

О ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИХ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИНОК

С. А. Амбарцумян, В. Ц. Гнуни

(Ереван)

1. Пусть пластинка отнесена к триортогональной системе координат α, β, γ так, что срединная плоскость симметричной пластинки (фиг. 1) совпадает с плоскостью $\alpha\beta$. Сделаем следующие предположения [1,2].

а) Гипотезу недеформируемых нормалей для всего пакета пластинки в целом.

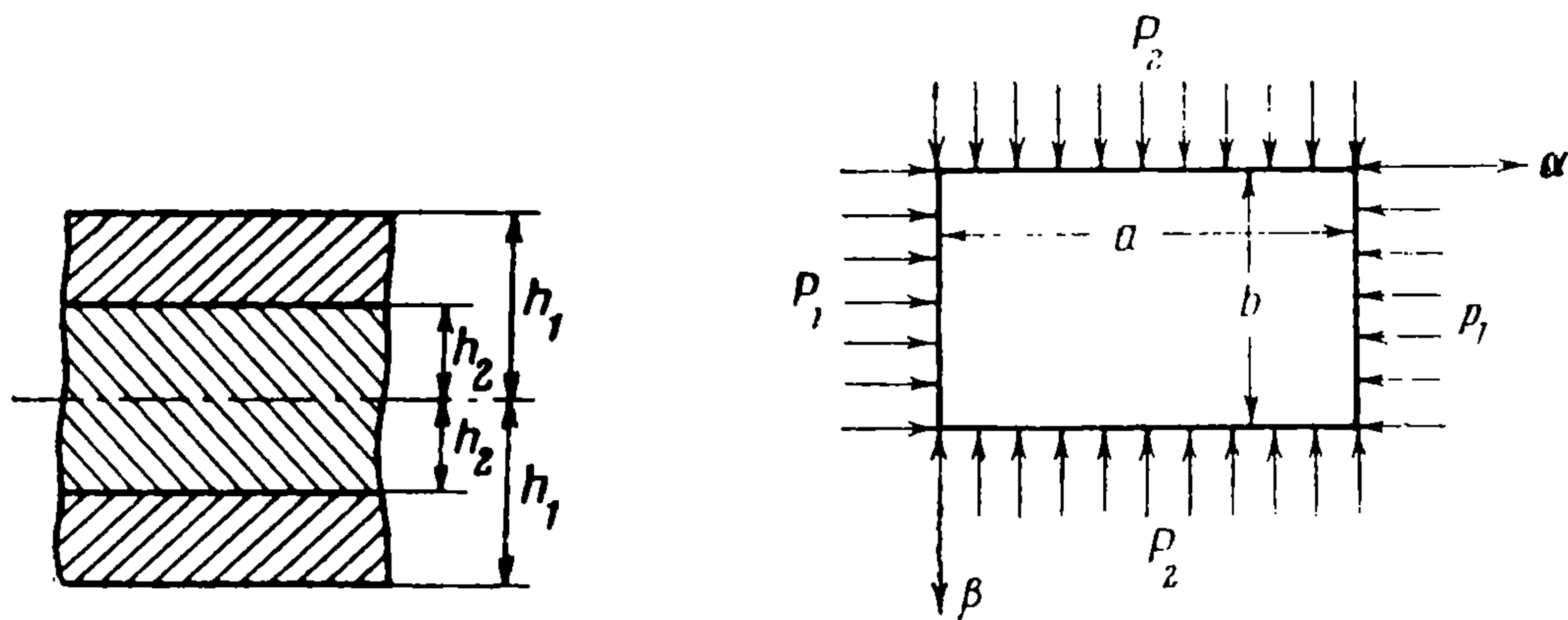
б) Несжимаемость материалов каждого слоя пластинки.

в) Совпадение направляющих тензоров напряжений и деформаций в каждом слое пластинки.

г) Между интенсивностями напряжений T_i и деформаций E_i имеет место зависимость

$$T_i = a_i E_i - b_i E_i^{m_i} \quad (1.1)$$

Здесь i — номер слоя, a_i, b_i, m_i — некоторые константы, причем b_i может принимать как положительные [2,3], так и отрицательные [4] значения.



Фиг. 1

Фиг. 2

При сделанных предположениях уравнение для нормального перемещения w имеет вид [1]

$$\begin{aligned} D_e \Delta^2 w - D_p \Delta^2 w - 2 \frac{\partial D_p}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} \right) - 2 \frac{\partial D_p}{\partial \beta} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} \right) - \\ - \frac{\partial^2 D_p}{\partial \alpha^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \right) - \frac{\partial^2 D_p}{\partial \beta^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \right) - \frac{\partial^2 D_p}{\partial \alpha \partial \beta} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} = \\ = Z(\alpha, \beta, t) - m^* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} D_e &= \frac{8}{9} [a_2 h_2^3 + a_1 (h_1^3 - h_2^3)], & D_p &= \sum_{i=1}^2 D_i P_x^{(m_i-1)/2} \\ D_1 &= 2^{m_1+2} 3^{-(m_1+1)/2} \frac{h_1^{m_1+2} - h_2^{m_1+2}}{m_1+2}, & D_2 &= 2^{m_2+2} 3^{-(m_2+1)/2} \frac{h_2^{m_2+2}}{m_2+2} \\ P_x &= \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} \right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$m^* = \frac{2}{g} [\gamma_2 h_2 + \gamma_1 (h_1 - h_2)]$$

При этом g — ускорение силы тяжести, γ_i — удельный вес материала i -го слоя пластинки.

