после чего опять начинается возрастание частоты. Затягивание колебаний происходит в сторону больших частот.

В случае же $m_1 = 3$, $m_2 = 2$ график амплитуд установившихся колебаний меняет свой вид (фиг. 7) и затягивание колебаний происходит в сторону меньших частот. Далее укажем, что если $m_1 = m_2$, то установление колебаний, в зависимости от модулей коэффициентов A_i, происходит по кривой, изображенной на фиг. 4 или 5. В этом частном случае, если $|A_1| = |A_2|$, то нелинейность исчезает.

Для полноты картины отметим также, что в случае, когда $A_1 < 0$, $A_2 > 0$, все вышеприведенные выкладки повторяются, но графики амплитуд установившихся колебаний меняют свою форму и в зависимости от m_i представляются следующими графиками: при $m_1 = 2$, $m_2 = 3$ (фиг. 7), при $m_1 = 3$, $m_2 = 2$ (фиг. 6), при $m_1 = m_2$ (фиг. 5) или (фиг. 4).

Поступила 22 IV 1961

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А. К теории изгиба нелинейно-упругих трехслойных пластинок. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1960, № 6.
2. Ильюшин А. А. Пластичность. М.—Л., ГИТТЛ, 1948.
3. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. М., ГИТТЛ, 1956.
4. Prager W. On ideal locking materials. Transactions of the Society of Rheology. 1957, 1.
5. Гнуни В. Ц. О границах динамической неустойчивости оболочек. Тр. Конференции по теории оболочек и пластин, Казань, 1960.

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ УПРУГИХ ПОТЕНЦИАЛОВ ИЗ ОПЫТА

М. Э. Эглит

(Москва)

Закон Гука для простого растяжения можно написать в следующем виде:

$$\sigma = E\varepsilon \tag{1}$$

Здесь σ — растягивающее напряжение, ε — коэффициент удлинения, а E — постоянная — модуль Юнга.

В работе Д. Д. Ивлева [1] было показано, что в случае малых деформаций справедливость закона (1) для простых растяжений недостаточна для выполнимости линейного закона Гука при произвольных малых деформациях. Им были построены примеры физически нелинейных упругих тел, подчиняющихся однако закону (1) при простых растяжениях.

Известно [2], что в рамках теории упругости с конечными деформациями вообще невозможно построить изотропную упругую среду, для которой в пространстве начальных состояний компоненты тензора напряжений зависят линейно от компонент тензора конечных деформаций, причем это предложение верно не только для произвольных деформаций, но даже и для таких частных классов деформаций, как плоская деформация и плоское напряженное состояние. Несмотря на это, можно построить примеры нелинейно-упругих тел, в которых для конечных деформаций, отвечающих простым растяжениям, выполняется равенство (1).

В рамках теории малых деформаций (геометрически линейной теории упругости) покажем, что факт выполнения закона Гука при любом плоском деформированном или плоском напряженном состоянии материала также не позволяет сделать вывод о том, что материал удовлетворяет закону Гука при произвольном, пространственном деформированном состоянии.

Упругую среду можно определить заданием свободной энергии $F'(\varepsilon_{ij}, T)$ или термодинамического потенциала $\Psi'(\sigma^{ij}/\rho, T)$, где ρ — плотность, а T — температура среды. Связи между напряжениями и деформациями при этом имеют вид [3]

$$\sigma^{ij} = \rho \frac{\partial F'}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad \text{или} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{\partial \Psi'}{\partial (\sigma^{ij}/\rho)} \tag{2}$$

Формулы (2) верны для любых процессов в общем случае конечных деформаций упругих тел.

Если деформации малы, то для физически нелинейных тел можно в формулах (2) принять плотность ρ постоянной и

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

В этом случае формулы (2) можно представить в виде

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}}, \qquad \varepsilon_{ij} = \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_{ij}} \tag{3}$$

Очевидно, что формулы (3) необходимо рассматривать как физически приближенные. Это обстоятельство необходимо иметь в виду при исследованиях, в которых учитываются малые добавки к напряжениям порядка изменений плотности.

Для изотропного тела первая из формул (3) записывается в виде

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{\partial F}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial F}{\partial I_2} + I_2 \frac{\partial F}{\partial I_3}\right)\delta_{ij} - \left(\frac{\partial F}{\partial I_2} + I_1 \frac{\partial F}{\partial I_3}\right)\varepsilon_{ij} + \frac{\partial F}{\partial I_3}\varepsilon_{ik}\varepsilon_{kj} \tag{4}$$

Здесь I_1, I_2, I_3 — система инвариантов тензора деформации. В декартовых координатах имеем

$$I_1 = \varepsilon_{ii}, \qquad I_2 = \frac{1}{2}(\varepsilon_{ii}\varepsilon_{jj} - \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ji}), \qquad I_3 = |\varepsilon_{ij}| = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} \tag{5}$$

Пусть рассматриваемый материал при любом изотермическом процессе плоского деформирования ($T = T_0$, $I_3 = 0$) удовлетворяет соотношениям

$$\sigma_{ij} = \lambda_0 I_1 \delta_{ij} + 2\mu_0 \varepsilon_{ij} \tag{6}$$

Очевидно, что любая функция F, имеющая вид

$$F = \frac{\lambda(I_1, I_2, I_3, T) + 2\mu(I_1, I_2, I_3, T)}{2} I_1^2 - 2\mu(I_1, I_2, I_3, T) I_2 + f(I_1, I_2, I_3, T) \tag{7}$$

при условии

$$\lambda(I_1, I_2, 0, T_0) = \lambda_0, \qquad \mu(I_1, I_2, 0, T_0) = \mu_0$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial I_1} = \frac{\partial \lambda}{\partial I_2} = \frac{\partial \lambda}{\partial I_3} = \frac{\partial \mu}{\partial I_1} = \frac{\partial \mu}{\partial I_2} = \frac{\partial \mu}{\partial I_3} = \frac{\partial f}{\partial I_1} = \frac{\partial f}{\partial I_2} = \frac{\partial f}{\partial I_3} = 0 \quad \text{при } I_3 = 0$$

может служить потенциальной функцией (свободной энергией) такого материала. В этом материале закон Гука выполняется для любого плоского деформированного состояния и не выполняется в общем случае.

Аналогичным путем, используя второе из соотношений (3), легко выбором функции $\Psi(\sigma_{ij}, T)$ построить упругие среды, для которых при изотермических процессах в плоских напряженных состояниях выполняется закон Гука, но этот закон не выполняется в общем случае.

Поступила 23. IV. 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Ивлев Д. Д. К построению теории упругости. ДАН СССР, 1961, т. 138, № 6.
2. Седов Л. И. Основы нелинейной механики сплошной среды. М., Издание ВЦ АН СССР, 1960.
3. Новожилов В. В. Теория упругости. Судпромгиз, 1958.