H'(u), \qquad Q_1(H) > Q(H) \qquad \left(Q_1(H) = \int_0^H u_1 m(H)\,dH\right) \tag{2.1}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{Q_1(H)}{H_1'(u)} > -\frac{1}{2}\frac{Q(H)}{H'(u)} = \varphi(H) \tag{2.2}$$

Из (2.2) следует, что кривая $H_1(u)$ на отрезке $[0, u_0]$ не удовлетворяет интегродифференциальному уравнению (1.4), а следовательно, и дифференциальному уравнению.

Допустим, интегральная кривая $H_1(u)$ пересекает в нескольких точках $u_1, u_2, \ldots$ $\ldots, u_n$ кривую $H(u)$. Если для отрезка $[u_n\, u^*]$ справедливо неравенство $H_1(u) \geqslant H(u)$, то на $[u_n u_0]$, входящем в этот отрезок, должно быть

$$-H_1'(u) \leqslant -H'(u),\ Q_1(H) > Q(H),\ -\frac{1}{2}\frac{Q_1(H)}{H_1'(u)} < -\frac{1}{2}\frac{Q(H)}{H'(u)} = \varphi(H) \tag{2.3}$$

и вновь приходим к противоречию. Таким образом, кривая $H_1(u)$ на отрезке $[u_n u_0]$ не удовлетворяет интегродифференциальному уравнению (1.4) (дифференциальному уравнению (1.3)).

Вполне аналогичным способом можно доказать, что не существует интегральных кривых, выходящих из точки (0.1), которые лежали бы ниже кривой $H(u)$ или пересекали бы ее так, что для точек $u > u_n$ $H_1(u) < H(u)$. Рассмотренными случаями исчерпываются все возможные кривые, проходящие через начальную точку (0.1) кривой $H(u)$: ни одна из этих кривых, как видим, не может быть интегральной кривой дифференциального уравнения (1.3).

3. Уравнение (1.4) можно привести к виду

$$Q'' = -\frac{2m(H)\,\varphi(H)}{Q} + \frac{m'(H)}{m(H)}\,Q' \tag{3.1}$$

Здесь через штрих обозначено дифференцирование по H. Отметим, что расход фильтрационного потока в рассматриваемом сечении

$$v = Q/2t^{1/2} \tag{3.2}$$

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$Q'' = -\frac{2m_1(H)\,\varphi_1(H)}{Q} + \frac{m_1'(H)}{m_1(H)}\,Q' \tag{3.3}$$

Далее допустим, что $Q(H)$ и $Q_1(H)$ являются соответственно решениями уравнений (3.1) и (3.3). Допустим, что

$$\varphi_1(H) \leqslant \varphi(H), \qquad u_1(1) = u(1) = 0, \qquad m_1(H) = m(H) \tag{3.4}$$

Дальнейшее основано на одной теореме сравнения [3]. Однако вначале необходимо провести следующие рассуждения.

Если бы $u_1(H) \geqslant u(H)$ на отрезке $[0, H_0]$ оси H, то на $[H_0, H_m]$, входящем в этот отрезок, $-u_1'(H) \geqslant -u'(H)$, $Q_1(H) > Q(H)$ и $\varphi_1(H) \geqslant \varphi(h)$, что противоречит условию (3.4).

Поэтому возможно только такое взаимное расположение интегральных кривых $u(H)$ и $u_1(H)$, при котором $u(0) \geqslant u_1'(0)$. В плоскости QH этому последнему условию, очевидно, соответствует $Q'(0) \geqslant Q_1'(0)$. Поэтому во всяком случае вблизи $H = 0$ разность $Q(H) - Q_1(H)$ положительна и удовлетворяет соотношению

$$Q(H) - Q_1(H) = [Q'(0) - Q_1'(0)]\, H + o(H) \tag{3.5}$$

Допустим далее, что интегральные кривые пересекаются в одной точке. Тогда при $H = 1$ должно быть $Q_1(1) > Q(1)$, а так как $Q'(1) - Q_1'(1) = 0$ согласно (3.4), то либо в этой точке либо в промежутке между точкой пересечения и $H = 1$ разность $Q(H) - Q_1(H)$ должна достигать минимума, т. е.

$$Q''(H) - Q_1''(H) \geqslant 0 \tag{3.6}$$

Учитывая это, получим из (3.1) и (3.3)

$$Q''(H) - Q_1''(H) = -2\left(\frac{\varphi(H)}{Q(H)} - \frac{\varphi_1(H)}{Q_1(H)}\right) m(H) < 0 \tag{3.7}$$

что противоречит следствию (3.6). Кроме того, если в промежуточной точке имеет место минимум, то между $H = 1$ и этой точкой должно быть $Q''(H) - Q_1''(H) = 0$, что также невозможно.