2. Пусть в плоскости α, β пластинка подвергается действию равномерно распределенных сжимающих усилий P_1 и P_2 (фиг. 2), которые изменяются во времени. Тогда, как известно [3], будем иметь

$$\Delta Z = -P_1 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - P_2 \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \quad (2.1)$$

Подставляя (2.1) в (1.2), получим уравнение динамической устойчивости нелинейно-упругих трехслойных пластин

$$D_e \Delta^2 w - D_p \Delta^2 w - 2 \frac{\partial D_p}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial \alpha^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha \partial \beta^2} \right) - 2 \frac{\partial D_p}{\partial \beta} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial \beta^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha^2 \partial \beta} \right) - \\ - \frac{\partial^2 D_p}{\partial \alpha^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \right) - \frac{\partial^2 D_p}{\partial \beta^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \right) - \\ - \frac{\partial^2 D_p}{\partial \alpha \partial \beta} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} + m^* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + P_1(t) \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + P_2(t) \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} = 0 \quad (2.2)$$

Решение (2.2) ищем в виде

$$w = f(t) X(\alpha) Y(\beta) \quad (2.3)$$

где $f(t)$ — искомая функция времени, $X(\alpha)$ и $Y(\beta)$ — функции, зависящие каждая от одного аргумента и выбранные заранее так, чтобы удовлетворились граничные условия, заданные на краях прямоугольного контура относительно w . За $X(\alpha)$ и $Y(\beta)$ можно выбрать базисные фундаментальные функции.

Подставляя (2.3) в (2.2) и используя метод Бубнова—Галеркина, для определения f получим нелинейное дифференциальное уравнение

$$f'' + \omega^2 \left(1 - \frac{P_1}{P_{1*}} - \frac{P_2}{P_{2*}} \right) f - \alpha_1 |f|^{m_1-1} f - \alpha_2 |f|^{m_2-1} f = 0 \quad (2.4)$$

где

$$\omega^2 = D_e \frac{J_3}{m^* J_0}, \quad P_{1*} = D_e \frac{J_3}{J_1}, \quad P_{2*} = D_e \frac{J_3}{J_2}, \quad \alpha_i = D_i \frac{J^i}{m^* J_0} \\ J_0 = \int_0^a \int_0^b X^2 Y^2 d\alpha d\beta, \quad J_3 = \int_0^a \int_0^b (X^{IV} Y + 2X'' Y'' + X Y^{IV}) X Y d\alpha d\beta \\ J_1 = - \int_0^a \int_0^b X'' X Y^2 d\alpha d\beta, \quad J_2 = - \int_0^a \int_0^b X^2 Y'' Y d\alpha d\beta \\ J^i = \int_0^a \int_0^b K^{(m_i-1)/2} (X^{IV} Y + 2X'' Y'' + X Y^{IV}) + \frac{m_i-1}{2} K^{(m_i-3)/2} \times \\ \times \left[2 \frac{\partial K}{\partial \alpha} (X''' Y + X' Y'') + 2 \frac{\partial K}{\partial \beta} (X Y''' + X'' Y') + \frac{\partial^2 K}{\partial \alpha^2} \left(X'' Y + \frac{1}{2} X Y'' \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 K}{\partial \beta^2} \left(X Y'' + \frac{1}{2} X'' Y \right) + \frac{\partial^2 K}{\partial \alpha \partial \beta} X' Y' \right] + \frac{(m_i-1)(m_i-3)}{4} K^{(m_i-5)/2} \times \\ \times \left[\left(\frac{\partial K}{\partial \alpha} \right)^2 \left(X'' Y + \frac{1}{2} X Y'' \right) + \left(\frac{\partial K}{\partial \beta} \right)^2 \left(X Y'' + \frac{1}{2} X'' Y \right) + \frac{\partial K}{\partial \alpha} \frac{\partial K}{\partial \beta} X' Y' \right] \} X Y d\alpha d\beta \\ K = (X'' Y)^2 + (X Y'')^2 + (X' Y')^2 + X'' Y X Y'' \quad (2.5)$$

Здесь ω — линейное значение частоты собственных колебаний, P_{1*} и P_{2*} — критические значения усилий P_1 и P_2 при их независимом статическом действии.

