О КОНЕЧНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ НА КРАЮ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ТРЕЩИНЫ

Г. И. Баренблатт, Г. П. Черепанов (Москва)

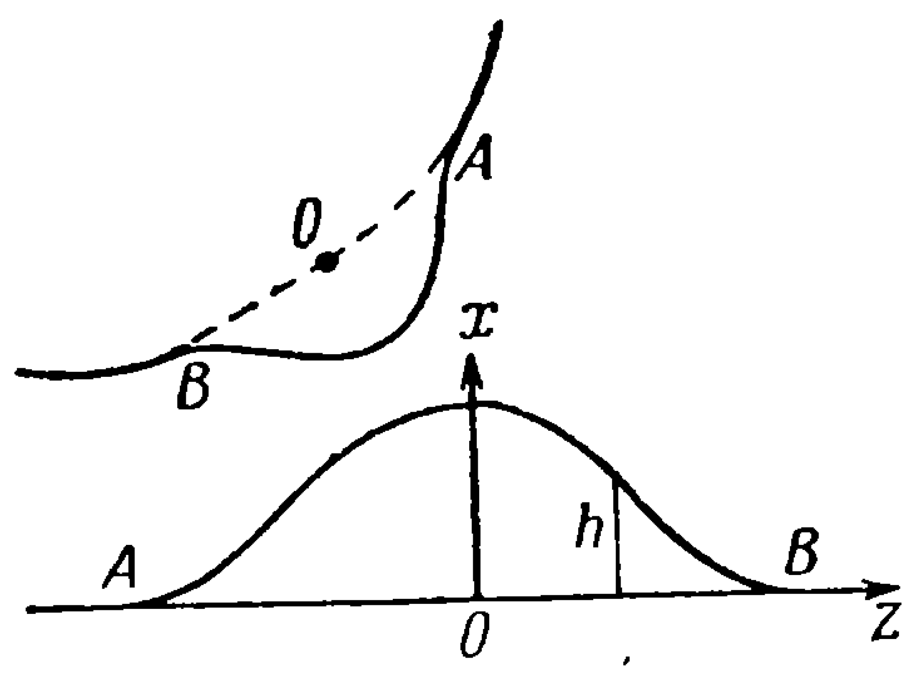
Условие конечности напряжений и плавности смыкания на краю трещины нормального разрыва было предложено в гипотетической форме С. А. Христиановичем [1] в качестве основного условия, определяющего положение концов трещины. В [2] было дано доказательство этого условия для случая трещин нормального разрыва. В предлагаемой заметке конечность напряжений и плавность смыкания трещины на ее контуре доказывается для произвольной равновесной трещины, т. е. произвольной поверхности разрыва смещений, находящейся в равновесии в упругом теле под действием приложенных нагрузок и сил сцепления.

1°. Рассмотрим окрестность некоторой точки O контура поверхности произвольного разрыва смещений, т. е. поверхности, на которой претерпевают разрыв все три компоненты вектора смещений. Система ортогональных координат с центром в точке O выбирается так, что плоскость xz — соприкасающаяся плоскость к контуру поверхности разрыва в точке O, ось z направлена вдоль контура, ось x — в глубь тела. Можно показать, что распределение напряжений в точках оси x вблизи начала имеет вид

$$\sigma_y = \frac{N}{\sqrt{x}} + O(1), \qquad \tau_{xy} = \frac{T_1}{\sqrt{x}} + O(1), \qquad \tau_{yz} = \frac{T_2}{\sqrt{x}} + O(1), \qquad \sigma_x,\ \tau_{xz},\ \sigma_z = O(1) \qquad (1)$$

Здесь σ_y, τ_{xy}, $\tau_{yz}\ldots$ — компоненты тензора напряжений, N, T_1, T_2 — величины, зависящие от приложенных нагрузок, формы границ тела и контуров трещин, имеющихся в теле и положения точки O, но не зависящие от x.

Смещения в точках оси x представляются следующими формулами (см. [3,4])



$$u = -\frac{2(1+\nu)(1-2\nu)}{E} N\sqrt{x} + O(x^{3/2}) \qquad (x>0)$$

$$u = \pm\frac{2(1-\nu^2)}{E} T_1\sqrt{-x} + O(x^{3/2}) \qquad (x<0)$$

$$v = \frac{2(1+\nu)(1-2\nu)}{E} T_1\sqrt{x} + O(x^{3/2}) \qquad (x>0)$$

$$v = \pm\frac{2(1-\nu^2)}{E} N\sqrt{-x} + O(x^{3/2}) \qquad (x<0)$$

$$w = \pm\frac{2(1+\nu)}{E} T_2\sqrt{-x} \qquad (x<0)$$

$$w = 0 \qquad (x>0) \qquad (2)$$

Здесь u, v, w — компоненты вектора смещений; E, ν — соответственно модуль Юнга и коэффициент Пуассона, знаки плюс и минус отвечают соответственно нижнему и верхнему берегам трещины.

