ВЫПУЧИВАНИЕ ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ

С. А. Шестериков (Москва)

Проведем исследование выпучивания идеализированного стержня, когда принята теория упрочнения в форме

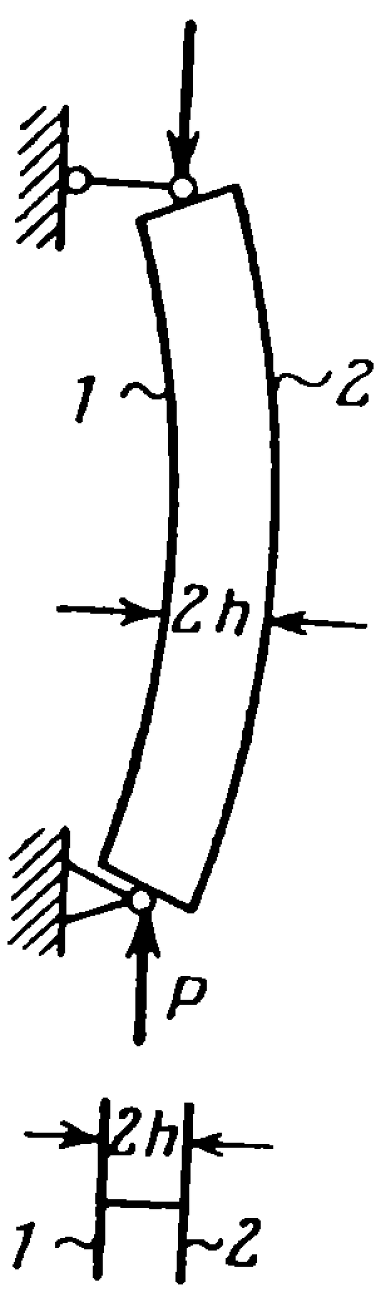
$$\dot{p} = Ap^{-\alpha}\sigma^n \qquad \left(p = \varepsilon - \frac{\sigma}{E}\right) \tag{1}$$

Дадим сравнение результатов с решением, полученным при линеаризации соотношения (1) [1,2]. Известно одно решение задачи о продольном изгибе идеализированного стержня по теории упрочнения, данное Либовым [3], в котором использовалась другая форма зависимости (1). Либов провел исследование с использованием численных методов, поэтому провести сравнение с линеаризованной постановкой задачи не представляется возможным.

Рассмотрим идеализированный двутавр (фигура). Примем, что стержень имеет первоначальный прогиб и сжат продольной силой P. Обозначив через F площадь полки и $2h$ толщину стержня, получим для напряжений в полках σ_1 и σ_2 (индекс 1 соответствует вогнутой полке) выражения

$$\sigma_1 = \sigma_0\left(1 + \frac{y}{h}\right), \qquad \sigma_2 = \sigma_0\left(1 - \frac{y}{h}\right), \qquad \sigma_0 = \frac{P}{2F} \tag{2}$$

Принимая гипотезу плоских сечений для деформаций в полках ε_1 и ε_2, получим



$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = -2h\,(y'' - y_0'') \tag{3}$$

Положим

$$y = hu \sin\frac{\pi x}{L}, \qquad y_0 = hu_{00} \sin\frac{\pi x}{L} \tag{4}$$

где u амплитуда безразмерного прогиба в середине стержня.

Проведем исследование, удовлетворяя всем уравнениям только в середине стержня, тогда получим

$$\frac{2h^2\pi^2}{L^2}\left[(u - u_{00}) - \beta u\right] = p_1 - p_2 \qquad \left(\beta = \frac{P}{P_э} < 1\right) \tag{5}$$

где $P_э$ — критическая нагрузка для упругого стержня.

Оценим величину $z = p_1 - p_2$, используя выражения (1). Получим

$$z = \{A(1+\alpha)\sigma_0^n\}^{\frac{1}{1+\alpha}}\left\{\left[\int_0^t (u+1)^n dt\right]^{\frac{1}{1+\alpha}} - \left[\int_0^t (1-u)^n dt\right]^{\frac{1}{1+\alpha}}\right\} \tag{6}$$

Для малых значений параметра u получим

$$z^{1+\alpha} \approx A(1+\alpha)\sigma_0^n\left(\frac{2nu_0}{1+\alpha}\right)^{1+\alpha} t \tag{7}$$

На основе этого примем

$$\dot{z}z^\alpha \approx A\sigma_0^n\left(\frac{2n}{1+\alpha}\right)^{1+\alpha} u^{1+\alpha} \tag{8}$$

Для больших значений параметра u получим

$$z^{\alpha+1} \approx A(1+\alpha)\sigma_0^n 2\int_0^t u^n\, dt + c \qquad \text{или} \qquad \dot{z}z^\alpha \approx A\sigma_0^n 2u^n \tag{9}$$

Окончательно примем, что

$$\dot{z}z^\alpha = A\sigma_0^n k u^{1+\alpha}(k_1 u + 1)^{n-1-\alpha} \qquad \left(k = \left(\frac{2n}{1+\alpha}\right)^{1+\alpha}, \quad k_1^{n-1-\alpha} = \frac{(1+\alpha)^{1+\alpha}}{2^\alpha n^{1+\alpha}}\right) \tag{10}$$