Легко видеть, что при нечетном числе пересечений кривых $Q(H)$ и $Q_1(H)$ имеем $Q_1(1) > Q(1)$, и приведенные выше рассуждения остаются в силе.

При четном числе пересечений в промежутке $[0, 1]$ найдется, очевидно, по крайней мере, одна точка $H = H_m$, в которой $Q(H) - Q_1(H)$ достигает минимума при $Q(H) < Q_1(H)$. Используя для этой точки уравнения (3.1) и (3.3), без труда приходим к противоречию. Таким образом, при соблюдении условий (3.4) для решений дифференциальных уравнений (3.1) и (3.3) имеет место неравенство

$$Q(H) \geqslant Q_1(H) \tag{3.8}$$

Пусть теперь известны два решения $Q_1(H)$ и $Q_2(H)$ уравнений

$$Q'' = -\frac{2m_i(H)\,\varphi_i(H)}{Q} + \frac{m_i'(H)}{m_i(H)}\, Q' \qquad (i=1,\,2) \tag{3.9}$$

причем

$$\varphi_1(H) \leqslant \varphi_2(H), \ldots, \qquad u_1(1) = u_2(1) = 0, \ldots, \qquad m_1(H) = m_2(H) = m(H) \tag{3.10}$$

Допустим далее, что выполняется следующее условие:

$$\varphi_1(H) \leqslant \varphi(H) \leqslant \varphi_2(H) \tag{3.11}$$

Очевидно, что

$$Q_2(H) \geqslant Q(H) \geqslant Q_1(H) \tag{3.12}$$

При надлежащем выборе кривых распределения $u_1(H)$ и $u_2(H)$ (или кривых $Q_1(H)$ и $Q_2(H)$) указанным в п. 1 обратным методом представляется возможным в ряде случаев удовлетворить условию (3.11) и тем самым дать оценку «снизу» и «сверху» приближенного решения дифференциального уравнения (3.1) при замене $\varphi(H)$ его мажорантой или минорантой.

4. Положим в уравнении (1.1) $m(H) = m_0 = \text{const}$ и проиллюстрируем метод оценок на этом частном уравнении. Решение примеров на основе более общего урав-

нения (1.1) ничего существенного не вносит в понимание метода и вместе с тем приводит к некоторым усложнениям.

Введя новую переменную $u = m_0^{1/2} x t^{-1/2}$ (для нее сохраняем прежнее обозначение), получим из (1.7) для случая $m(H) = m_0$

$$\varphi(H) = -\frac{1}{2} u' \int_0^H u \, dH \tag{4.1}$$

Зададимся распределением насыщенности в виде

$$u = c_1 (1 - H) + c_2 (1 - H^2) \tag{4.2}$$

и определим из (4.1) обратным способом $\varphi(H)$. Опуская выкладки, получим по формуле (4.1) для $\varphi(H)$ следующее значение:

$$\varphi(H) = \left[\frac{1}{2} c_1 (c_1 + c_2)\right] H + \left[c_2 (c_1 + c_2) - \frac{1}{4} c_1^2\right] H^2 - \left[\frac{2}{3} c_1 c_2\right] H^3 - \left[\frac{1}{3} c_2^2\right] H^4 \tag{4.3}$$

Из (4.3) путем дифференцирования по H найдем выражение для проницаемости

$$k(H) = \left[\frac{1}{2} c_1 (c_1 + c_2)\right] + \left[2c_2 (c_1 + c_2) - \frac{1}{2} c_1^2\right] H - [2c_1c_2] \ H^2 - \left[\frac{4}{3} c_2^2\right] H^3 \tag{4.4}$$

Для простейших случаев $c_1 = 0$ и $c_2 = 0$ получим из (4.3) и (4.4)

$$\varphi(H) = c_2^2 \left(H^2 - \frac{1}{3} H^4\right), \qquad k(H) = 2c_2^2 \left(H - \frac{2}{3} H^3\right) \tag{4.5}$$

$$\varphi(H) = \frac{1}{2} c_1^2 \left(H - \frac{1}{2} H^2\right), \qquad k(H) = \frac{1}{2} c_1^2 (1 - H) \tag{4.6}$$

Отметим, что в случае (4.5) первая производная насыщенности у фронта равна бесконечности, однако поток в этом сечении равен нулю.

Примеры. Сравним между собой два решения

$$\varphi_1(H) = H - \frac{1}{2} H^2, \qquad \varphi_2(H) = H \tag{4.7}$$

Здесь $\varphi_1(H)$ соответствует линейному изменению проницаемости по мощности от $k = 1$ у подошвы до $k = 0$ у кровли; $\varphi_2(H)$ — постоянному значению проницаемости $k = 1$.