В частном случае, когда $m_1 = m_2 = 3$, имеем

$$f'' + \omega^2 \left(1 - \frac{P_1}{P_{1*}} - \frac{P_2}{P_{2*}} \right) f - \alpha f^3 = 0 \quad (2.6)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{m^* J_0} \sum_{i=1}^2 D_i \int_0^a \int_0^b \left[K (X^{IV} Y + 2X'' Y'' + X Y^{IV}) + 2 \frac{\partial K}{\partial \alpha} (X''' Y + X' Y'') + \right. \\ \left. + 2 \frac{\partial K}{\partial \beta} (X Y''' + X'' Y') + \frac{\partial^2 K}{\partial \alpha^2} \left(X'' Y + \frac{1}{2} X Y'' \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 K}{\partial \beta^2} \left(X Y'' + \frac{1}{2} X'' Y \right) + \frac{\partial^2 K}{\partial \alpha \partial \beta} X' Y' \right] X Y d\alpha d\beta \quad (2.7)$$

Аналогичное (2.6) уравнение для однородных нелинейно-упругих стержней получено В. В. Болотиним [3].

В случае шарнирно-опертой по краям бесконечной полосы (фиг. 3), полагая $X = \sin(\lambda\alpha/a)$, из (2.5) получим

$$\omega^2 = \frac{D_e \lambda^4}{m^*}, \quad P_{1*} = D_e \lambda^2, \quad \lambda = \frac{\pi}{a}$$

$$\alpha_i = \frac{2m_i D_i \lambda^{2(m_i+1)}}{m^* a} \int_0^a [m_i \sin^{m_i+1} \lambda\alpha + (m_i - 1) \sin^{m_i-1} \lambda\alpha] d\alpha \quad (2.8)$$

3. Пусть

$$P_i = P_{i0} + P_{it} \cos \theta t \quad (i = 1, 2) \quad (3.1)$$

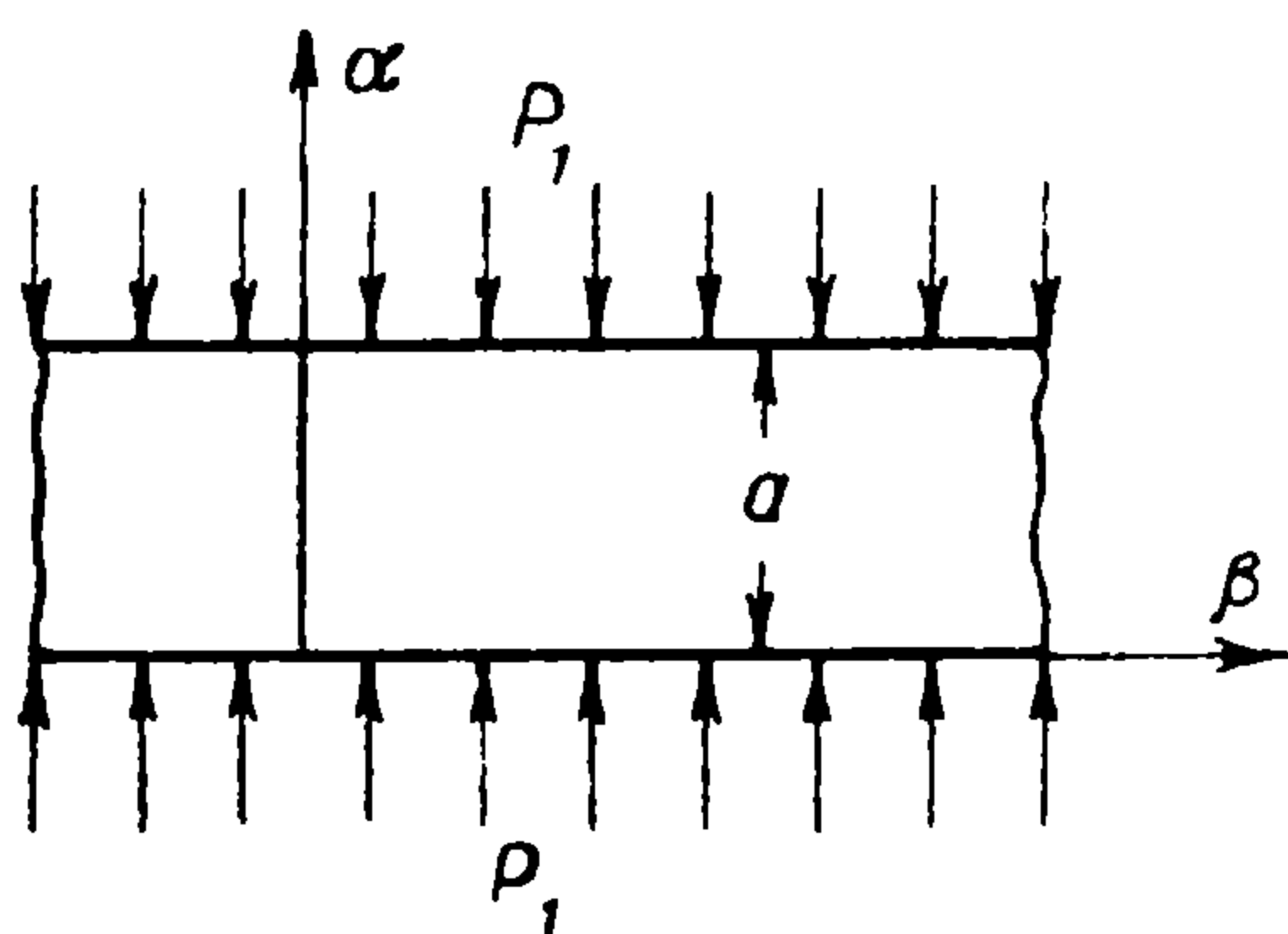
Тогда уравнение (2.4), с учетом линейного затухания, можно привести в виде