2°. Перейдем от действительного равновесного состояния упругого тела с трещиной к возможному, которое отличается от действительного только тем, что поверхность разрыва вблизи точки O несколько расширена (фигура), так что новый контур трещины вблизи O представляет собой гладкую кривую, все точки которой лежат поблизости от O. Кривая касается прежнего контура в точках A и B. Вычислим энергию δA, освобождающуюся при упомянутом расширении поверхности разрыва. Имеем выражение δA в виде интеграла по новой поверхности трещины

$$\delta A = \frac{1}{2}\, 2\int \{\sigma_y \delta v + \tau_{xy}\delta u + \tau_{yz}\delta w\}\, dS \qquad (3)$$

где

$$\delta u = \frac{2(1+\nu)}{E}\left[(1-2\nu) N\sqrt{x} + (1-\nu) T_1\sqrt{h-x}\right] + \cdots$$

$$\delta v = \frac{2(1+\nu)}{E}\left[-(1-2\nu) T_1\sqrt{x} + (1-\nu) N\sqrt{h-x}\right] + \cdots$$

$$\delta w = \frac{2(1+\nu)}{E} T_2\sqrt{h-x} + \ldots$$

(точками отмечены малые высшего порядка). Множитель два появляется в связи с тем, что вклады в освобождающуюся энергию от верхнего и нижнего берегов трещины равны. Выражение для приращения энергии принимает вид

$$\delta A = \int_a^b dz \left\{\frac{2(1+\nu)}{E}[(1-\nu)(N^2+T_1^2)+T_2^2]\right\}\int_0^h \sqrt{\frac{h-x}{x}}\,dx =$$

$$= \frac{(1+\nu)\pi}{E}[(1-\nu)(N^2+T_1^2)+T_2^2]\int_a^b h\,dz =$$

$$= \frac{(1+\nu)\pi}{E}[(1-\nu)(N^2+T_1^2)+T_2^2]\,\delta S \qquad (4)$$

Соответствующая формула для трещин нормального разрыва дана Ирвином [5,4].

Но если рассматриваемая поверхность разрыва будет равновесной трещиной, то энергия δA должна обращаться в нуль, откуда и из (4) получаем

$$(1-\nu)(N^2+T_1^2)+T_2^2 = 0 \qquad (5)$$

Отсюда, очевидно,

$$N = T_1 = T_2 = 0$$

Этим доказана конечность напряжений и плавность смыкания противоположных берегов трещины на контуре произвольной трещины.

3°. Предыдущее рассмотрение относилось к трещине произвольного разрыва, на поверхности которой разрывы всех трех компонент вектора смещения отличны от нуля, так что $[u]\neq 0$, $[v]\neq 0$, $[w]\neq 0$; знак $[\ldots]$ обозначает разность значений функции по обе стороны разрыва. Для трех специальных типов трещин: трещин нормального разрыва ($[u]=[w]=0$, $[v]\neq 0$), трещин поперечного сдвига ($[u]\neq 0$, $[v]=[w]=0$) и трещин продольного сдвига ($[u]=[v]=0$, $[w]\neq 0$) возможно более детальное рассмотрение, если принять гипотезы малости и автономности концевой области поверхности трещин [6]. Последняя гипотеза состоит в том, что для всех точек контура трещины, в которых интенсивность сил сцепления равна максимально возможной, форма нормального сечения концевой области и, следовательно, локальное распределение сил сцепления не зависят от приложенной нагрузки. Очевидно, что для трещин произвольного разрыва вторая гипотеза неприменима и что для трещин различного типа форма концевой области поверхности трещины неодинакова.

Трещины нормального разрыва подробно разобраны ранее. Для трещин продольного и поперечного сдвига вполне аналогично [6] получаем граничное условие в точках контура, в которых интенсивность сил сцепления максимальна

$$T_1^0 = \frac{M}{\pi}, \qquad M = \int_0^d \frac{\tau_1(t)\,dt}{\sqrt{t}}, \qquad T_2^0 = \frac{L}{\pi}, \qquad L = \int_0^d \frac{\tau_2(t)\,dt}{\sqrt{t}} \qquad (6)$$

где T_1^0 и T_2^0 — соответствующие величины, вычисленные без учета сил сцепления, d — ширина концевой области трещины, $\tau_1(t)$ и $\tau_2(t)$ — соответственно интенсивности сил сцепления для трещин обоих типов. Вполне аналогично случаю трещины нормального разрыва величины M и L будут константами материала, определяющими его сопротивление соответствующим типам разрушения.

Поступила 28 IV 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Желтов Ю. П., Христианович С. А. О механизме гидравлического разрыва нефтеносного пласта. Изв. АН СССР, ОТН, 1955, № 5.
2. Баренблатт Г. И. О гипотезах конечности в механике сплошных сред. Статические задачи теории упругости. ПММ, т. XXIV, 1960, вып. 2.
3. Williams M. L. On the stress distribution at the base of a stationary crack. J. Appl. Mech., 1957, v. 24, № 1.
4. Irwin G. R., Fracture. Handbuch der Physik, B. VI, Springer, Berlin, 1958.
5. Irwin G. R. Analysis of stresses and strains near the end of a crack, traversing a plate. J. Appl. Mech., 1957, v. 24, № 3.
6. Баренблатт Г. И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. ПММ, т. XXIII, 1959, № 3—5.