Совмещая (5) и (10), окончательно получим

$$\frac{(u-u_0)^\alpha \dot{u}}{u^{1+\alpha}(k_1 u + 1)^{n-1-\alpha}} = A_1 \tag{11}$$

$$\left(A_1 = A\sigma_0^n k k_2^{-1-\alpha},\ k_2 = \frac{2h^2\pi^2}{L^2}(1-\beta),\ u_0 = \frac{u_{00}}{1-\beta}\right)$$

Таким образом, задача нахождения зависимости $u = u(u_0, t)$ сведена к квадратурам. Условие $\ddot{u} = 0$ дает для определения критического значения u_* уравнение

$$k_1 (n - \alpha) u_*^2 + (1 - k_1 u_0) u_* - (1 + \alpha) u_0 = 0 \tag{12}$$

При $u_0 \ll 1$ имеем $u_* = (1 + \alpha) u_0$. Следовательно, в (11) можно пренебречь $k_1 u$ по сравнению с единицей, тогда получим

$$A_1 t_* = \int\limits_{u_0}^{u_0(1+\alpha)} \frac{(u - u_0)^\alpha du}{u^{1+\alpha}} \tag{13}$$

Очевидно, что t_* не зависит от u_0. Имеем

$$t_*(\alpha) = \frac{1}{A_1} \int\limits_1^{1+\alpha} \frac{(x-1)^\alpha dx}{x^{\alpha+1}} \tag{14}$$

Для удобства введем вместо времени t деформацию, отвечающую среднему напряжению, т. е.

$$\dot{p} p^\alpha = A \sigma_0^n \tag{15}$$

Тогда

$$p_* = \left\{ \frac{A\sigma_0^n}{1+\alpha} t_* \right\}^{\frac{1}{1+\alpha}} \tag{16}$$

или

$$p_* = \frac{k_2}{2n} (\alpha + 1) \Psi(\alpha), \qquad \Psi(\alpha) = \left[(1 + \alpha) \int\limits_1^{1+\alpha} \frac{(x-1)^\alpha dx}{x^{1+\alpha}} \right]^{\frac{1}{1+\alpha}} \tag{17}$$

Так как для данного стержня $\varepsilon_0 = h^2 a^2 / L^2$ и $\varepsilon = \sigma_0 / E$, то можно записать

$$p_{1*} = \frac{n p_*}{\varepsilon_0 - \varepsilon} = (1 + \alpha) \Psi(\alpha) \tag{18}$$

Выражение (18) аналогично формуле (16) в работе [2], в которой p также является функцией только α. Для случая $\alpha = 1$ имеем

$$p_1 = 1.36, \qquad p_{1*} = 1.32 \tag{19}$$

Выражения (18) и (19) показывают, что введенный в линеаризованной задаче критерий $\ddot{u} = 0$ приводит и в нелинейной задаче в случае малых u_0 к совпадающим результатам. Проведем сравнение значений t_* с t_∞, полученным из условия $u \to \infty$. Из (11) получим

$$t_\infty = \frac{1}{A_1} \int\limits_{u_0}^{\infty} \frac{(u - u_0)^\alpha du}{(1 + k_1 u)^{n-1-\alpha} u^{1+\alpha}} \tag{20}$$

Очевидно, что $t_\infty \to \infty$ при $u_0 \to 0$ и всегда $t_\infty > t_*$. Оценку проведем в параметре p. Имеем

$$\lambda = \left(\frac{p_{1\infty}}{p_{1*}} \right)^{1+\alpha} = \left(\int\limits_0^\infty \frac{(u - u_0)^\alpha du}{u^{\alpha+1} (k_1 u + 1)^{n-1-\alpha}} \right) \left(\int\limits_0^{u_*} \frac{(u - u_0)^\alpha du}{u^{1+\alpha} (k_1 u + 1)^{n-1-\alpha}} \right)^{-1} \tag{21}$$

где u_* определяется из уравнения (12).

Для значений $n = 3$, $\alpha = 1$ из (21) для u_0 равном 0.001, 0.01, 0,1, 1 и 10, имеем соответственно значения равные 40, 25, 14, 7 и 1,5. Для этих же значений u_0 имеем значения параметра (p_1/p_{1*}) равные 1, 1.03, 1.35, 10. Из полученных числовых данных следует, что критерий $\ddot{u} = 0$ для нелинейной и линеаризованной задач дает практически совпадающие результаты при $u_0 < 1$. Очевидно, что для реального стержня с начальным прогибом, u_0 условие $u \to \infty$ дает верхнюю оценку, а условие $\ddot{u} = 0$ нижнюю.

Поступила 14 IV 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю. Н., Шестериков С. А. Устойчивость стержней и пластинок в условиях ползучести. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 3.
2. Шестериков С. А. О критерии устойчивости при ползучести. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 6.
3. Libov C. Creep buckling of columns. J. Aeronaut. Sci., 1952, 19, No. 7.