$$f'' + 2\varepsilon f' + \Omega^2 (1 - 2\mu \cos \theta t) f - \alpha_1 |f|^{m_1-1} f - \alpha_2 |f|^{m_2-1} f = 0 \quad (3.2)$$

Здесь ε — коэффициент линейного затухания

$$\Omega^2 = \omega^2 \left(1 - \frac{P_{10} P_{2*} - P_{20} P_{1*}}{P_{1*} P_{2*}} \right)$$

$$\mu = \frac{1}{2} \frac{P_{1t} P_{2*} + P_{2t} P_{1*}}{P_{1*} P_{2*} - P_{10} P_{2*} - P_{20} P_{1*}} \quad (3.3)$$



Фиг. 3

известно [3], что (3.2) можно записать таким образом, чтобы его «линейная часть» допускала периодическое решение с периодом $T = 2\pi/\theta$ или $2T$

$$f'' + 2\varepsilon_* f' + \Omega_*^2 (1 - 2\mu \cos \theta t) f + V(f, f', t) = 0 \quad (3.4)$$

Здесь

$$\Omega_* = \Omega \frac{\theta}{\theta_*}, \quad \varepsilon_* = \varepsilon \frac{\theta}{\theta_*} \quad (3.5)$$

$$V(f, f', t) = 2(\varepsilon - \varepsilon_*) f' + (\Omega^2 - \Omega_*^2) (1 - 2\mu \cos \theta t) f - \alpha_1 |f|^{m_1-1} f - \alpha_2 |f|^{m_2-1} f$$

Критическая частота θ_* определяется из предположения, что начальное невозмущенное состояние не деформировано [3,5]. Например, для границ главной области неустойчивости имеем

$$\theta_*^2 \approx 4\Omega^2 \left(1 \mp \sqrt{\mu^2 - \frac{4\varepsilon^2}{\Omega^2}} \right) \quad (3.6)$$

На границах этой области, т. е. когда $\theta = \theta_*$, линейная часть уравнения (3.4) допускает периодические решения, которые при $\mu \ll 1$ приближенно представляются в следующем виде

$$\varphi_1(t) \approx \cos\left(\frac{\theta t}{2} - \varepsilon\right), \quad \varphi_2(t) \approx \sin\left(\frac{\theta t}{2} - \varepsilon\right) \quad \left(\varepsilon \approx \frac{1}{2} \arcsin \frac{\theta^3 \varepsilon_*}{4\mu \Omega_*^2}\right) \quad (3.7)$$

На основе метода Л. И. Мандельштама [3] амплитуду установившихся колебаний C в нулевом приближении для границ главной области неустойчивости можно определить из уравнения

$$\int_0^{2T} V[C\varphi_i(t), C\varphi_i'(t), t] \varphi_i(t) dt = 0 \quad (3.8)$$