Решение для $\varphi_1(H)$ согласно (4.6) имеет вид

$$H_1 = 1 - \sqrt{\frac{m_0}{2t}}\, x \tag{4.8}$$

Для $\varphi_2(H)$ получим решение из [4]

$$H_2 = -c\left(\frac{u}{\sqrt{2}} - c\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{u}{\sqrt{2}} - c\right)^2 - \frac{1}{72c}\left(\frac{u}{\sqrt{2}} - c\right)^3 + \ldots \quad (c = 1 \cdot 14277\ldots) \tag{4.9}$$

Подставляя значения H_1 и H_2 из (4.8) и (4.9) в (3.3), получим при $u = 0$

$$v_1 = 0.5 \sqrt{\frac{m_0}{2t}}, \qquad v_2 = 0.628 \sqrt{\frac{m_0}{2t}}, \qquad \frac{v_2}{v_1} = 1.256 \tag{4.10}$$

Из (4.10) видно, что разница в расходах фильтрационного потока составляет 26%, хотя эпюры проницаемости сильно отличаются одна от другой.

Более близкие значения v_1 и v_2 получаются при

$$\varphi_2(H) = H - \frac{1}{2} H^2, \qquad \varphi_1(H) = \frac{1}{2} H \tag{4.11}$$

Опуская промежуточные выкладки, получим в этом случае

$$v_2 / v_1 = 1.13$$

Отметим, что в обоих примерах первое условие (3.4) соблюдается.

Если $Q = 2m_0^{-1/2} t^{1/2} v$ есть решение дифференциального уравнения (3.2) (при $m = \text{const}$) и при этом выполняется условие (3.12), то для первого и второго примеров соответственно будет

$$1 < v / v_1 < 1.256, \qquad 1 < v / v_1 < 1.13$$

Отсюда следует, что при замене в дифференциальном уравнении (3.2) $\varphi(H)$ его мажорантой или минорантой допускается ошибка в вычислении v, не превышающая 26% (в первом примере) и 13% (во втором).

Выберем $\varphi_2(H)$ в виде полинома (4.4), причем примем

$$2c_2(c_1+c_2)-\frac{1}{4}c_1^2=0, \qquad \frac{1}{2}c_1(c_1+c_2)=1$$

Вычисления для $\varphi_2(H)$ и v_2 дают следующие значения:

$$\varphi_2(H)=H-0.230H^3-0.024H^4, \qquad v_2=0.411\sqrt{m_0/t}$$

Для $\varphi_1(H)=H>\varphi_2(H)$ имеем согласно [4]

$$v_1=0.628\sqrt{m_0/2t}$$

При $\varphi_3(H)=0.746H<\varphi_2(H)$

$$v_3=0.384\sqrt{m_0/t}$$

Таким образом

$$v_1/v_2=1.084, \qquad v_2/v_3=1.031$$

Очевидно, что при $\varphi_1(H)\geqslant\varphi(H)\geqslant\varphi_2(H)$ ошибка в результате замены $\varphi(H)$ функциями $\varphi_1(H)$ или $\varphi_2(H)$ будет не более 8.4%, а при $\varphi_2(H)\geqslant\varphi(H)\geqslant\varphi_3(H)$ не более 3.1%.

В заключение отметим, что так как неустановившаяся фильтрация газа описывается уравнением вида (1.1), то предложенный метод может быть в ряде случаев использован для оценки приближенных решений задач подземной газодинамики.

Поступила 10 IV 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова-Кочина П. Я. К теории неустановившихся движений в многослойной среде. ПММ, 1951, т. XV, вып. 4.
2. Аравин В. И., Нумеров С. Н. Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде. Гостехиздат, 1953.
3. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. ИИЛ, М., 1954, т. II.
4. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. Гостехиздат, 1952.
5. Баренблатт Г. И., Вишик М. И. О конечности скорости распространения в задачах нестационарной фильтрации жидкости и газа. ПММ, 1956, т. XX, вып. 3.

ЗАМЕЧАНИЯ К ЭНЕРГЕТИЧЕСКОМУ ПРИНЦИПУ В МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

К. Н. Степанов, В. В. Хоменюк

(Харьков)

Полученный в работах Лундквиста [1, 2], Бернштейна и др. [3] энергетический принцип нашел широкое применение при решении задач об устойчивости равновесных магнитогидродинамических конфигураций. Энергетический принцип является аналогом известных теорем [4,5,6] об устойчивости состояния равновесия системы материальных точек. Доказательство энергетического принципа, проведенное в работе [3], основывается на разложении малых смещений идеально проводящей жидкости в ряд по полной системе нормальных колебаний.

В работе дается доказательство теорем об устойчивости равновесных конфигураций идеально проводящей жидкости при помощи функций Ляпунова.

Заметим, что совокупность решений задачи Коши уравнений движения для малых смещений невязкой идеально проводящей жидкости от положения равновесия определяет общую систему. Зубов [6] использовал аналог функций Ляпунова для доказательства теорем об устойчивости инвариантного множества общей системы. А. А. Мовчан [7] применил функции Ляпунова для исследования устойчивости упругих систем.