Отсюда получается нелинейное алгебраическое уравнение

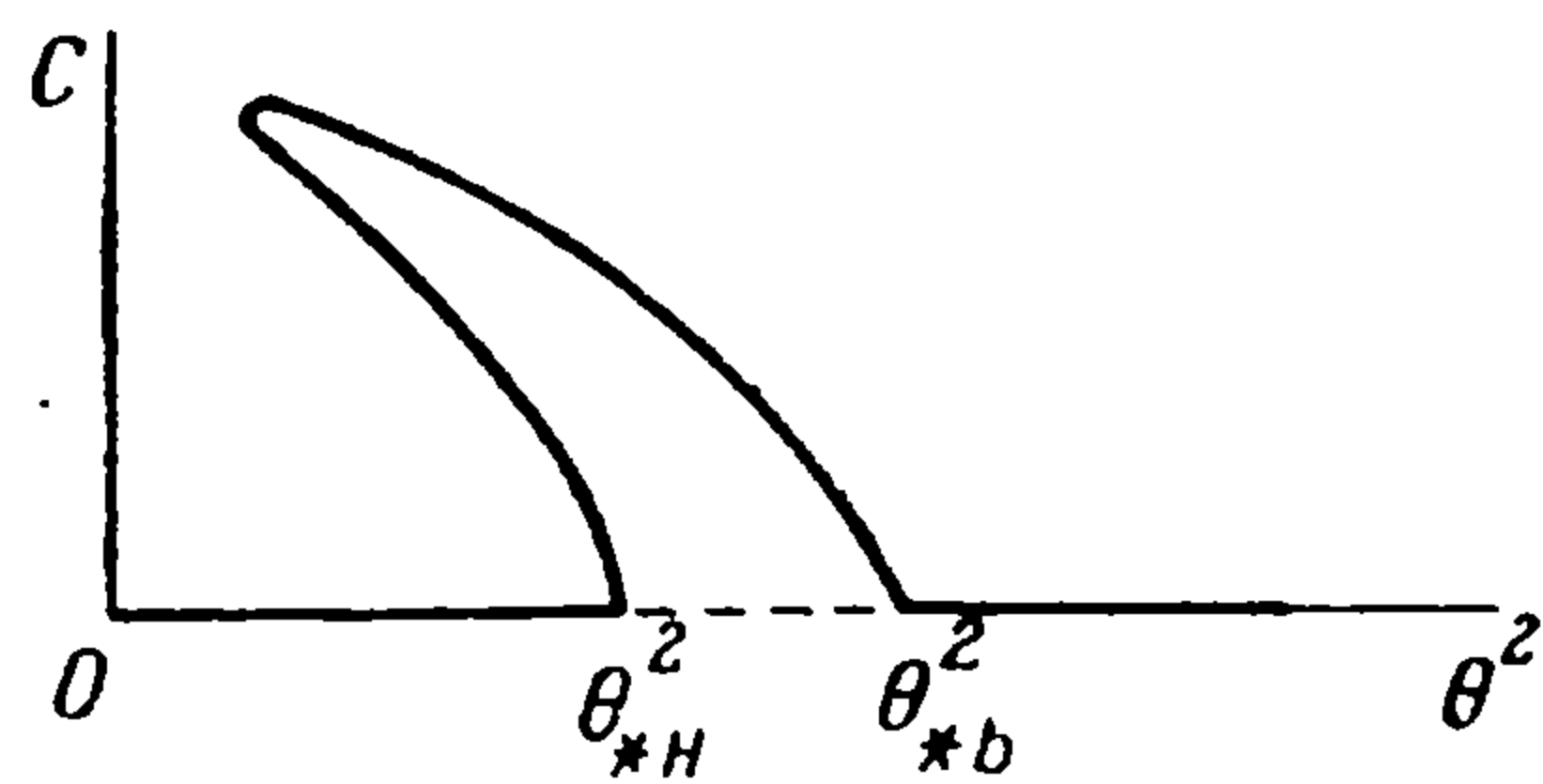
$$A_1 C^{m_1} + A_2 C^{m_2} = (\Omega^2 - \Omega_*^2) (1 \mp \mu \cos 2\sigma) C \quad (3.9)$$

где в силу (3.7)

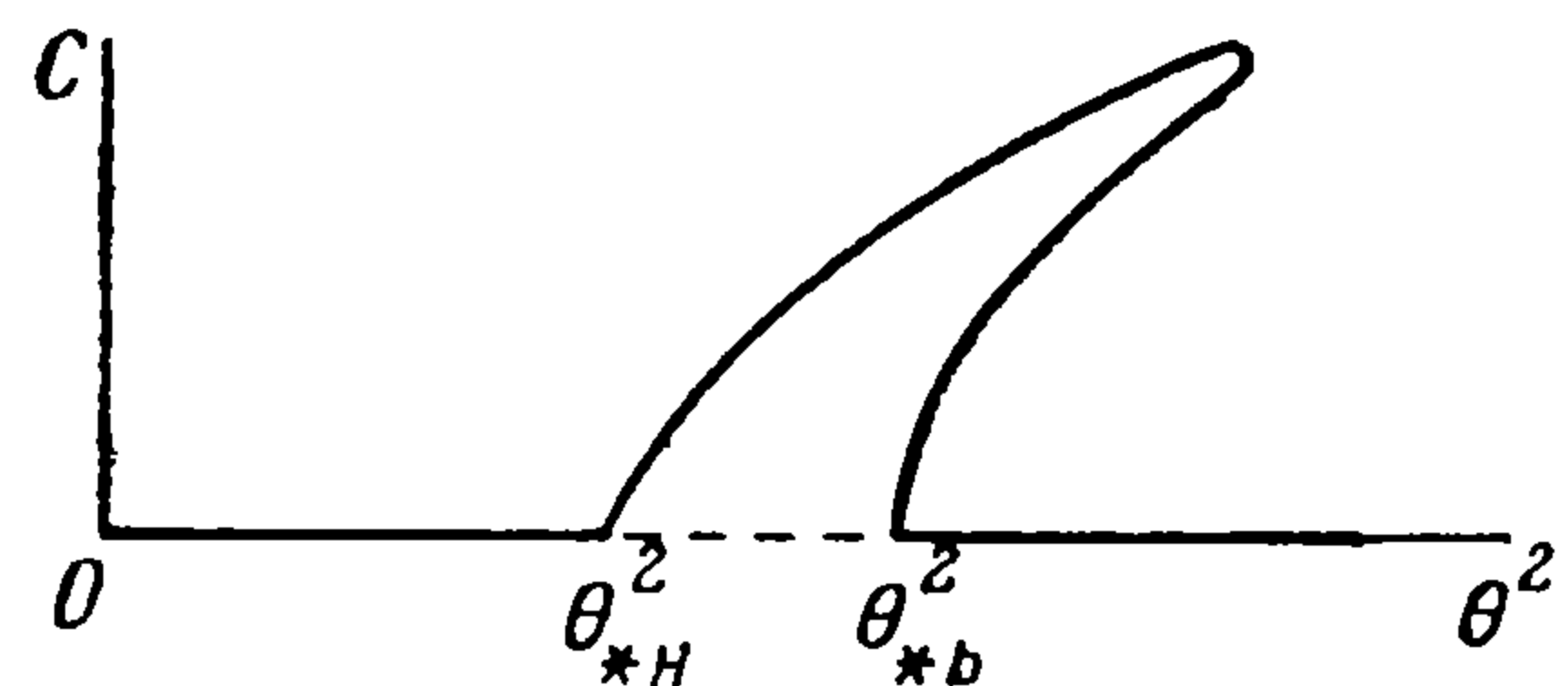
$$A_i = \frac{\alpha_i \theta}{2\pi} \int_0^{2T} \left| \cos^{m_i+1} \left(\frac{\theta t}{2} - \sigma \right) \right| dt, \quad \text{или} \quad A_i = \frac{\alpha_i \theta}{2\pi} \int_0^{2T} \left| \sin^{m_i+1} \left(\frac{\theta t}{2} - \sigma \right) \right| dt \quad (3.10)$$

Укажем, что в последнем члене уравнения (3.9) знак минус относится к нижней, а плюс — к верхней границе главной области неустойчивости.

Рассматривая формулы (1.3), (2.5) и (3.10), легко заметить, что коэффициенты A_i при $b_i > 0$ всегда положительные, а при $b_i < 0$ отрицательные. Укажем также, что коэффициенты могут иметь нулевые значения лишь в тех случаях, когда соответствующий слой пластинки изготовлен из линейно-упругого материала.



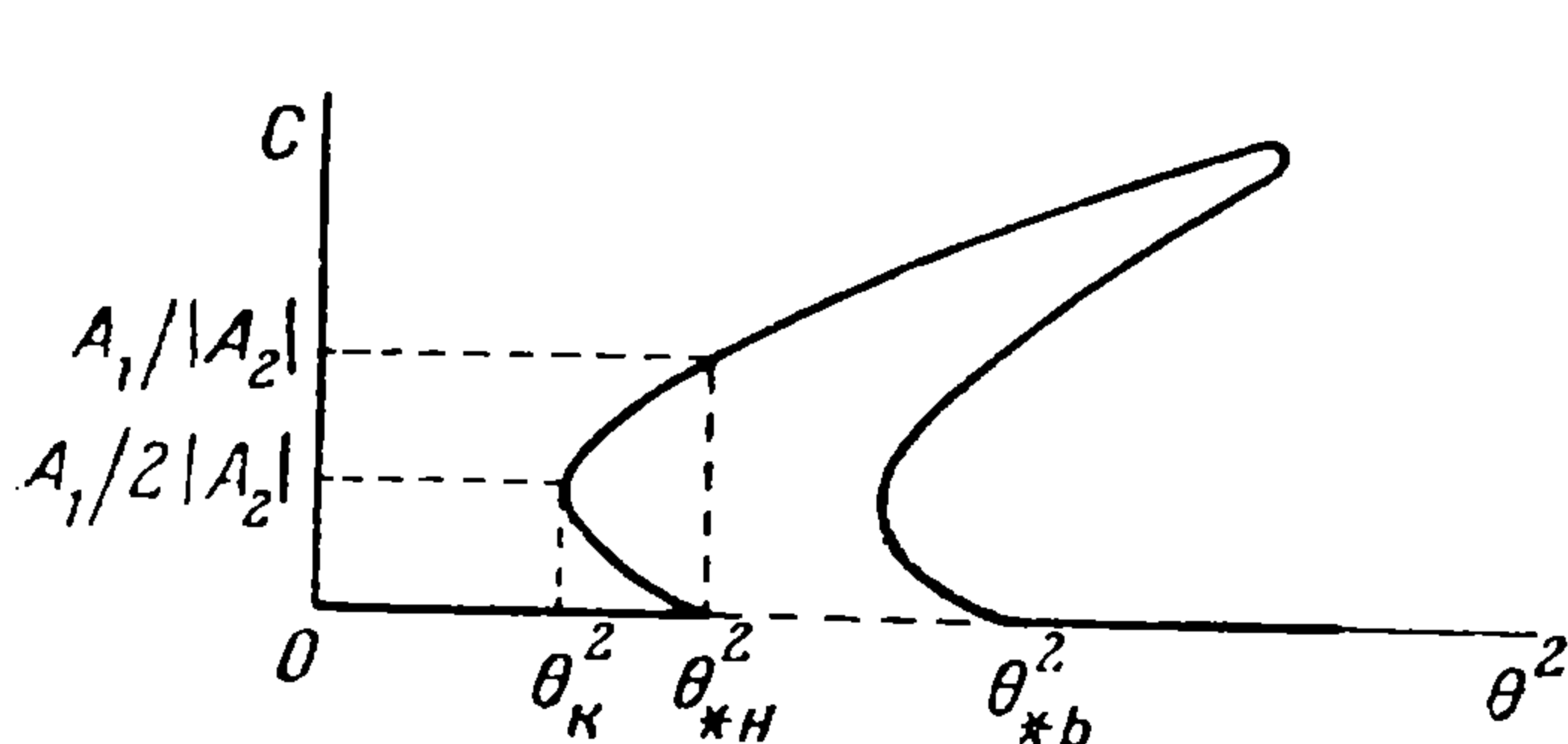
Фиг. 4



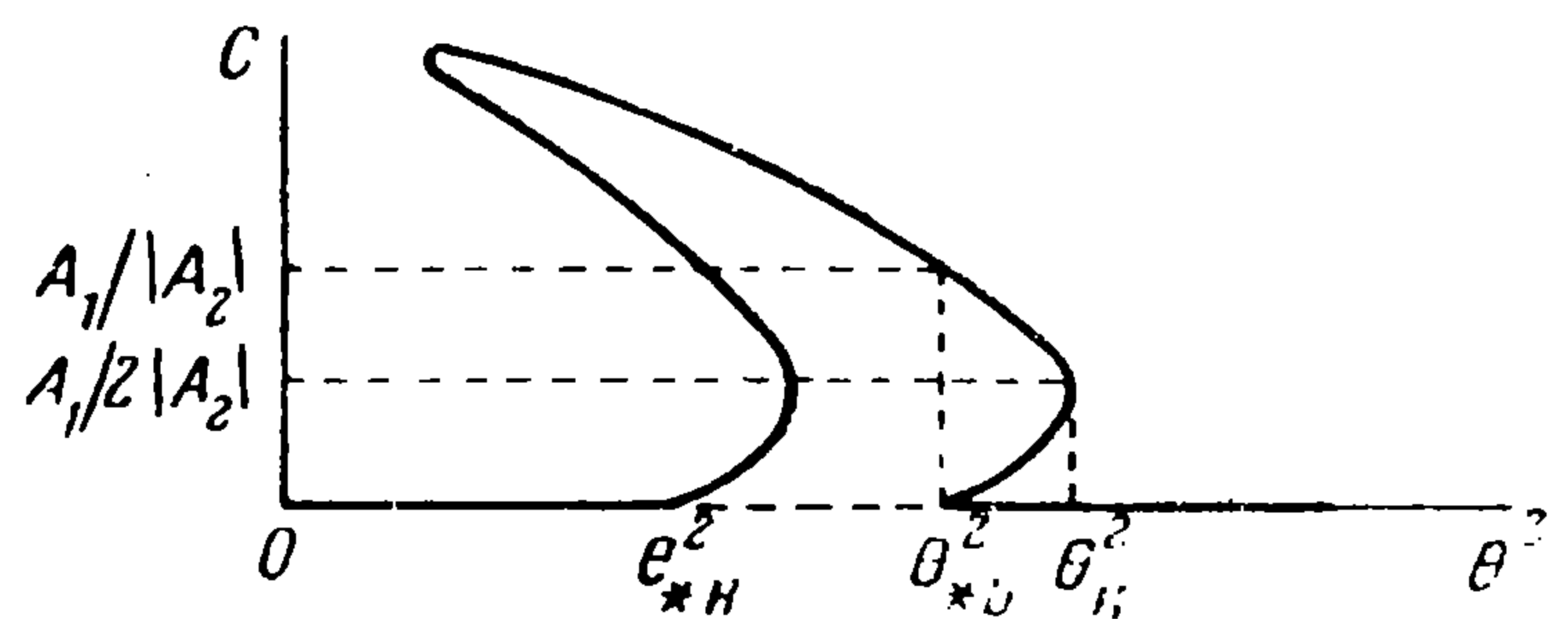
Фиг. 5

Пусть $A_i \geq 0$, в этом случае график амплитуд установившихся колебаний, в главной области динамической неустойчивости, на основании (3.9) имеет приведенный на фиг. 5 вид. Затягивание колебаний происходит в сторону меньших частот. В случае же $A_i \leq 0$ график амплитуд меняет свою форму и затягивание колебаний происходит в сторону больших частот (фиг. 4).

В случае, когда A_i имеют противоположные знаки, например, когда $A_1 > 0$, $A_2 < 0$, первый член уравнения (3.9) имеет тенденцию затягивать колебания в сторону меньших



Фиг. 6



Фиг. 7

частот, между тем второй член затягивает колебания в сторону больших частот. Для примера рассмотрим случай, когда $m_1=2$, $m_2=3$, тогда (3.9) примет вид

$$|A_2| C^3 - A_1 C^2 + (\Omega^2 - \Omega_*^2) (1 \mp \mu \cos 2\sigma) C = 0 \quad (3.11)$$

Решения (3.11) с учетом (3.6) и (3.7) имеют вид

$$C = 0 \quad (3.12)$$

$$C = \frac{A_1}{2|A_2|} \pm \left(\frac{A_1^2}{4A_2^2} - \frac{\Omega^2}{|A_2|} \left(1 - \frac{\Omega^2}{\Omega_*^2} \right) \left(1 \mp \sqrt{\mu^2 - \frac{\Omega^2 \varepsilon^2}{\omega^4}} \right) \right)^{1/2} \quad (3.13)$$

Нулевое решение (3.12) устойчиво всюду, за исключением областей возбуждения линейной системы, где получают установившиеся решения (3.13) (фиг. 6). Здесь обнаруживается следующее явление: после входа пластинки в резонанс частота начинает падать до некоторого значения θ_k^2 , где θ_k^2 определяется из уравнения

$$\frac{A_1^2}{4|A_2|} - \Omega^2 \left(1 - \frac{\theta_k^2}{\Omega_*^2} \right) \left(1 \mp \sqrt{\mu^2 - \frac{\theta_k^2 \varepsilon^2}{\omega^4}} \right) = 0 \quad (3.14)$$

после чего опять начинается возрастание частоты. Затягивание колебаний происходит в сторону больших частот.

В случае же $m_1 = 3$, $m_2 = 2$ график амплитуд установившихся колебаний меняет свой вид (фиг. 7) и затягивание колебаний происходит в сторону меньших частот. Далее укажем, что если $m_1 = m_2$, то установление колебаний, в зависимости от модулей коэффициентов A_i , происходит по кривой, изображенной на фиг. 4 или 5. В этом частном случае, если $|A_1| = |A_2|$, то нелинейность исчезает.

Для полноты картины отметим также, что в случае, когда $A_1 < 0$, $A_2 > 0$, все вышеприведенные выкладки повторяются, но графики амплитуд установившихся колебаний меняют свою форму и в зависимости от m_i представляются следующими графиками: при $m_1 = 2$, $m_2 = 3$ (фиг. 7), при $m_1 = 3$, $m_2 = 2$ (фиг. 6), при $m_1 = m_2$ (фиг. 5) или (фиг. 4).

Поступила 22 IV 1961

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А. К теории изгиба нелинейно-упругих трехслойных пластин. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1960, № 6.
2. Ильюшин А. А. Пластичность. М.—Л., ГИТТЛ, 1948.
3. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. М., ГИТТЛ, 1956.
4. Prager W. On ideal locking materials. Transactions of the Society of Rheology. 1957, 1.
5. Гунин В. Ц. О границах динамической неустойчивости оболочек. Тр. Конференции по теории оболочек и пластин, Казань, 1960.

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ УПРУГИХ ПОТЕНЦИАЛОВ ИЗ ОПЫТА

М. Э. Эглит

(Москва)

Закон Гука для простого растяжения можно написать в следующем виде:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (1)$$

Здесь σ — растягивающее напряжение, ε — коэффициент удлинения, а E — постоянная — модуль Юнга.

В работе Д. Д. Ивлева [1] было показано, что в случае малых деформаций справедливость закона (1) для простых растяжений недостаточна для выполнимости линейного закона Гука при произвольных малых деформациях. Им были построены примеры физически нелинейных упругих тел, подчиняющихся однако закону (1) при простых растяжениях.

Известно [2], что в рамках теории упругости с конечными деформациями вообще невозможно построить изотропную упругую среду, для которой в пространстве начальных состояний компоненты тензора напряжений зависят линейно от компонент тензора конечных деформаций, причем это предложение верно не только для произвольных деформаций, но даже и для таких частных классов деформаций, как плоская деформация и плоское напряженное состояние. Несмотря на это, можно построить примеры нелинейно-упругих тел, в которых для конечных деформаций, отвечающих простым растяжениям, выполняется равенство (1).

В рамках теории малых деформаций (геометрически линейной теории упругости) покажем, что факт выполнения закона Гука при любом плоском деформированном или плоском напряженном состоянии материала также не позволяет сделать вывод о том, что материал удовлетворяет закону Гука при произвольном, пространственном деформированном состоянии.